[illegible]

# FLORIANI DALHAM

CLERICI REGULARIS E SCHOLIS PIIS,

*ET IN*



ACADEMIA SABAUDICO-LIECHTENSTEINIANA

PHILOSOPHIÆ PROFESSORIS

# INSTITUTIONES PHYSICÆ

IN USUM NOBILISSIMORUM SUORUM AUDITORUM ADORNATÆ,

QUIBUS CEU SUBSIDIUM PRÆMITTUNTUR

## INSTITUTIONES MATHEMATICÆ.

## *TOMUS I.*

INSTITUTIONES MATHEMATICAS, NEMPE ARITHMETICAM, GEOMETRIAM ET TRIGONOMETRIAM COMPLECTENS.

M DCC LII.

*VIENNÆ AUSTRIÆ,*

TYPIS JOAN. THOMÆ TEATTNER, UNIV. TYPOGRAPHI.

Οἱ ἐν τῇ καλλίστῃ πόλει σου, μηδενὶ τρόπῳ Γεωμετρίας ἀφέξονται, καὶ γὰρ τὰ πάρεργα αὐτοῦ οὐ σμικρά. ποῖα; ἅ τε δή σὺ εἶπες τὰ περὶ τὸν πόλεμον, καὶ δὴ καὶ πρὸς πάσας μαθήσεις, ὥστε κάλλιον ἀποδέχεσθαι, ἴσμεν που ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ διοίσει ἡμμένος τε γεμετρίας καὶ μή. Πλάτων Πολιτ. Ζ.

*Qui pulcherrimam hanc inhabitant civitatem, nullatenus Geometriæ ſtudium intermittant; nam ne ea quidem ceu exigua haberi debent, quæ in illa præter inſtitutum adferuntur. Qualia? quæ nempe circa rem bellicam mox commemorabas. Quinimo quo facilius diſciplinæ quævis perdiſcantur, plurimum intereſſe ſcimus: imbutusne ſis Geometria, nec ne.* PLATO Lib. VII. de Republ.

*SERENISSIMÆ*

DOMINÆ DOMINÆ

# MARIÆ THERESIÆ

DUCI SABAUDIÆ,

PRINCIPI PEDEMONTII, MARCHIONI SALUTIARUM, COMITI AUGUSTÆ SUESSIONUM

NATÆ PRINCIPI

DE ET IN LIECHTENSTEIN ET NICOLSPURG.

DUCI

OPPAVIÆ ET CARNOVIÆ &c. &c.

ACADEMIÆ NOBILIUM BELLI PACISQUE ARTIBUS FLORENTIS

FUNDATRICI

LONGE OPTIMÆ AC CLEMENTISSIMÆ VITAM ET FELICITATEM PERENNEM.

# SERENISSIMA DUX!

ITa prorſus ſtudiorum noſtrorum rationes comparatæ ſunt, DUX SERENISSIMA! ut quæ nuper TE Auſpice feliciter cæpta ſunt, ea fervoris curſum conſtantiſſime non modo retineant; verum etiam laborum manipulos, officiis atque obſervantia pleniſſimos,

ſimos, neque etiam ab expectatione TUA alienos, in Clementiſſimum Tuum obtutum comportent. Si enim incredibile illud in TE extitit Principalis munificentiæ ornamentum, ut conſiliis ſupra ſæculi faſtigium elevatis Academiam hanc, optimarum artium feraciſſimum domicilium, profuſis facultatibus excitares, ſummosque jure apices intenderes: nobilem nempe juventutem ad ſeveriores ſcientias & virtutes pro obſequiis Auguſtorum Principum & Reipublicæ incolumitate informatam; an præcipuæ noſtræ facultates, Philoſophia & Mathematica, quibus ceu generalibus præſidiis aliarum omnium diſciplinarum valor atque præſtantia continetur, an, inquam, aliò

con-

convertere ſe poterant, quam ut liberaliſſimum ſuum beneficiorum fontem lectioribus, qua licebat, frondibus coronarent? præſertim cum nihil intermiſſum ſit curæ, nihil ſolicitudinis, ut meliora quæque, quæ & lucem noſtrorum temporum, & eruditorum omnium expectationem ſuſtineant, perdurante curriculi ſerie legerentur.

Qua quidem in re gratias, quas homo maximas poteſt, DEO, omnis Sapientiæ genuino Fonti, & Patri luminum agimus; primum quidem, quod nos æternis favoribus hanc in temporum periodum deſtinavit, qua ſummi Principes, translatis e Republica in reſtaurationem optimarum artium curis, vicario DEI munere perfunguntur, & excusso tandem veterno aurea policentur sæcula terrarum orbi: tum vero, quod TE nobis Fundatrice gloriari obtigerit, quæ cum avitis Prosapiæ laudibus ad omnem Imperialem nutum atque Auctoritatem reverentissime movearis; ad hoc tamen institutum promovendum eo studiosius incumbas, quod non ad privatæ gloriæ incrementum, neque ad communem corporum, sed mentium felicitatem procurandam collimet.

Fulgebit DUX SERENISSIMA! fulgebit prærogativa hæc singularis Ducalia TUA inter insignia æternis splendoribus,

eos-

eosque TIBI novæ laudis titulos ad decus, aut forte etiam ad invidiam poſterorum conciliabit, ut quidquid Avorum TUORUM longa ſeries infinitis in Auguſtiſſimam Domum Auſtriacam meritis ſago & toga obtinuit, id in Academia TUA, belli pacisque magiſtra, & cum emolumento publico tantopere copulata, denuò innovatum fuiſſe exiſtimetur.

Reſpuit equidem auras has omnes populares incomparabilis modeſtia rariſſimæ Virtutis TUÆ, quæ in beneficiorum collatione conquieſcens, fluxos encomiorum vertices heroico ſupercilio aſpernatur; verumtamen, patere DUX SERENISSIMA!

esse me præsagiendo paulisper audaciorem, nunquam id impetrare poteris, ut si suum Pergameni Attalum, si suum Mæcenatem Romani, si alii alios bonarum artium, si temporis promotores hæreditariis omnium sæculorum laudibus extulerunt, ut inquam TE non TUIS modo temporibus, sed seræ etiam posteritati lycæa statuminantem, ingrato feramus silentio præteriri, hoc præsertim excultissimo sæculo, quo ipsi Augusti Principes de rebus literariis soliciti, aperte dignitatem eorum significant, qui decus promovent literarum. Mihi Profecto tanta in TE devinctissimæ voluntatis promptitudo increvit, ut ne æneos quidem aut marmoreos colossos, quos ipsos edacis tem-

culoporis populatrices injuriæ tandem peſſumdant, tantis meritis ſuppares exiſtimem; niſi quoque Nomen TUUM pulcherrimis ſcientiis, tanquam digniori auro & cedro inſcriptum, indelebili apud poſteros charactere perennet.

Suſcipe igitur DUX SERENISSIMA! levidenſe hoc munus, Inſtitutiones Mathematicas ceu ingreſſum ad Phyſicam ſeveriorem, ex intima grati animi ſignificatione profectum; quod ubi intellexero ſolitam a TE gratiam iniviſſe, incitabo vires, quæ certo non deerunt, ut illuſtrius aliquando proferam induſtriæ monumentum. Interim immortalem DEUM efflictim exorabo, ut TE

ſo-

ſoſpitem per plurium luſtrorum ſpacia conſervet, atque ex ſuccreſcente indies Ducali Academia jucundiſſimos faciat fructus intueri.

SERENITATIS TUÆ

*Humillimus & Obſequentiſſimus*

Florianus Dalham,
Clericus Reg. Piar. Scholarum.

# RATIO OPERIS, ET INSTITUTUM.

*Physicæ, quam ſuo ordine tractandam ſuſcipio, Mathematicas Inſtitutiones viſum eſt præmittere; quod tanta ſit ſeverioris Phyſicæ cum Matheſi affinitas atque copulatio, ut in admirabilem naturalium corporum conditionem, a Divino Artifice productam, ſine certiſſimis Mathematicorum principiis vetitum ſit intueri. Plurima enim naturæ phænomena per motum contingunt; motuum vero leges, ac ordines a Mechanica, atque a Dynamica explanantur; igitur multo ſecurius fuerit, in rerum naturalium inveſtigatione Matheſim, cujus* Mechanica *pars eſt, conſulere, quam formis ſubſtantialibus, aut occultis qualitatibus inconſulto inniti. Porro non fuit animus in Mathematicis hiſce, quas præmitto, Inſtitutionibus abſolutum quodpiam illarum corpus adornare. Elementa ſolummodo in iis continentur ad Phyſices intellectionem maxime neceſſaria; ideoque etiam abſtinendum fuit ab Algebraicis demonſtrationibus, & conquieſcendum in principiis Euclidicis duntaxat, atque Archimedæis, niſi quod primis capitibus prima Algebræ elementa adſperſerim; quæ tamen ab eo, qui ſecus agere malit, ſalvo operis ſcopo poterunt præteriri. Conſultius enim putabam, principiis hiſce planioribus, multoque facilioribus neceſſariam pandere ſcientiam adoleſcentibus, quam propoſitione analyti-*

*carum difficultatum animos eorum, plerumque laboris impatientes, a Matheseos studio absterrere; præsertim cum vastissima analyseos Provincia in pauca se constringi folia non patiatur. Ex universa autem Mathesi eas partes præmisi, quæ generales quantitatis, qua continuæ, qua discretæ, leges contemplantur, & quæ* Mathesis pura *dicuntur: nempe* Arithmeticam, Geometriam, & Trigonometriam, *cum syntagmate breviusculo de* sectionibus Conicis. *Cæteras Matheseos partes, quæ generales hasce regulas variis materiis adplicant, veluti:* Aërometricam, Mechanicam, Opticam, Dioptricam *&c. ad Physicam rejeci eo ordine, quo illæ materiæ, nempe:* aër, motus, lux *&c. inibi recurrent. Denique tres illas generales Matheseos facultates adeo necessarias Physices administras censebam; ut sine his nemini Physico esse liceat, nisi qui forsan dixerit: neque motuum leges, neque accelerationem motus in gravibus corporibus cadentibus, neque antliæ phænomena, neque lucem juxta varios angulos aut reflexam, aut refractam, neque ponderum alleviationem, neque siderum motus, & sexcenta hujusmodi ad Physicam pertinere, quæ tamen omnia Matheseos subsidio eruuntur. Cæterum eo potissimum converti solicitudinem, utne theoria sola, in paginis recurrens, tironum fatigaret mentes; sed potius, ut perpetua praxis, theoriæ passim intertexta, fastidium eximeret, atque etiam manifestata in communi vita harum artium utilitas animorum contentionem promoveret. Qua quidem ex re, quantum Juventus commodum perceptura sit, æquus arbiter facile judicabit.*

ELEN-

# ELENCHUS CAPITUM,

## Quæ in hiſce Mathematicis Inſtitutionibus continentur.

# PROLEGOMENA.

Hiſtorica Matheſeos enarratio ; ubi etiam de natura ejusdem, præſtantia, neceſſitate, atque de methodo diſſeritur.

## IN ARITHMETICA.

# IN GEOMETRIA.



# IN TRIGONOMETRIA.



RA-

# INSTITUTIONUM MATHEMATICARUM PROLEGOMENA.

## Historica Matheseos enarratio ; ubi etiam de natura ejusdem, præstantia, necessitate atque de methodo disseritur.

### I.

MATHESIS *est scientia quædam generalis, quæ circa quantorum definitionem occupatur.* Quantitas autem, cum in omnibus corporibus hujus universi recurrat ; cumque ceu lympidissimus fons veritatibus plurimis abundet, ac vagis juribus per alias artes sit diffusa ; inde factum est, ut *Mathesis* a vetustissimis sapientibus non modo generale nomen ἀπὸ τοῦ μαθεῖν indepta sit, atque κατ' ἐξοχὴν *disciplina*, seu *institutio* dicatur ; verum etiam ob immensum rerum infinitarum complexum *Divinæ Scientiæ* encomium præseferat. Certe *Sap.* 11. *v.* 21. a sacro Scriptore dicitur Deus πάντα μέτρῳ, καὶ ἀριθμῷ, καὶ σταθμῷ διέταξε *in mensura, numero & pondere cuncta disposuisse*; inter profanos autem sapientes tanti semper habita est, ut divinus *Plato* : *Deum Geometriam exercere*, dictaret : ὁ Θεὸς γεωμετρεῖ. Ipseque *Cicero lib.* 2. *Academ. Quæst.* edixerit : *ex numeris & Mathematicorum initiis proficisci omnia.*

*Origo Matheseos.* II. Hujus itaque præstantissimæ facultatis originem ut texam, & ejusdem fata etiam pernici, quam licet, stilo decurram: videtur *mathematicarum disciplinarum* initium ad ipsa mundi esse incunabula referendum; *Adamus* quippe, humani generis proto-parens, & hujus filius *Seth* Astronomica claruisse scientia referuntur *a Josepho lib.* 1. *antiq. Jud. Cap.* 2. tantaque erat primorum Patriarcharum in hac contentio, ut *Mathesis* non immerito ex sententia Flavii Josephi sapientia antediluviana foret nominanda.

Fabulæ tamen loco illud haberi debet, quod idem *Josephus* ibidem narrat de Sethi nepotibus: eos nempe *Adami* vaticinio de duplici mundi excidio, altero per aquarum, altero per ignis diluvium futuro, præmonitos, duas columnas lateritiam, & lapideam erexisse: his inscripsisse arcanam suam de *sideribus* scientiam: ut ingruente aquarum illuvione observationes illæ in *lapidea columna*, grassante autem universali incendio in *lateritia columna* posteris conservarentur: Nam nullum sincerum testimonium huic narrationi suffragatur, videturque *Josephus* in *anachronismum* lapsus fuisse & columnas a *Soth* Ægypti rege in *Seriadica terra* positas, Patriarchæ Setho, aut *Sethianis* nepotibus perperam attribuisse. *Henochus Architectonicam* promovit, primamque civitatem, dictam *Henochiam* ædificavit. *Gen.* 4. *v.* 7. *Jubal* excoluit *Musicam*. *Nautices*, & per consequens *Hydrostatices* Noëmus in constructione arcæ insignia protulit argumenta, atque etiam elapsam Patrum suorum ætatem, dierum & mensium calculum, anni denique diluvio durante periodum *Chronologicis legibus* supputavit. Nihil aliud hæc omnia sunt, nisi *Mathesis* perpetua, & *dimensiones* variis materiis applicatæ; Quamvis, re ad crisim revocata, dicere liceat: veteres illos Patriarchas non tam artis directione, quam luminis naturalis consilio in operum illorum constructione usos fuisse; & *Josephum Flavium* partium studio abreptum, ad gloriam duntaxat suæ gentis evehendam, *Astronomiæ* originem refudisse in *Adamum* & *Sethum*; cum tamen in sacris literis nihil ejuscemodi deprehendatur. *Prolegom. Physicæ num.* X. XI.

III.

III. Post diluvium a *Noëmi* nepotibus fertur *Mathesis* inter Assyrios & Chaldæos fuisse propagata ; Turris quippe illa in campo *Sennar*, & molis magnitudine, & ædificantium scopo, ante illum diem inaudita, sine mensuris examussim coordinatis nullatenus excitari poterat. Tum *Zoroastres*, non ille quidem Bactrianus a *Nino* devictus, sed alter *Zoroastres* Chaldæus *Scientiam sideralem & magicam* apud Babylonios, protulit, cujus discipuli antiquissimi, & successores a *Plinio lib. 30. cap. 1.* & *Strabone lib. 16.* insinuantur *Azonaces*, *Cidenas*, *Naburianus*, *Sudinus* : *Astrologia* quippe, præsertim *Judiciaria*, occupandis hominum animis, & texendis fraudibus peropportuna, facile superstitioso astrorum, seu falsorum deorum cultui, quem nomine *magiæ* ( Θεῶν Θεραπεία ) intelligit *Plato in Alcibiade*, plebeculæ animos illigavit.

*Berosus* antiquissimus scriptor apud *Josephum lib. I. antiquit. Judaic. cap. 7.* dicit : apud Chaldæos circa illud tempus floruisse virum τὰ οὐράνια ἔμπειρον *rerum cælestium peritum*, per quem *Josephus Abrahamum* terræ Chaldææ indigenam, atque ex *Ur* oriundum significari pertendit. Idem *Josephus* existimat : ab eodem *Abrahamo* ex Chananæa, urgente fame, in Ægyptum abire compulso, Ægyptios *Arithmeticam* & *Astronomicam* fuisse edoctos. Sed & rursus hic videtur *Josephus* gentis suæ plus æquo studiosus. Ut ut est, plurimorum scriptorum consensione Ægypti primi feruntur *Mathesim* certis legibus certaque methodo digessisse : fortassis non tam aliorum præceptis, quam necessitatis imperio ad hoc inducti. *Nilus* namque, ut est apud *Herodotum*, frequenti exundatione diffusus agrorum limites abolevit ; ideo læsi possessores Regis Judicium implorarunt ; hic autem missis arbitris, *mensurandi scientia* præditis, jus suum cuique post vectigalis persolutionem rependit. Atque sic *Geometria* sensim eos gradus conscendit, ut, cum Matheseos pars tantummodo sit, pro sua excellentia, generali nomine *Mathesis* nuncupetur. *Aristoteles* quoque *lib. 1. Metaph. cap. 1.* diserte asserit ; *Mathematicas artes* ab Ægyptiis Sacerdotibus fuisse inventas. Itaque Ægyptus *Geometricæ facultatis* præstantia toto orbe celebrabatur, adeo, ut ut exterarum gentium homines, quorum animi honeſtiſſimarum artium amore jucundius ardebant, longis itineribus in Ægyptum commearent, & vicini præſertim Græci *Mathematicis* ſpoliis inde trans mare abductis Patriam ſuam locupletarent.

IV. Thales primus Græciæ ſapientum, ſuſcepto in Ægyptum itinere *Mathematicas* diſciplinas ab Ægyptiis Sacerdotibus didiciſſe perhibetur apud *Diogenem Laërt. in Vita Thaletis*; Cujus quidem eruditionis hauſtæ ſpecimen non vulgare protulit, cum Ægyptias Pyramides menſuravit ex earum umbra, & ſolis ortum, atque occaſum definivit juſtis recurſibus: rationes etiam ſolaris, & lunaris magnitudinis inivit: quodque, ut *Plutarchus* adjicit *de Placit. Philoſ. lib. ii. cap. 24.*, veras eclipſeon eruerit cauſas. In ſemicirculo præterea innumera contineri triangula reperit Thales; atque ob id diis fertur bovem immolaſſe. Quibus ſane factum eſt, ut *Thales Matheſeos* fama in Græcia primus omnium maxime clareret tempore *Aſtyagis* Medorum Regis, ſexcentis prope ante Chriſtum natum annis. Huic in Jonica ſchola ſucceſſit *Anaximander Mileſius* tempore Cyri Perſæ. *Gnomonicam* ille *artem* præclariſſimo invento in lucem eduxit teſte *Laërtio* in *ejus vita*, &, quod *Plinius* adjungit *lib. 2. hiſtor. Natural. Cap. 8.*: globum terraqueum ſphærica figura expreſſit, & obliquo Zodiaco, ſeu Ecliptica interdiſtinxit; cum ante *Anaximandrum* ſphæra, ab *Atlante* inventa, meris parallelis conſtaret. *Anaximandrum* ejusdem ſcholæ moderatores exceperunt: *Anaximenes*, *Anaxagoras*, *Archelaus* ſtudioſiſſimi omnes *Matheſeos* excultores.

V. Pythagoras Samius, *Pherecydis* Syri diſcipulus, hortatu *Thaletis* in Ægyptum abſceſſit, inibique a Sacerdotibus Memphis, & Dioſpoleos *arcanæ Matheſeos*, cujus incredibili amore tenebatur, fundamenta jecit. Eum ait *Porphyrius in vita Pythagoræ*, poſt variarum gentium perluſtrationes, a Phœniciis demum *Arithmeticam*, ab Ægyptiis *Geometriam*, a Chaldæis *Aſtronomiam* reportaſſe, cum alio etiam tempore *Muſicam* a Perſarum

ſarum *Magis* didiciſſet. Redux in Patriam ſuam *Samum*, odio *Polycratis* Tyranni, ſe in ſuburbanum ſpeleum abdidit, & *Politiæ*, atque *Aſtronomiæ* ſe totum impendit. Tandem *Tarquinii ſuperbi* temporibus in eam devenit Italiæ partem, quæ hodie *Calabria*, olim *Græcia magna*, dicebatur, atque Italicæ ſectæ dedit originem. Incomparabili huic *Mathematico* acceptum referimus *triangulum rationale rectangulum*. Item inventum illud dignum hecatombe: *quadratum hypotenuſæ eſſe æquale duobus quadratis Catheti, & baſeos. Tabulam Pythagoricam. Regulas ſymphoniæ muſicæ*; Cum alias etiam terram in medio univerſi, nobisque oppoſitos *Antichtonas* ſtatuiſſe a *Laërtio* perhibeatur. Hunc in ſchola Italica ſecutus eſt *Ocellus Lucanus*, *Archytas Tarentinus*, qui *Mechanicen* luculente promovit, ut ex volante illius columba pateſcit apud *Gellium Lib.* 10. *Noct. Atic. cap.* 12. Item *Philolaus Croton.* aliique.

VI. In Eleatica ſchola *Parmenides* Mathematicus floruit, & primus, ex *Laërtio in ejus vita* Phoſphorum & Heſperum idem eſſe ſidus nempe Venerem detexit.

*Xerxis* Perſarum Regis temporibus *Democritus Abderites* ad Chaldæos, Arabas, Ægyptios & ultimorum Indorum *Gymnoſophiſtas* profectus, tantum in *Geometricis diſciplinis* profecit: ut apud *Clementem Alexand. lib.* 1. *ſtrom.* de ſe libere fateatur, *componendis demonſtratione lineis nemo me adhuc ſuperavit; ne quidem qui Ægyptiorum vocantur Arpedonaptæ.* Hunc Strabo inter primos *Geographiæ* parentes reponit; ejusque *mathematica opera Laërtius* ſequentia enumerat: *de contactu circuli, & ſphæræ. De Geometria & Geometricorum numeris. De mutis, & ſolidis lineis. De agricultura, ſeu Geometricus. De Pictura. De Coſmographia. Magnus annus, ſeu Aſtronomia. De ſideribus vagis. Diacoſmus major, & minor.* In quo poſtremo libro *Nautica* plurimum illuſtratur. *Democrito* in ſua ſchola ſucceſſerunt *Protagoras*, *Metrodorus Chius* aliique.

VII. Plato exemplo *Pythagoræ* in Ægyptum profectus, ibidem *Arithmeticam* & *Geometriam* edoctus eſt. Vidiſſes eum, in-

in patriam reverſum, *Geometriam* tam neceſſariam facultatem ſuſpexiſſe, ut hanc *Academiæ* ſuæ foribus epigraphen inſcripſerit: ὀυδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. *Nemo Geometriæ ignarus ingrediatur. Vitruvius Architect. lib. 9. cap. 1.* refert: ſingularem quempiam modum menſurandi agros a *Platone* eſſe inventum. Quantum autem in *Geographia* valuerit, teſtatur ejus *Atlantica*, ultra *Columnas Herculis* ſita, quam in *Timæo* ſcribit majorem fuiſſe Lybia, & Aſia; tandem vero ſubmerſione noſtri Orbis communicationi ereptam. Neque deſunt eruditi Scriptores, qui *Atlanticæ*, vel *Atlantidis* nomine *Platoni* intellectam fuiſſe *Americam* conjiciant, ſæculorum viciſſitudinibus obliteratam; maxime cum *Laërtius* Platonem, & Antipodas adſtruxiſſe aſſeveret. Cæterum vel id ſolum ſumma *Platonis* in Matheſim merita abunde comprobat, quod *Cicero de Finibus* dicit: *Plato* in Muſicis, Geometria, numeris, & aſtris ſe contrivit.

VIII. Aristoteles quoque *Platonis* diſcipulus, *Alexandri M.* Præceptor, non poſtremam *Matheſi* operam addixit; dicebat quippe: ſcire, quod res aliqua ſit, ad eos pertinere, qui ſenſibus tantummodo nituntur: at vero, quare res aliqua ſic ſe habeat, id ſcire proprium eſſe officium *Mathematicorum*, *Mathematicon* a *Laërtio* ſcripſiſſe fertur. *Voſſius Cap. 26. de ſcient. Mathem.* addit: Ariſtotelem quoque de *Muſica*, *Optica*, & *Aſtrologia* ſcripſiſſe, qui tamen libri injuria temporum perierunt.

Porro, cum tam *Plato*, quam *Ariſtoteles* placita ſua *Geometricis* potiſſimum ament *ratiociniis* comprobare, liquet exinde: ante omnes alias facultates *Geomotriam* adoleſcentibus tradere, in more poſitum fuiſſe Græcis. Hinc *Plato* paſſim vocat *Geometriam* προπαιδείαν *primam Inſtitutionem*. Quod autem ex tam fœcundis Geometriæ fontibus ſubſequentes ſcholaſtici nil *Geometricum* in ſua ſcripta traduxerint, id inde eſt: quod, barbarie literarum dominante, ſola fere logomachia contenti, ſublimiora in antiquis Philoſophis ſapientiæ neglexerint intueri arcana.

IX. Eu-

IX. Euclides, alius ab *Euclide* Megaricæ ſectæ Inſtitutore, tempore *Ptolomæi Lagi*, trecentis prope ante Chriſtum annis, *Geometriæ* laude claruit, atque Alexandriæ ſcholam *mathematicam* fundavit. Notos Elementorum tredecim libros, quibus Juventus hodiedum paſſim imbuitur, edidit, in quibus aliorum inventa collegit, auxit, ſuisque demonſtrationibus roboravit. *Hypſicles* tredecim illis libris decimum quartum, & decimum quintum, ac nuper *Franciſcus Fluſſates Candalla* decimum ſextum adjecit. Hoc *Euclide* auctore tantas Alexandriæ radices *Geometria* egit, ut ex mente *Voſſii Cap.* 15. *de ſcient. mathem.* nongentis prope annis, ab hoc *Euclide* nimirum uſque ad Arabas, & Saracenos Geometras, nullus fere Geometriæ laude floruerit, qui Alexandriæ aut natus non fuiſſet, aut ſaltem ſtudiis ibidem non vacaſſet. *Euclidis* diſcipulus *Apollonius Pergæus* ſeptem Conicorum ſubtiliſſimos libros, partim ex *Archimedis* doctrina, partim proprio ex cerebro procudit. Unde *magnus Geometra* dici meruit.

X. Archimedes centum circiter annis poſt Euclidem vixit. Hic ſummo adminiculatus ingenio eo devenit, ut omnis *mathematicarum diſciplinarum* præſtantia in eum immigraſſe uno omnium ore diceretur. Cum *continentem rationem* ſphæræ ad cylindrum inveniſſet, nempe: ut 2 ad 3, tantum voluptatis percepit, ut ſphæram cum cylindro ejusdem diametri, & altitudinis tumulo ſuo ſuperimponi voluerit memoriæ cauſa. Pauca ex *Archimedæis* ſcriptis, hæcque eruditionis pleniſſima, ad nos pervenerunt.

Græcis tandem in Romanorum poteſtatem redactis, viſi ſunt amiſſa libertate gentis acutiſſimæ animi, ſimul & *mathematicæ diſciplinæ* nutare. In Ægypto felicius aliquanto res ſe habuerunt; Anno ſiquidem Chriſti ſeptuageſimo natus eſt *Claudius Ptolomæus* princeps omnium, qui hactenus extiterunt, aſtronomorum. Syſtema ille mundanum, ab eo *Ptolomaicum* dictum. coordinavit, atque alia complura *Matheſeos* evulgavit ſpecimina.

*Juliano Apostata* regnante vixit *Diophantes Alexandrinus*, qui 13. de *Arithmetica* edidit libros. Floruerunt præterea *Anatolius* Laodicenus, *Pappus* & *Theon* Alexandrinus, cujus filia *Hypatia* in *Apollonium* & *Diophantem* commentaria adornavit. *Proclus* item Lycius, qui anno Christi 485. e vivis excessit; & alter quidam *Proclus* Mathematicus, qui serius, nempe sub annum Christi 514. *Vitaliani*, Constantinopolim obsidentis, classem speculis causticis incendisse fertur.

XI. Interea temporis varia *Matheseos* fortuna revolvitur apud Romanos: *Varro* quippe de *Arithmetica* librum scripsisse perhibetur apud *Censorinum de die Natali Cap.* 2. *Frontinus* etiam *geometricos* libros *Varroni* attribuit. *Boëtii* de *Arithmetica* libri adhucdum supersunt. Præsertim vero *Architectonica* apud Romanos splendorem nominis est assecuta, cujus uberrimum testimonium in *Vitruvii Pollionis* decem libris ad nos usque est propagatum. Pauco tempore interjecto Imperatores *Tiberius*, *Vitellius*, & *Domitianus* Mathematicos persecuti sunt, ut habet *Jonsius de scriptorib. Philos. lib.* 1. *Cap.* 17. eo quod impostores quidam pulcherrima scientia ad vanas divinationes, cæremonias vetitas, atque ad maleficia infanda abuterentur; quare etiam iniquior *Matheseos* conditio esse cœpit, ita ut pauci admodum animos ad eam adjicerent.

XII. *Diocletiani* quidem, & *Maximiniani* temporibus videbatur *Geometria* firmius præsidium obtinuisse, cum Augusti illi edicerent: *Artem Geometriæ discere, atque exercere publice interest. l.* 2. *Cod. de malef. & mathem.* At brevi post sæcula barbara inceperunt, & in occidente quidem Vandalorum, Gothorum, Hunnorum, Herulorum atque Longobardorum excursionibus omnia pessumibant; in oriente vero Bulgarorum atque Saracenorum deprædationibus optimæ artes prostratæ una cum *Geometria* misere jacebant; his tamen ipsis temporibus sæculo Christi nono floruit *Leo* Mathematicus, qui hac etiam de causa a *Theophilo* Imperatore Constantinopolitano singularem beneficentiam est expertus.

XIII. Aſt mirum dictu eſt, per ipſas barbarorum vaſtationes *Matheſi* incrementum acceſſiſſe; Arabes enim, & Saraceni, in Græcorum, Romanorumque ditiones effuſi, in complura *Geometrica* monumenta inciderunt, eorumque præſtantiam, & utilitatem cum percepiſſent, tanto ſtudio eidem vacaverunt, ut Geometricos libros non paucos in Arabicam linguam transtulerint, & *Mathematici* etiam ipſi extiterint, præſertim ſub *Califfa Almamone* circa annum Chriſti 900. *Characteres arithmeticos*, ſi non penitus adinvenerunt Arabes illi, & Mauri, ſaltem eorum uſum *in Arithmeticam* induxerunt; cum antehac literis duntaxat Græci æque, ac Latini numeros exprimerent. A Mauris uſus horum characterum in Hiſpaniam primum circa annum Chriſti 1100, tum ad alias gentes eſt propagatus; Quamvis hodierni noſtri characteres a figura illa primæva Arabica nonnihil abſceſſerint, ut ex vetuſtiſſimis codicibus fit palam.

Denique exulceratis illis temporibus Itali, ob mercaturas cum Ægxptiis, Indis, Germanis &c. ſuſceptas *Arithmeticam* utcunque coluerunt; donec tandem ſæculo decimo quinto ineunte Cardinalis *Nicolaus Cuſanus*, pro *mathematicarum* diſciplinarum bono natus, veternum excutere, & primævum pulcherrimis facultatibus ſplendorem vindicare cœpit. *Geometriam* præſertim promovit, & *Arithmeticam*; quem ſubſecuti *Georgius*, *Peürbachius*, & hujus diſcipulus *Joannes Müllerus*, alias a patria ſua *Regiomontanus*. Hic conſtruxit *Tabulas ſinuum*. *Erasmus Reinholdus Tabulas tangentium*, *Tabulas ſecantium Joachimus Rheticus*. Logarithmos pro maximo *Trigonometriæ* emolumento, incredibili cum ſolertia, ſupputavit *Joannes Neperus* Baro a Merchiſton Scotus; & hoc quidem podagricos inter ſingultus fallendi temporis cauſa. *Franciſcus Vieta Algebram* perpolivit, quam *Carteſius*, *Neutonus* & *Leibnicius* ad apicem prope evexerunt, aliique innumeri ex Recentioribus, quorum mirificis ſtudiis factum eſt, ut ætas hæc noſtra non modo *mathematicarum* artium gloria antiquorum felicia ſæcula adæquaſſe;

 verum

verum etiam ſat luculento diſcrimine antecelluiſſe videatur. Atque hæc de hiſtoria *Matheſeos* delibaſſe ſufficiat.

*Partes Matheſeos.*

XIV. Dividitur *Matheſis* biſariam: in *puram*, & *mixtam*. *Pura* ſeu abſtracta eſt, quæ quantitatem, illiusque affectiones contemplatur, a materia ſeparatas, v. g. *angulum concurſu duarum rectarum linearum productum*. *Mixta*, ſeu applicata eſt, quæ leges a *Matheſi* pura propoſitas variis quibusque materiis applicat v. g. quod angulus lucis reflexæ ex radio lucis, & plano, in quod radius incidit, cooriatur. Rurſum Puræ *Matheſeos* tres ſunt partes, nempe: *Arithmetica*, *Geometria*, & *Trigonometria*.

*Arithmetica*, cui etiam *Algebra*, ſeu *Matheſis ſublimior* adjici ſolet, *quantitatem diſcretam*, ſeu numeros perſequitur. *Geometria quantitatem continuam*, nempe lineas, ſuperficies, & corpora. Dimenſio linearum vocatur *Euthymetria*, ſuperficierum tandem, & corporum dimenſiones *Epipedometria*, & *Stereometria* vocitantur. *Trigonometria* eſt ſcientia *metiendi omne genus triangulorum*, ſeu per ſinus, & tangentes, ſeu per eorum logarithmos, ut infra dicetur. *Mixta Matheſeos* partes enumerantur: *Mechanica*, *Aëromatria*, *Hydroſtatica*, *Optica*, *Dioptrica*, *Catoptrica*. *Gnomonica &c.*

*Utilitas, atque neceſſitas Matheſeos.*

XV. Jam vero utilitatem, præſtantiam, ac neceſſitatem *Matheſeos* quod ſpectat; præterquam quod nemo unius mortalium inveniatur, cui neceſſum non ſit ſæpius cum numeris agere, magnitudines rerum, figuras, ac proportiones ſuum ob finem internoſcere, ac dimetiri; etiam intellectum ſcientia hæc magnopere exacuit adoleſcentibus, atque ad perſpiciendas abditas ſubtilitates viam aperit, ac manuducit. *Proclus* ſane *Lib. I. Comment. in Eucl.* ſic de *Matheſi* loquitur: Ἐκφαντικὸν τῶν κατ' ἐσίαν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἴδων, λήθης δὲ καὶ ἀγνοίας ἀφαιρέτικον, ὧν ἀπὸ τῆς γενέσεως ἔχομεν, καὶ ἀπολύτικον τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας δεσμῶν, κατὰ τὸν Θεὼν, ὄντως τὸν τῆς ἐπισήμης ἔφορον, ὃς προάγει μὲν ἐις τὸ ἐμφανὲς τὰ νοερὰ δῶρα, πληροῖ δὲ παντὰ τῶν Θείων λόγων, κινεῖ δὲ τάς ψυχὰς ἐπὶ νῦν, καὶ ὥσπερ

ἐκ

ἐκ κάρου βαθέος ἀνεγείρει, διὰ ζητήσεως δὲ ἐπιστρέφει πρὸς αὐτάς, καὶ διὰ μανείας τελειοῖ, καὶ διὰ ῥεύσεως τοῦ καθαροῦ πρὸς τὴν μακαρίαν ζωήν. *Insitam movet cognitionem, & promit formas, quæ nobis secundum essentiam insunt; aufert oblivionem, atque ignorantiam, quæ nobis ab ortu nostro innata sunt: Solvit vincula, quæ ab irrationalitate proveniunt, ad Dei plane similitudinem, hujus scientiæ præsidis; qui intelligentia munera manifestat, & cuncta Divinis complet rationibus: animas quoque ad mentem erigit, ac velut e profundo exsuscitat sopore: Inquisitione ad seipsas convertit, ad jucundiorem vitam deducit.* Profecto Theologis ipsis non raro *Mathesis* frequentata est, in Paschatis juxta phases lunæ exacte ordinandi laboribus, & in compluribus S. Scripturæ difficultatibus: veluti de Magorum stella: Eclipsi mortem Christi subsecuta &c. enodandis; ut non immerito *Origenes* apud *Eusebium lib. 6. hist. Eccl. Cap. 13.* ad sacra studia idoneos in *Arithmeticis* & *Geometricis* solerter exerceret.

Quod Medicis quoque *Mathematica* sit perutilis, innuit Medicorum Phœnix *Hippocrates in Epistola ad Thessalum filium*, ubi eidem *Arithmeticam*, & *Geometriam* impense commendat. Denique vulgares plurimi artifices in *Geometricorum* instrumentorum: circini, linealis &c. usu omnem operum suorum concinnitatem, & certitudinem reponunt. Velim autem *Geometriæ* tirones cumprimis admonitos, ut ubi theoreticam aliquam ex his Institutionibus præceptionem legerint, aut explicari audierint, illico adhibito circino, aut alio competente instrumento figuras in chartis delineent; nam ejuscemodi exercitiis multo illustrius variæ proportiones, ac combinationes in mente defigentur, atque etiam ad Geometriam Practicam jucunda parabitur accessio.

*Methodus*, secundum quam *Mathematicæ* disciplinæ ordinantur, in eo tota posita est, ut a primis simplicissimis notitiis perveniatur ad ignota, & composita, atque ut *Proportiones* certis tantummodo, & exploratis principiis inædificentur, utque nihil omnino admittatur, nisi quod ex ratiocinio infallibili sit deductum. Sunt autem Principia *Mathescos*: *Definitiones*, *Axio-* *Methodus.*

*mata*

*mata*, & *Poſtulata*. *Definitiones* rei notitiam congruis terminis manifeſtant. *Axiomata*, ſeu notiones ſunt propoſitiones theoreticæ, quarum veritas ex ſola terminorum inſpectione pateſcit, v. g. *Totum eſt majus ſua parte*. *Poſtulata* ſunt quædam tam facilis operationis, ut fruſtraneum foret ea multis demonſtrare v. g. *a puncto ad punctum lineam ducere*. *Poſtulata* igitur ad practicam Matheſeos partem pertinent: *Axiomata* ad theoreticam.

Propoſitiones demonſtrandæ aliæ ſunt *Theoremata*, aliæ *Problemata*. *Theorema* eſt ſpeculativa propoſitio, in qua de re jam formata, aut deſcripta diſſeritur, illiusque rei proprietates per *Definitiones*, & *Axiomata* demonſtrantur. *Problema* eſt Propoſitio, per quam aliquid a *Geometra* efficiendum, vel deſcribendum proponitur.

*Lemma*, quod *Cicero* vocat *Præſumptionem*, eſt propoſitio ſpeculativa, quæ, cum propoſitioni quidem principaliori demonſtrandæ deſerviat, commode tamen citari non poſſit, præmittitur eidem propter ordinatam ſeriem.

*Hypotheſes* ſunt arbitrariæ poſitiones, quibus oſtenditur: quanam ratione praxim aliquam commodius inſtituere oporteat, vel phænomenorum ſingularium explicationes adornare.

IN-

# INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

## CAPUT I.

## De Principiis Arithmeticæ.

### DEFINITIO I.

§. 1. ARithmetica eſt ſcientia ſupputandi, atque ex datis numeris alium incognitum eliciendi.

### SCHOLIA.

§. 2. PErtractantur in Arithmetica quantitates diſcretæ, ſeu numeri, horumque natura, & proprietates demonſtrantur.

§. 3. NUmeri in computis adhibentur loco rerum, eo quod ipſas res adſerre ſæpe aut nolimus, aut nequeamus. Infallibilia tamen Arithmeticæ principia illud præſtant, ut eorum beneficio ignotos numeros multo certius, & felicius eruamus, quam ſi res ipſas præſentes numerando, ſenſibus noſtris uteremur.

### DEFINITIO II.

§. 4. UNitas eſt principium numeri ſimplex, & inextenſum; non vero numerus dici poteſt, cum diſcrete extenſa non ſit; multiplicatis enim diverſimode unitatibus diverſus conſurgit numerus.

## SCHOLIA.

§. 5. AB ultima unitate ſinguli numeri ſpeciem ſuam deſumunt. v. g. ternarius a tertia unitate claudente duas alias unitates.

§. 6. NOtæ numerorum, ſeu characteres ab omnibus prope gentibus adhibentur ſequentes: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. feruntur que ab Arabibus ad Europæos eſſe delati. Proleg. XIII.

## DEFINITIO III.

§. 7. ÆQualia ſunt, quæ ejusdem omnino ſunt quantitatis: inæqualia vero ſunt, quæ diverſam quantitatem habent.

## AXIOMA I.

§. 8. IDem numerus ſibi ipſi æqualis eſt. Poteſtque diverſa ratione prodire v. g. 8. addendo inſimul 2 & 6, 4 & 4, 5 & 3 &c.

Item ſubtrahendo 2 a 10, 3 ab 11 &c. multiplicando 4 per 2, dividendo 24 per 3, 16 per 2 &c. Quomodocunque autem producatur, ſemper ſibi æqualis eſt, habet enim ſemper eandem quantitatem diſcretam.

## AXIOMA II.

§. 9. QUæcunque eidem tertio ſunt æqualia, ſunt etiam æqualia inter ſe; ideoque unum in alterius locum ſubſtitui poteſt.

Sint tres catervæ militum Cæſareanorum, quarum ſingulæ 150. pedites contineant; prima, & tertia erunt æquales ſecundæ, atque ideo prima, & tertia æquales inter ſe.

AXIO-

## AXIOMA III.

§. 10. SI æqualia æqualibus addas, prodeunt æqualia: si vero æqualia ab æqualibus auferas, rursus æqualia remanent.

Sint duo greges, quorum alter 50 equos, alter 50 oves contineat; adjice æqualiter huic 30 oves, illi 30 equos, erunt numero 80 æquales. Iterum deme æqualiter priori 30 equos, posteriori 30 oves, erunt iterum numero 20 æquales.

## AXIOMA IV.

§. 11. SI æqualia per æqualia multiplicentur, prodeunt æqualia; si æqualia per æqualia dividantur, prodibunt rursus æqualia.

Sit calix aureus appendens 3. libras auri: sitque alter calix argenteus pariter 3 libras argenti appendens. Multiplicetur calix aureus per 3, ut sint 3 calices aurei æquales, prodibunt 9 eorum libræ auri; calix quoque argenteus multiplicetur per 3, ut sint 3 calices argentei æquales, prodibunt eorum 9 libræ argenti. Si rursus 9 libras auri, & argenti in tres calices æquales auri, & argenti diviseris, erunt singuli, & aurei, & argentei calices 3 librarum.

## AXIOMA V.

§. 12. SI & majori, & minori numero æqualia addantur, prodibunt æqualia; si vero majori, & minori æqualia demantur, rursus prodibunt inæqualia.

Si calici aureo trium librarum, & argenteo calici 5 librarum æqualiter 2 libras olei infundas, efficient numerum inæqualem librarum; calix namque aureus 5 libras appendet:

argenteus 8. Effunde e calice aureo 3. librarum, ſimiliterque e calice argenteo 5 librarum 2. libras olei, erunt numero librarum inæquali: aureus nempe 3, argenteus 5 librarum.

## AXIOMA VI.

§. 13. SI & major, & minor numerus per æqualia multiplicetur, prodibunt inæqualia; ſin vero per æqualia dividantur, rurſus prodibunt inæqualia.

Appendat calix aureus 3 libras, & alter argenteus libras 5. multiplica & aureum calicem, & argenteum per 3, ut ſint 3 calices aurei, & 3 argentei, ſinguli in ſua ſorte æquales; erunt trium calicum aureorum libræ 9 auri; trium vero argenteorum libræ 15. Divide libras 9 auri, & 15 argenti in tres æquales calices aureos, & argenteos; ſinguli aurei appendent 3; ſinguli vero argentei 5 libras.

## COROLLARIUM I.

§. 14. IDem numerus inæqualis prodit, ſi æqualia per inæqualia multiplices, aut dividas; Quod ſi vero inæqualis per inæqualem multiplicetur, provenit quandoque numerus æqualis, quandoque inæqualis v. g. multiplica numerum 4 per 3, & inæqualem numerum 6 per inæqualem 2, prodibit utrinque numerus æqualis nempe 12. Iterum multiplicetur numerus 4 per 2, & inæqualis 6 per æqualem 2, prodibunt utrinque numeri inæquales. In priore 8, in poſteriore 12.

## AXIOMA VII.

§. 15. *T*Otum eſt majus qualibet ſua *parte*; æquale autem partibus ſuis ſimul ſumptis.

Sic

Sic numerus ternarius major est qualibet sua unitate; æqualis vero partibus suis simul sumtis.

## DEFINITIO IV.

§. 16. PArs *aliquota* est, quæ aliquoties sumta numerum totum perfecte metitur, v. g. tria quater repetita metiuntur perfecte numerum duodenarium. *Aliquanta* vero pars est, quæ numerum non metitur perfecte v. g. 5. respectu 12; non enim unquam poterit numerus duodenarius in æquales partes dividi, quarum una efficiat 5.

## AXIOMA VIII.

§. 17. SI duorum totorum dimidium, vel quæcunque aliquota pars fuerit æqualis, etiam tota erunt æqualia, & vicissim.

Sicut enim se habent tota ad invicem, ita & eorundem partes: duo calices, quorum uterque 12 libras ponderet, habebunt media, quæ 6 libras; & quadrantes, quæ 3 libras ponderent.

## COROLLARIUM II.

§. 18. POrro cum necessarium sit Arithmeticæ operam daturo, partes aliquotas præcipuorum numerorum nosse; juvat memoriæ adjuvandæ causa, *Abacum Pythagoricum* subjicere, qui partes aliquotas primorum decem numerorum exhibeat usque ad centum.

Usus hujus tabulæ talis est: velis scire, quantum efficiat septies 8, perge a numero 7 recta linea deorsum, quoadusque ad transversalem lineam 8 pervenias; & reperies 56.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

## COROLLARIUM III.

§. 19. Qui numerorum inventores fuerunt, numeros non plures quam decem posuerunt, quibus absolutis initium numerandi repetitur; occasio hujus fuisse videtur, quod in digitis primum supputare consuescerent; potuissent autem utique, si lubitum fuisset, simplices numeros amplius extendere.

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

Algebraici characterum, seu numerorum loco literis utuntur ad quantitates determinandas, nempe A, B, C, D, E, F, X, Y, Z. hoc cum discrimine, quod priores literæ A, B, C, D. &c. communi quadam inter eos conventione ad *cognitas*, seu *datas* quantitates exprimendas adhibeantur; postremæ vero veluti X, Y, Z. ad *incognitas* & *quæsitas*; memoriæ tamen adjuvandæ causa tam cognitas, quam incognitas quantitates mos est passim indicare per primam illius rei literam, quam, significant: veluti *motum* per m, *tempus* per t, *velocitatem* per v, *radium* per r, *sinum* per s, *tangentem* per t. &c.

Differunt itaque Arithmeticorum, & Algebraicorum characteres in hoc, quod Arithmeticorum characteres, seu numeri ad certam aliquam determinatamque quantitatem significandam sint destinati, quamvis materia, quæ illo numero con-

continetur, indeterminata ſit, maximeque variabilis; veluti tres civitates minorem ſemper numerum referunt, quam quatuor, utut una civitas plures cives contineat: Algebraicorum vero characteres, id eſt literæ, nequidem determinatæ quantitati ſint adſtricti. Nunquid clarum cuivis eſt, lineam aliquam, cujuscunque ſit demum extenſionis, majorem futuram, poſtquam alteri cuidam lineæ, cujuscunque itidem extenſionis, fuerit copulata? aut omnino minorem, cum in duas fuerit diſcreta partes? Quoniam autem indeterminatæ duæ quantitates haud ſecus, ac numeri ipſi definiti, calculo cenſeri poſſunt, hinc *Algebra* duxit originem, quæ eſt *ſcientia docens calculum quantitatum indeterminatarum.*

# CAPUT II.

## De Numeratione.

### DEFINITIO.

§. 20. NUmeratio eſt *plurium quantorum diſgregatorum apta repræſentatio, & pronunciatio.*

### HYPOTHESIS.

CHaracteres ſimplices, ſeorſim poſiti, ſignificant unitates v. g. 1, 2, 3 &c. Characteres vero duplicati ſignificant decades v. g. 10, 20, 35, 46 &c. Triplicati characteres notant centurias: quadruplices notant millenarios; v. g. 1000. quintuplices characteres notant decem millenarios, ut 10000. Sextuplices notant centum millenarios, ut 200. 000. ſeptuplices ſignificant millionem v. g. 1000. 000. 2000. 000. Quæ omnia ſequenti Schemate exprimuntur.

| | |
|---|---|
| 2 | unitates. |
| 20 | decades. |
| 200 | centuriæ. |
| 2000 | millenarii. |
| 20000 | decades millenar. |
| 200000 | centuria millenar. |
| 2000000 | Milliones &c. |

Nul-

Nullitas, seu cyphra 0, vel etiam plures, si ante numerum ponatur, nihil significat v. g. 002. significat tantum 2; secus vero si numeris postponatur.

§. 21. IN occurrente majore numero v. g. 1752. unitates sunt a dextris; & inde, a dextris sinistram versus procedendo, in secundo charactere recurrunt decades, in tertio centenarii &c. quod argumento est: notas numerorum ab Orientalibus populis sumsisse originem, qui scripturas suas præpostero ordine, a dextra incipiendo, sinistram versus prosequuntur, ut Arabes, Chaldæi, Hebræi &c. Europæi vero, cum scripta sua a sinistra dextram versus exa rent, in sola numerorum scriptione Orientalium consuetudinem receperunt; nostro enim scribendi more inverso, oporteret primo unitates, tum decades, inde centurias &c. exprimere.

§. 22. MAgna numeranti facilitas accedit, si post ternos quosque characteres *punctu'um* apponat, idque incipiendo a dextra sinistram versus; ita ut post primum punctum sequantur *millenarii*, post secundum *milliones*; & notentur superna virgula. *Billiones*, quorum unus millies mille milliones comprehendit, sequuntur post quartum punctum, & notantur duplici virgula. Post sextum punctum sequuntur *Trilliones*, quorum unus millies mille *Billiones* continet, notanturque triplici virgula, & sic porro: v. g.

$$\overset{\prime\prime\prime}{3}.\ 720.\ \overset{\prime\prime}{346}.\ 120.\ \overset{\prime}{989}.\ 372.\ 406.$$

hi characteres sic rite numerando exprimuntur: *3. trilliones, septies centeni viginti mille, trecenti, quadraginta sex billiones, centies viginti mille nongenti octoginta novem milliones, trecenta septuaginta duo millia, quadringenta, & sex.*

PRO-

## PROPOSITIO.

§. 23. HUnc numerum militum : *Ducenties mille, ſeptingenti viginti quatuor* rite adſcribere.

Primo loco a ſiniſtris ponantur *millenarii*, tum dextram verſus continuentur *centuriæ*, tandem decades (§. 21).

200. 724.

(*Nota*) cum numeri dictantur v. g. *viginti duo millia, octingenta, viginti quinque*, non debet ſcribens illico auditis *viginti duobus millibus* adſcribere 22000, ſed tantum 22.; neſcit enim, quotnam *centuriæ*, & *decades* porro ſubſequantur; tum auditis *centuriis octingentis*, adjunctoque charactere 8. tandem ad *decades* 25. procedat, habiturus numerum 22. 825.

Niſi quis mallet ſeparatim *millenarios*, *centenarios* &c. adſcribere, ac tandem ſummam omnium per *additionem* colligere. v. g. 22000

$$\begin{array}{r} 22000 \\ 800 \\ 25 \\ \hline 22825 \end{array}$$

Quod tamen prorſus inutile foret.

Nunc præcipuas quatuor *Arithmeticæ* ſpecies: *additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diviſionem* ordine perſequamur.

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

CUm legitima quidem Numerorum collocatio tanti momenti ſit apud Arithmeticos, ut ex duobus, aut pluribus numeris præpoſtere collocatis diverſiſſima computatio oriatur; (§. 20.) apud *Algebraicos* tamen nulla neglectæ hujus collocationis eſt efficacia, tantumdemque valent polynomiæ B + A, quam A + B. Sunt autem *polynomiæ* quantitates compoſitæ ex pluribus terminis, per ſigna + *plus*, aut — *minus* copulatis v. g. A + B, vel A B — B B. Item A C + M — R. Partes vero harum polynomiarum ſunt hic : A & B, item A B, & B B, Item A C, M, R, dicunturque termini complexæ quantitatis algebraicæ. *Monomiæ* ſunt quantitates algebraicæ, quæ unum duntaxat terminum complectuntur v. g. AB. ABC &c. Interea tamen, ut calculus in majori claritate decurrat, conſuevimus ordinem alphabeti retinere.

# CAPUT III.

## De Additione ſimplici.

§. 24. *ADditio* eſt *duorum, vel plurium Numerorum in unum collectio.* Indicatur per ſignum + adjectum, id eſt: *plus*

Cum numeri inſimul addendi adſcribuntur, ita diſponuntur, ut ultimi characteres a dextris ſubtus ſe invicem accurate adſcribantur: *Unitates* ſub *unitatibus*: *decades* ſub *decadibus* &c. v. g.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 302 \\ 12 \\ 1070 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Incipit vero additio ab infimo charactere, dextrorſum collocato, qui additur cum aliis characteribus in linea recta aſcendentibus. Additis omnibus illis numeris primis, *unitates*, quæ ultra rotundum *decadum* Numerum excurrunt, ponuntur infra hunc primum ordinem characterum; *decades* vero relictæ referuntur ad ſecundum ordinem; & quod ſupra *decades* reperitur, infra adſcribitur ſub ſecundo ordine; *decades* vero pro tertio ordine aſſervantur. Et ſic porro.

## PROPOSITIO.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 302 \\ 12 \\ 1070 \\ 4 \\ \hline 1455 \end{array}$$

§. 25. NUmerum præſentem in ſimul addere. Dicatur: 4 + 2 + 2 + 7 ſunt 15. ponatur itaque 5 infra hunc primum ordinem; *decadem* vero 1. reſerva pro ordine ſecundo, ac dic. 1 + 7. + 1 + 6 ſunt 15. 5 rurſus ponatur ſub ſecundo or-

ordine, *decas* vero pro tertio ordine reſervetur. Tum ad tertium ordinem procedendo, dicatur: $1 + 3$ ſunt 4. hunc characterem 4 adſcribito ſub tertio ordine, & quoniam nulla *decas* remanſit, accede ad quartum ordinem, inibique cum nihil niſi 1 deprehendas, adſcribe ſolam hanc unitatem ſub quarto ordine, prodibitque numerus 1455. exprimens omnes minores additos.

Nam hic Numerus collectus 1455 continet omnes *unitates*, *decades*, *centurias*, & *millenarios* numerorum minorum, nihilque ſuperfluit. Igitur æqualis eſt omnibus ſimul ſumptis (§. 15.)

§. 26. PRoba *additionis* hoc modo fit: ex addendarum quantitatum, ſeu characterum numero una omittitur, cæteræ coadduntur; ſumma tandem proveniens ſubtrahitur a ſumma facti prioris exempli, & remanebit numerus omiſſus. v. g. velis hujus facti exempli probam adjicere: ſubduc primam poſitionem nempe 24, cæteros duos numeros 36 & 60 adde, prodibunt 96, hæc 96 ſubtrahe a ſumma exempli 120, remanebitque numerus omiſſus 24.

$$\begin{array}{r}24\\36\\60\\\hline 120\end{array}\qquad\begin{array}{r}24\\\hline 36\\60\\\hline 96\end{array}\qquad\begin{array}{r}120\\96\\\hline 24\end{array}$$

Alio modo proba perficitur, ſi tam a numeris *addendorum*, quam a numero ex *additione* proveniente 9 abjeceris; & ſi idem numerus remanſerit, bene fuit factum exemplum, veluti in mox allata propoſitione: ſi ex characteribus addendorum bis 9 abjeceris, remanebunt 3; factum quoque ipſum 3 exhibet.

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

QUoniam Additionis ſignum eſt + (§ 24) ſolent Algebraici B ipſi A ſic addere: $A + B$. Item $A + B + C + D$. Si itaque $A = 3$. $B = 6$, $C = 4$, $D = 9$. $= 22$. Quod ſi vero addendæ quantitates ſint ſimiles, ſcribantur ſimiles cum ſuis ſignis infra ſimiles quantitates, reducanturque ad terminos ſimiles; v. g. addere velis 2 A B + 3 B C + 4 C D cum 3 AB + 2 BC — 5 CD.

$$\begin{array}{ll} \text{Scribatur } 2\,AB + 3\,BC + 4\,CD & \\ \phantom{\text{Scribatur }} 3\,AB + 2\,BC - 5\,CD & = 5\,AB + 5\,BC - CD. \end{array}$$

Quia nempe 2 AB + 3 AB = 5 AB ; 3 B C + 2 B C = 5 B C; & 4 CD — 5 CD = — 1 CD, ſeu ſimpliciter — CD.

$$\begin{array}{ll} \text{Item } 3\,A - 3\,B & \\ \phantom{\text{Item }} + 2\,A - 4\,B & = 5\,A - 7\,B. \end{array}$$

Illæ itaque quantitates, quibus ſignum + præmittitur, vocantur *poſitivæ* ; nam addunt aliquid poſitivum habenti. Illæ quoque quantitates, quibus nullum ſignum algebraicum præcedit, pro poſitivis habentur, veluti: P — M idem eſt, ac + P — M.

Denique numeri, qui algebraicas quantitates, ſeu terminos præcedunt, dicuntur *coëfficientes* v. g. in hac poſitione 3 B C numerus 3 eſt *coëfficiens* producti B C, oſtenditque quantitatem B C eſſe ternam; Et 3 A = A + A + A, ſique A ponatur = 4, erit 3 A = 4 + 4 + 4 = 12. Item in hoc termino 4 D *coëfficiens* eſt 4. &c.

Dum autem quantitati Algebraicæ nullus numerus coëfficiens præmittitur, ſemper ſupponitur eſſe coëfficiens 1, veluti AB = 1 AB. Omittiturque duntaxat numerus, ut calculus ſimplicior reddatur.

# CAPUT IV.

## De Subtractione ſimplici.

§. 27. *Subtractio* eſt *numeri minoris a numero majori ſeparatio* ; indicaturque per ſignum —, id eſt : *minus*. Ope *ſubtractionis*

*ctionis* innoteſcit differentia duorum numerorum; quanto nempe major numerus minorem excedat, apparebuntque dati numeri inæquales (§. 12.)

§. 28. IN Subtractione minor numerus infra majorem ponitur hac ratione, ut numeri finales dextimi apte infra ſe ſcribantur, neque alter alterum excedat ordine, quamvis numeri initiales ſiniſtimi non ſe adæquarent. Tum inferiorem a ſuperiori *ſubtrahe*, tam per *unitates*, quam per *decades*, *centurias* &c. incipiendo ab ultima unitate a dextris poſita. Quod ſi inferior numerus alicubi major ſit, quam ſuperior; punctulum pone ad præcedentem numerum, quod punctulum in ulteriori ſubtractione *unitatem* valebit.

## PROPOSITIO I.

§. 29. JUxta peritos Aſtronomos, diſtantia maxima planetæ *Saturni* a terra eſt ſemidiametrorum telluris 244000: *Solis* vero ſemidiametrorum 22374. Quæritur: quot ſemidiametris *Saturni* diſtantia a terra *ſolem* ſuperet?

Primo majorem numerum, nempe ſemidiametros diſtantiæ *Saturni* a terra adnota: infra hunc ſcribe minorem diſtantiam *Solis*, ac ducatur linea; tum, quia 4 a nullitate ſubtrahi nequit, ideo 4 ſubtrahenda ſunt a 10, & punctulum vicino charactéri 7 apponendum: ſubtractis itaque 4 a 10 remanent 6; hæc directe infra characterem 4 collocentur.

244 0 0 0
22.3.7.4
――――――――
221 6 2 6 *differentia.*

Tum perge dicendo: 8 (7 enim cum punctulo valet 8) a ſecunda nullitate ſuperiori demi nequit: igitur, appoſito punctulo ad ſequentem characterem 3., 8 ſubtrahantur a 10; quod remanet, nempe 2, ponatur infra characterem 7. &c. atque ubi hac ratione continuo perrexeris, prodibit *differentia* minoris numeri a majore nempe: 221626 ſemidiametrorum, quibus *Saturnus Sole* a Tellure eſt remotior.

§. 30. PRoba bonæ operationis factæ in *Subtrahendo* exhibetur, dum numerus ſubtractione inventus, nempe: 221626 cum minori numero ſubtracto 22374 ſimul additur (§. 24.) & rurſus ille magnus numerus 244000, a quo minor ſubtractus eſt, provenit. Dic itaque 6 + 4 ſunt 10, nullitatem pone infra 6, unitatem reſerva pro ſequenti ordine &c. peracta operatione habebis priorem Numerum 244000; adeoque, *differentia*, & *ſubtractus numerus* eſt æqualis illi, a quo *ſubtractio* facta eſt. (§. 15.) Quod rite factam fuiſſe *ſubtractionem* probat.

| | |
|---|---|
| 244000 | |
| 22374 | *Subtr.* |
| 221626 | *Add.* |
| 244000 | *Proba.* |

## PROPOSITIO II.

§. 31. DAta diſtantia *Solis* a terra nempe 22374 ſemidiametris terreſtribus, & data diſtantia *Lunæ* maxima 61 ſemidiametrorum, invenire differentiam diſtantiæ utriusque a terra.

22374 — 61 valet 22313. Eſt igitur differentia diſtantiæ *Solis*, & *Lunæ* a Terra 22313 ſemidiametris terreſt. Terræ autem ſemidiametrus ex Coſmographorum calculo extenditur ad 900 circiter milliaria Germanica.

| | |
|---|---|
| 22374 | |
| 61 | |
| 22313 | *differ.* |
| 22374 | *Proba.* |

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

ALgebraici, quibus ſignum — eſt ſubtractionis, ſic ſubtrahunt quantitatem + B ab A: A — B. ut vero — B ſubtrahatur ab A, commutetur ſignum — in +, & ſcribatur: A + B, quia nempe quantitas A hac ſubtractione augetur. Item ſubtractio 3 AB — 2 BC + 2 CD a 5 AB — 3 BC + 2 CD ſic peragitur

$$\begin{array}{l} 5\,AB - 3\,BC + 2\,CD \\ 3\,AB - 2\,BC + 2\,CD \end{array} = 2\,AB - BC.$$

Tol-

Tollendo quippe — *minus*, ponitur + plus ; haud ſecus ac debitor 6 florenorum, qui poſſideat 50 florenos, non cenſetur habere 50, ſed 50 — 6 = 44; tollatur eidem debitum, augebitur illius poſſeſſio per 6, & tum habebit 50 florenos. Porro ille, qui pecuniam quidem poſſideat, eam autem alteri teneatur, nihil habet: qui autem nihil pecuniæ habet, & florenum unum alteri teneatur, minus habet quam nihil. Igitur quantitates *negativæ*, quibus nempe ſignum — præmittitur, ſunt minus, quam nihil; & o *nihil* tenet medium inter quantitates *poſitivas*, & *negativas*.

Quoniam autem nulla quantitas ab altera poteſt ſubtrahi, niſi in eadem contineatur; qui voluerit B ab A ſubtrahere, neceſſario ſupponere debet, B in A contineri, ita ut quantitate una ab altera ſublata remaneat utriuſque differentia; ſicut enim 2 eſt differentia inter 5 & 3, & 5 — 3 = 2; ſeu differentia inter 5 & 3 eſt 5 — 3; ita quoque A — B differentia eſt utriuſque, alterius per +, alterius per —.

## CAPUT V.

### De Multiplicatione ſimplici.

§. 32. *Multiplicatio* eſt toties repetita alicujus numeri aſſumtio, quoties *multiplicans* unitatem in ſe complectitur. Multiplicationis ſignum eſt ×.

Major numerus, qui ſuperiori ordine adſcribitur, dicitur *multiplicandus*; minor vero numerus, qui infra ponitur, dicitur *multiplicans*. Collocatio characterum eſt talis: ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant, ut dictum eſt (§. 24.) Tum ultimus character *multiplicantis* a dextris poſitus, ducitur ſingillatim in omnes numeros *multiplicandi*; ita tamen, ut unitates decadem excedentes ſub numero *multiplicato* ponantur; numerus vero decadum pro multiplicatione ſequentis numeri ſervetur, veluti §. 24. quo in negotio plurimum juvat tabulam *Pythagoricam* noſſe (§.18). PRO-

## PROPOSITIO I.

§. 33. OPe multiplicationis ſcire : quotnam horas ſeptimana una contineat, ſi quilibet dies in 24 horas ubique gentium eſt diſtributus?

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | *horæ unius diei.* |
| | 7 | *dies ſeptimanæ.* |
| | 168 | *horæ unius ſeptimanæ* |

Numerus major nempe 24 adſcribitur, infra hunc vero minor multiplicans 7. tum dic: *ſepties quatuor*, vel *quater ſeptem* efficiunt 28; numerum unitatum 8 pone infra lineolam; 2 autem, numerum nempe *decadum* reſerva pro multiplicatione ſequentis numeri, & dic: *ſepties duo*, vel *bis ſeptem* ſunt 14; additis 2, quæ ex decadibus mox remanſerunt, fiunt 16; hæc itaque 16 colloca infra 2 primi ordinis, prodibitque numerus horarum unius ſeptimanæ 168.

Etenim *numerus multiplicans* ducitur in unitates *numeri multiplicandi*, & reſervatis pro ſecundo numero decadibus ducitur *multiplicans* quoque in decades *multiplicandi numeri*; Ergo tota ſumma ſuperioris *numeri multiplicandi* tot multiplicationes recipit, quot numerus inferior *multiplicans* habet unitates.

Proba, atque ſecuritas de bona facta operatione in multiplicando habetur, cum *numerus multiplicans* aſſumitur pro *diviſore*, qui totam ſummam hac ratione dividat, ut *quotus* idem ſit cum numero priori *multiplicando*. Sed de *Diviſione* mox infra.

## SCHOLION I.

§. 34. SI plures *characteres multiplicantes* ſint, tum primo charactere dextimo *multiplicante* in omnes ſuperiores ducto (§. 32.) fit tranſitus ad ſecundum *characterem multiplicantem*, qui in loco *decadum* eſt notatus; procediturque eodem modo, quo prius, niſi quod prima *multiplicati numeri* nota, non jam in loco *unitatum*, ſed in loco *decadum* inferiori ordine ponatur. Idem faciendum, ſi tertius aliquis ſit *character multiplicans*, qui in loco *centuriarum* ponitur &c. quod ſequens Propoſitio declarat.

PRO-

## PROPOSITIO II.

§. 35. CUm globus telluris in 360 gradus divisus sit, quilibet autem gradus in maximo circulo ad 15 milliaria germanica extendatur; beneficio *multiplicationis* reperire; quotnam milliaria telluris peripheria maxima complectatur?

Primo ordine ponitur major *numerus multiplicandus* 360. infra hunc ponitur *numerus multiplicans* 15; facta deinde lineola dicatur: *quinquies nullitas est* denique nullitas, hanc *nullitatem* seu *cyphram* pone sub charactere 5. tum dicatur: quinquies 6 sunt 30; rursus *cyphram* sub charactere 6 in loco decadum pone; numerum vero decadum 3, qui remansit, pro multiplicatione sequentis numeri reserva, dicendo: ter 5 sunt 15, additisque illis 3, prodeunt 18. quæ loco ultimo adscribes.

| | |
|---:|---|
| 360 | *Gradus.* |
| 15 | *Milliaria unius Gradus.* |
| 1800 | |
| 360 | |
| 5400 | *Summa Milliarium.* |

Tum transi ad secundum numerum multiplicantem; dicendo: semel o est item o; hanc nullitatem infra in loco secundo nempe *decadum* adscribe. Perge ad sequentem, & dic: semel 6 sunt 6, hunc characterem infra 8 in loco tertio nempe *centuriarum* adscribe; tandem progredere dicendo: semel 3 sunt 3. deponeque characterem hunc 3 in loco quarto nempe *millenariorum.* Quod si hos duos numeros apte collocatos 1800, & 360 addideris (§. 24) habebitur numerus milliarium *Peripheriæ maximæ Telluris* 5400.

Nam numerus superior multiplicatus est per 5 unitates; tum etiam multiplicatus est per unam decadem: ergo toties multiplicatus est, quot numerus inferior multiplicans continet unitates.

## SCHOLION II.

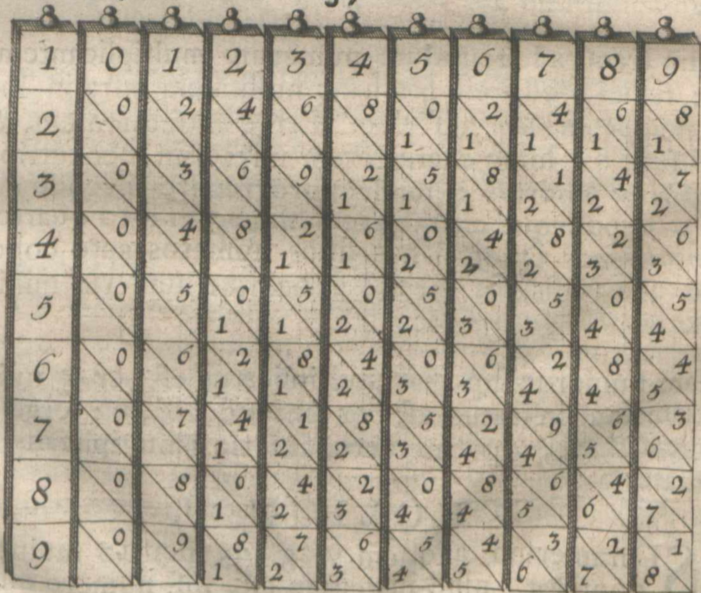
§. 36. SI numerum aliquem v. g. 35 per 10 multiplicare oporteat, nihil necessum est, nisi numero multiplicando cyphram adjicere, ut fiat 350. Si idem numerus per 100 multiplicari debeat, adjiciantur duæ cyphræ 3500. si per 1000, adjiciantur eidem tres cyphræ 35000 &c.

## SCHOLION III.

§. 37. SI *multiplicans numerus* cyphras annexas habeat, eæ cyphræ dextrorsum numero invento, seu producto præmittantur; *multiplicatio* autem incipiat a *numero multiplicante* v. g.

| | | |
|---|---|---|
| 345 | Item | 2630 |
| 300 | | 200 |
| 103500 | | 526000 |

§. 38. ALia præterea adhucdum superest *multiplicandi ratio* etiam in majoribus numeris tractandis facilis, & expedita, per *Tabulas* nempe *Neperianas*, sic dictas ab Auctore suo *Joanne Nepero* (*Num. XIII. Proleg.*)



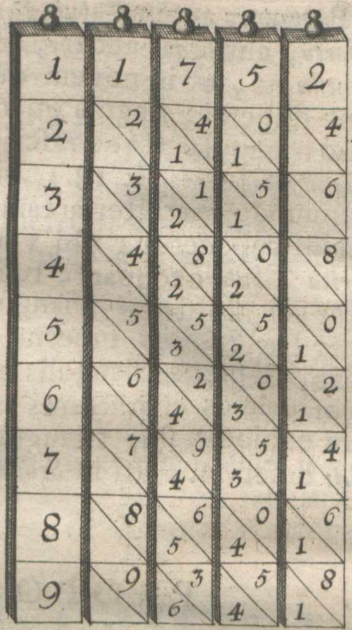

Paran-

Parantur autem *Tabulæ Neperianæ* ſic: e craſſiori conglutinata *Charta*, aut *ligno*, aut *oſſe*, aut etiam *metallo* diſponantur *oblongæ lamellæ* ita, ut in novem quadrata ſpatia commodo valeant ordine diſpeſci; ſingula quadrata per diagonalem redigantur in duo triangula, atque inſcribantur quadratis illis characteres *Tabulæ Pythagoricæ*, (§. 18.) hac cum cautela, ut, dum unus tantummodo character aream in *Tabula Pythagorica* obtinet, ille ad dextram collocetur; ubi vero duo characteres aream in *Pythagorica Tabula* occupant, tum dexter character ad dextrum, ſiniſter ad ſiniſtrum triangulum *Tabulæ Neperianæ* rejiciatur. Præter has *Tabellas*, ſuperne novem primis characteribus diſtinctas, & meris triangulis conſignatas, fiat alia lamella, quæ novem primos characteres in quadratis ſpatiis continuo deſcenſu exhibeat ſine triangulis, & quæ veluti *index* cæteris *Tabellis* deſerviat, uti in *Schematiſmo* exhibetur. Jam ſit.

## PROPOSITIO III.

§. 39. NUmerum anni labentis 1752 per alium numerum datum v. g. per 348. multiplicare beneficio harum *Tabularum Neperianarum*.

Primum *Tabellas* eas ſic diſpone ſuo ordine, ut *numerum multiplicandum* 1752 ſupernis characteribus exhibeant. His a ſiniſtris alteram *Tabulam indicis* in quadrata digeſtam appone; in hac tabula indice quære ultimum *multiplicatoris* 348 characterem dextimum nempe 8. & procedendo ad ultimam *Tabellam* dextimam, ſuperne 2 referentem, deprehendes in octavo ordine primum dextimum triangulum cum charactere 6, itaque 6 ſcribe infra lineam primo loco dextimo; poſt triangulum 6, occurrent in duobus proximis triangulis ſiniſtram verſus, *rhombum* componentibus, alii duo characteres nempe 1 & 0; hæc adde invicem, & 1 adſcribe ſecundo loco infra lineam. In proximo *rhombo* ſiniſtram verſus occurrent duo characteres nempe 4 & 6. hæc adde, fient 10; cyphram itaque tertio loco infra lineam depone, unitatem vero decadis pro ſequenti *rhombo* aſſerva. Porro ſequens *rhombus* refert duos characteres 5 & 8, hi ſimul additi, adjecta priori, quæ remanſit, unitate, efficiunt 14. Hæc itaque 14 infra lineam quarto loco adſcribe, habebiſque primi ordinis numerum 14016, qui æquivalebit 1752 × 8 ut examinanti patet.




Tranſi ad ſecundum characterem *multiplicatoris* nempe ad 4. ab hoc in *Tabula indicis* reperto, procede quarto ordine ad ultimam dextimam *Tabulam*, reperieſque in ultimo dextimo triangulo characterem 8, hunc ſecundo infra lineam ordine adſcribe, & quidem in loco *decadum*, quemadmodum dictum eſt (§. 34.) in proximo *rhombo* ſiniſtram verſus ſequitur unica cyphra, hanc 0 pone ſecundo loco; rurſus in ſequente *rhombo* ſequuntur duo characteres 2 & 8, hi additi efficiunt 10, cyphram igitur tertio loco adſcribe, & unitatem decadis reſerva proximo *rhombo*, in quo duo characteres poſiti ſunt 2 & 4, hi rurſum cum priori unitate ſimul additi efficiunt 7. Igitur

| | |
|---|---|
| 1752 | |
| 348 | |
| 14016 | |
| 7008 | |
| 5256 | |
| 609696 | *Summa.* |

tur 7 quarto loco adſcribe, & habebitur numerus 7008, qui æquivalet 1752 × 4.

Procedatur ad tertium *multiplicatoris* characterem, nempe ad 3, & inſtituta conſimili operatione prodibit ex triangulis, & rhombis *tabularum* hicce numerus 5256, cujus initium dextimum infra lineam fiat in loco centuriarum, eritque numerus 5256 = 1752 × 3. Itaque numeri 14016 + 7008. + 5256.. exprimentſummam numeri 1752 × 348 nempe 609696. *Quod erat faciendum.*

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

IN *Algebra* fit multiplicatio per ſimplicem literarum conjunctionem, nullo ſigno interpoſito, neque habetur ratio ordinis literarum; vel etiam per interpoſitum ſignum ×; ſic AB vel BA aut A × B ſignificat productum ex A in B, vel B in A; ita ut ſi A = 3, B = 4; A × B = 3 × 4 = 12. ſic BCD indicat tres quantitates B, C, D eſſe invicem multiplicatas, quemadmodum & AA indicat quantitem A eſſe multiplicatam per A, debetque toties adſcribi quantitas multiplicanda, quoties per ſemetipſam multiplicatur. v.g. A × A × A = AAA; ut tamen compendium operationi accedat, quantitas adſcribitur tantum ſemel, & ſupra eam a dextris collocatur numerus, qui ſignificet, quotnam vicibus multiplicatam illam quantitatem adſcriptam eſſe oporteret. Sic loco A × A × A ſcribitur $A^3$, & numerus 3 dicitur *exponens* quantitatis A (§. 99.) ita porro in aliis v.g. AA BB ſcribuntur $A^2 B^2$

Neque vero *exponentes* cum *coëfficientibus* (de quibus tertio capite adnotatum eſt) confundi debent; magna enim eſt diſtinctio inter $3\,A$, & $A^3$; Etenim ſit $A = 4$, erit $3\,A = 12$; & $A^3 = A \times A \times A = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Coëfficientes quippe notant, quoties eadem magnitudo ſibi adjuncta ſit; *exponentes* vero indicant, quoties quantitas aliqua per ſeipſam ſit multiplicata.

Productum quantitatis multiplicatæ per ſeipſam vocatur *potentia ſecunda*; ſic $A\,A$, vel $A^2$ eſt *ſecunda potentia* quantitatis $A$, aut *quadratum* quantitatis $A$ (§. 102.) Quodſi quantitas multiplicetur per ſuam ſecundam *potentiam*, provehetur ad ſuam tertiam *potentiam* v. g. $A \times A^2 = A^3$, quæ eſt tertia *potentia* quantitatis A ſeu *cubus*.

Tribus autem modis fit multiplicatio. Primo *cum termini poſitivi per poſitivos multiplicantur*, aut $+$ per $+$, & tum productum ſemper eſt $+$. Unde prima *regula*: *plus* per *plus* dat *plus*; v. g. multiplicatio $A\,B$ per $C\,D$ ſic ſcribitur: $A\,B \times C\,D$; aut $A\,B\,C\,D$. Item $+2\,A\,B \times 3\,C\,D = 6\,A\,B\,C\,D$.

Secundo, Cum terminus *poſitivus* per *negativum*, aut *negativus* per *poſitivum* multiplicatur, productum eſt affectum ſigno — *minus*. Hinc enata eſt altera Algebraicæ multiplicationis *regula*: *plus* per *minus*, aut *minus* per *plus* dat *minus*. v. g. Multiplicetur $-A$ per $+B$, productum erit $-A\,B$. Item $+3\,A \times -4\,B = -12\,A\,B$. aut $-3\,A \times +4\,B = -12\,A\,B$; nam primus multiplicator *negativus* $-4$ toties negat, ſeu tollit multiplicandum; & iterum multiplicator *poſitivus* $+4$ ſignificat, quod $-3$ quatuor vicibus repetere oporteat, ideoque productum erit — *minus*.

Tertio, Cum terminus *negativus* per alterum *negativum* multiplitiplicatur, erit productum affectum signo +. Atque inde orta est *tertia regula*: *minus* per *minus* dat *plus*. v. g. Multiplicando − A per − B, habetur productum + A.B. Item − 3 A × − 4 A = + 12 A; Cum enim multiplicator − 4 A sit terminus *negativus*, petit terminum multiplicandum − 3 A pariter negativum quater tolli; tollendo autem −, restituitur +: Igitur tollendo quater − 3 A scribetur + 3 A + 3 A + 3 A + A = + 12 A. Ideoque − × − = +.

# CAPUT VI.

## De Divisione simplici.

§. 40. D*ivisio* est *separatio unius numeri, nempe minoris a majori, toties repetita, quoties in majori minor continetur.*

§. 41. NUmerus novus, qui ope *Divisionis* invenitur, dicitur *Quotus*, in quo toties unitas continetur, quoties numerus minor continetur in majori, qui *Divisus est*.

§. 42. D*ivisio* sic peragitur: *Numerus dividendus* adscribitur, infra hunc recto ordine a sinistris ille, per quem fit Divisio seu *Divisor* adnotatur; tum inquiritur beneficio *Abaci Pythagorici*: quoties *Divisor* unius, vel plurium characterum in uno, vel pluribus characteribus *dividendæ summæ* contineatur. Hoc reperto, notetur *quotus* a dextris, & per *quotum Divisor* multiplicetur; summa ex multiplicatione proveniens, a dividendæ summæ primis characteribus, ad sinistram collocatis, subtrahatur. Quod remanet, supra *dividendum* adscribitur; *Divisor* vero infra *dividendum* denuo, & quidem uno loco ad dextram vicinius adscribatur. Iterum videatur: quoties *Divisor* in superiori *dividendo*, una cum illis numeris, qui ex subtractione priori remanserunt, contineatur? *Quotum* denuo priori ad dextram posito, adjunge; tum hunc *Divisorem* multiplica, multiplicatum a superiori subtrahe, & sic ulterius. Ubi bene advertendum est: *quotum* nunquam esse posse numero 9 majorem.

§. 43.

§. 43. QUoniam vero *proba* prioris ſpeciei nempe *multiplicationis* eſt *Diviſio*; juvat hic priora *multiplicationis* Problemata inverſo ordine producere, ut non tantum *Diviſionis* exempla afferantur in medium, ſed etiam probatio rite factæ *multiplicationis* exhibeatur.

## PROPOSITIO I.

§. 44. CUm *ſeptimana* communi gentium conſenſione 168 horas contineat, reſcire ope *diviſionis*: quotnam horarum una ſit dies?

Numerus major *dividendus* 168 adſcribatur; infra hunc a ſiniſtris adſcribatur *Diviſor* 7; dicaturque 7 intra 16 continetur bis, hanc *dualitatem* adſcribe poſt lineolam factam a dextris. Tum dic: bis 7 ſunt 14, ſubtractis 14 a 16 (§. 27.) remanent 2, hæc 2 notentur ſupra 6. Deleantur 16 & 7 per virgulas inflictas. Porro *Diviſorem* 7 transfer una ſtatione magis ad dextram, ut ſtet ſub charactere 8, & dic: 7 in 28 continentur quater; hunc numerum 4 ſcribe ad quotum priorem a dextris, & dic: quater 7 ſunt 28. 28 a 28 dum ſubtrahis, nihil remanet; Igitur ſunt 24 horæ unius diei.

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8} & 24 \\ \cancel{7}\cancel{7} & \end{array}$$

Quoniam itaque tam *unitates*, quam *decades*, & *centuriæ* &c. numeri *dividendi* per *Diviſorem* ſeparantur; ergo toties *Diviſor* in *dividendo* continetur, quoties *quotus* unitatem exprimit; ſicque operationis habetur demonſtratio. Proba autem *diviſionis* bene peractæ, eſt *multiplicatio*, de qua Capite mox ſuperiori.

## SCHOLION I.

§. 45. ACcurate explorari debet, quoties *Diviſor* in proportionatis numeris *ſummæ dividendæ* contineatur; non enim debet aut parcius, aut ſæpius *Diviſor* in *dividendum* aſſumi, quam conditio *dividendi* numeri ferat.

PRO-

## PROPOSITIO II.

§. 46. CUm 360 gradus, circa tellurem æqualiter diſpoſiti, 5400 milliaria germanica contineant; quæritur: quotnam unus gradus milliaria complectatur?

Primo numerum milliarium 5400, qui per 360 gradus dividendus eſt, adſcribatur; infra hunc ſcribatur *diviſor* nempe 360 gradus. Tum dicatur: 360 in 540, ſeu potius 3 in 5 tantum ſemel continentur; igitur unitas ad dextram extra lineolam pro quoto adſcribatur,

| | | |
|---|---|---|
| 180 | | |
| 5400 | 15 *milliaria* | |
| 360 | *unius gradus.* | |
| 360 | | |

dicaturque: ſemel 0 eſt 0, ſemel 6 ſunt 6, ſemel 3 ſunt 3. itaque ſubtrahe 360 a 540 (§. 27.) & remanebunt 180. Iterum promove *Diviſorem* 360 una ſtatione magis dextram verſus, & dic 3 in 18 hoc in caſu continentur quinquies. Numerum hunc 5 pone ad *quotum*, & multiplicando 360 cum 5, prodibit numerus 1800; his igitur a ſuperiori numero detractis nihil remanet; adeoque ſunt 15 milliaria unius gradus. Demonſtratio eſt pene eadem, quæ prior.

## SCHOLION II.

§. 47. QUod ſi ex ultimo numero *dividendo* minor aliquis numerus remaneat, quam ut Diviſor in eum duci poſſit, tunc occurrit *fractio*, quæ ſic exprimitur, ut minori numero, qui *Numerator* dicitur, major numerus nempe *Diviſor*, mediante lineola ſubjiciatur, qui numerus inferior dicitur *Denominator*.

## PROPOSITIO III.

§. 48. CAmpus quadrangularis æquilaterus habet perimetrum 896 pedum geometricorum; quæritur; quotnam pedes unum latus habere debeat?

*Diviſor* 4 infra Numerum *dividendum* 806 ſcriptus bis in eundem numerum dividendum ducatur. *Quotus* 2 a dextris collocetur. Promoveatur *Diviſor* 4 una ſtatione dextram verſus, & dicatur : 4 in o duci nequit ; igitur nullitatem ſeu cyphram pro *quoto* adſcribe. Promove rurſus diviſorem 4 infra 6, ac dic : 4 in 6 ſemel includuntur ; adſcribe ad *quotos* unitatem, tum 4 a 6 ſubtrahe , & remanebunt 2. His mediante lineola ſubnecte diviſorem 4 , habebisque numerum pedum geomet. unius lateris

| | |
|---|---|
| ~~806~~ | 201 |
| ~~444~~ | |
| $\frac{2}{4}$ | |

201 & $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$.

§. 49. Diviſio alio modo fit, & quidem maxime uſitato, & expedito. Dum nempe *Diviſor* extra lineam a ſiniſtris ponitur, *quotus* vero a dextris. Poſt multiplicationes ſingulas , & ſubtractiones , quod remanſit , infra *dividendum* ponitur , ſemperque unus character ex *dividendo* inferius dextram verſus ſubſtituitur, ut rurſus *Diviſor* in eum duci poſſit v. g. 8066 eſſent per 4 dividenda, prodibit *quotus* 2016 $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$.

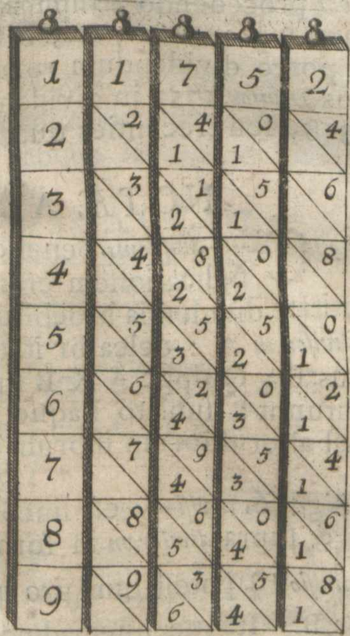
| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8066 | 2016 |
| | - 6 | |
| | 26 | |
| | $-\frac{2}{4}$ | |

# PROPOSITIO IV.

§. 50. NUmerum datum 609696 dividere per alium numerum datum, nempe per 1752, idque adhibitione *Tabularum Neperianarum.*

Primum eæ *Tabellæ* e cæteris deligantur, quæ, ſibi conjunctæ , exprimant in ſupernis characteribus numerum *diviſorem* 1752. His quatuor Tabellis *Tabulam* indicis (§. 38.) ſiniſtimam affige. Tum , conſiderando *Tabulas* juxta horizontalem

talem ordinem, exploretur: quænam series *triangulorum*, & *rhomborum*, incipiendo a dextris versus sinistram, sit æqualis aut proxime minor primis characteribus *numeri dividendi* 6096.., habita nempe ratione *divisoris* 1752, & deprehendetur in tertio ordine *Tabulæ indicis*, in ultimo quidem triangulo dextimo, primum character 6, in mox sequente *rhombo* character 5, in proximo rursus *rhombo* characteres 1 & 1, id est 2, ac tandem in ultimo *rhombo* characteres 2 & 3, id est 5; ita ut summa digesta hujus tertii ordinis sit 5256 proxime minor numero *dividendo* 6096, habito respectu ad *divisorem* 1752. Itaque numerus 3, *index* hujus ordinis ponetur pro primo *quoto* dextram versus; subtrahantur deinde 5256 a 6096 (§. 27.) & remanebunt 840. His adjunge numeri superioris *dividendi* proximum characterem 9, ut sint 8409, & rursus in *Tabulis* inquiratur in numerum, ex *triangulis*, & *rhombis* provenientem, proxime minorem numero hoc *dividendo*: deprehendeturque in quarto ordine, juxta mox insinuatam operationem, hicce numerus 7008; igitur numerum 4 *Tabulæ indicis* pro secundo *quoto* adscribe, hunc vero numerum 7008 a superiori 8409 subtrahe, & remanebunt 1401. Adjunge huic residuo ultimum numeri *dividendi* characterem 6, ut sint 14016, & inquisitione facta de proxime minori aut æquali numero *Tabularum*, reperies in octavo ordine *Tabulæ indicis*, a dextris nempe sinistrorsum per




| | | |
|---|---|---|
| 1752 | 609676 | 348 |
| | 5256·· | |
| | -8409· | |
| | 7008· | |
| | 14016 | |
| | 14016 | |

*rhombos* procedendo, ſummam 14016. Itaque adſcribes numerum 8 pro tertio *quoto*, & ſubtracto 14016 a ſuperiori 14016, nihil porro dividendum remanere deprehendes. Igitur Numerus *Diviſor* 1752 in dividendum 609696 ductus *quotum* præbet 348, ſeu trecenties quadragies octies in eo continetur.

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

§. 51. CUm *diviſionis* beneficio id diſſolvatur, quod per multiplicationem erat compoſitum, deleto *diviſore* ex quantitate dividenda habebitur *quotus* v. g. ſit dividendum AB per *diviſorem* A : deleatur itaque hic diviſor A, & habebitur quotus B; Quippe A & B ſunt duo factores, qui totum AB conſtituunt; ſublato itaque diviſore A, remanebit *quotus* B, qui eſt alter duorum illorum factorum.

Signum *diviſionis* eſt lineola ducta infra terminum *dividendum*, & ſupra *diviſorem* in forma fractionum; velut $\frac{12}{4} = 3$; Imo *diviſio* $\frac{12}{4}$ poteſt ſumi pro quoto 3. Sic $\frac{a}{b}$ eſt diviſio ipſius A per B. Itaque quemadmodum *diviſor* duntaxat omittitur, cum *dividendo* eædem ineſſe literæ deprehenduntur, quas habet *diviſor* : ita cum *dividendus* terminus nihil commune habet cum *diviſore*, tunc diviſio exprimitur : *dividendum* ſupra, *diviſorem* vero infra lineolam ponendo.

Sicubi quantitates dividendæ ſint, quibus adjuncti ſint numerì *coëfficientes*, illæ dividuntur, diviſione communi arithmetica (42.) Veluti ſit dividendus terminus 4 AB per 2 A; *quotus* ipſius numeri 4 eſt 2 : ipſius vero AB eſt B; A enim eſt *diviſor* : Igitur $\frac{4\,a\,b}{2\,a} = 2\,B$; ſicut $2B \times 2A = 4\,AB$. Per quod enim quantitas in *diviſione* reſolvitur, per hoc idem in *multiplicatione* reſtituitur.

Cæterum tres *regulæ* de ſignis + & — eundem locum in *diviſione* Algebraica habent, quem dictæ ſunt obtinere in *multipli-*

*tiplicatione capite præcedenti.* Sit igitur quantitas + 12 BCD dividenda per + 3D, fiat hoc modo:

$\frac{+12\,bcd}{+3\,d} = +4\,BC$. *Plus* quippe divisum per *plus* dat *plus*. Atque ut hujus veritatem advertas, multiplica *quotum* 4 BC per *divisorem* + 3D, & habebis factum + 12 BCD. *Multiplicatio* quippe est proba *divisionis*.

Iterum sit dividenda quantitas + 15 ACF per — 5AF, servetur secunda *regula* in *multiplicatione* tradita; erit enim *quotus* — 3C; etenim $\frac{+15\,acf}{-5\,af} = -3\,C$.

Rursus dividatur $-24\,A^2E^3F$ per divisorem $+3\,AEF$, erit divisor $-8\,AE^2$. $\frac{-24\,a^2e^3f}{+3\,aef} = -8\,AE^2$.

Quia nempe — divisum per + = —; & 24 divisum per 3 = 8; dividendo autem $A^2E^3F$, seu A A E E E F per AEF, quia literæ AEF, quas *divisor* cum *dividendo* communes habet, deleri debent, restabit utique *quotus* A E E, seu $AE^2$, aut conjunctim $-8\,AE^2$. *Proba* hujus habetur, si per *quotum* $-8\,AE^2$ *Divisor* $+3\,AEF$ multiplicetur; nam $+3\,AEF \times -8\,AE^2 = -24\,A^2E^3F$.

Denique dividendo quantitatem affectam signo —, per divisorem itidem affectum signo —, prodibit *factum*, affectum signo + juxta tertiam *regulam* in multiplicatione traditam: sic

$$\frac{-12\,a^3b^4c}{-4\,a^2b^3c} = +3\,AB.$$

Quod si numeri tantum, aut solæ literæ dividi possint, dividatur id, quod dividi exacte potest, reliqua permodum fractionis scribantur (§. 65.) Sic in divisione $\frac{8\,a\,b}{4\,c}$ *quotus* erit $\frac{2\,a\,b}{c}$. Si vero neque numeri, neque literæ dividi adæquate possint, redigantur omnia in fractionem v. g. dividere oporteat 5 AB per $-$ 4 C scribatur $\frac{5\,a\,b}{-\,4\,c}$.

Literæ ejusdem quantitatis, variis *exponentibus* affectæ, dividuntur *exponentium* sublatione, contentarum in *divisore* v. g. $\frac{a^4}{a^2} = A^{4-2} = A^2 . \frac{b^4 c^3}{b^2 c^2} = b^{4-2} c^{3-2}$

$= b^2 c.$

Ex quibus intelligitur, quod si quantitas per seipsam dividatur v. g. AB per AB, factum non sit o *nihil*, sed 1; supponitur quippe semper, quod ante omnes quantitates absolutas præcedat *coëfficiens* 1, & disparentibus cunctis in divisione literis, remanere debeat numerus; ita ut $\frac{ab}{ab} = \frac{1 \times ab}{1 \times ab} = \frac{1}{1} = 1$

# CAPUT VII.

## Resolvuntur quædam Problemata ope primarum quatuor simplicium specierum.

§. 52. SUnt & aliæ Propositiones, quæ per simplicem aliquam *specierum* fieri nequeant, sed in quibus duplicem diversam speciem adhibere est necessum. Sit

## PROPOSITIO I.

§. 53. SIt parens 37 annorum, habeatque prolem 9 annorum; quæritur jam, quotnam annos proles hæc su-

ſupervivere debeat, patre continuo vivente, ut medietatem paternæ ætatis attingat?

Primum itaque ſiniſtrorſum ponantur anni hujus prolis 9, dextrorſum vero anni parentis 37. Duplicentur anni prolis, & fient 18. Hi 18 anni ſubducantur ab annis paternis 37, & remanebunt 19. Itaque poſt 19 annos vitæ, proles aſſequetur dimidium ætatis paternæ; Etenim 9 × 19 efficiunt 28, & 37 × 19 efficiunt 56 annos, quorum medietas eſt 28.

| | |
|---|---|
| · 9 | 37 |
| · 2 | 18 |
| · 18 | 19 |
| · 19 | 19 |
| 28 + 28 = | 56 \| 2 |

9+19=28
37+19=56.

Nam ſubtractis duplicatis annis 9 nempe 18 a patris ætate 37, perſpicuum eſt, hos annos paternos 37 dupliciter eſſe majores, quam ſint anni prolis 9, & inſuper remanere 19; itaque interea temporis, quo proles hos 19 annos abſolvet, pater pariter alios 19 ſuperaddit ætati ſuæ: atqui bis 19 anni paterni ſunt rurſus alterum tantum 19 annorum prolis, ſicut antea: 18 anni fuerunt alterum tantum 9 annorum. Igitur his emenſis pater habet ætatem altero tanto majorem: ſeu proles habebit medietatem ætatis paternæ. Nam 18 + 19 + 19. ſeu 37 + 19 conſtituunt 56 ex parte ætatis paternæ: & 9 + 19 conſtituunt 28 ex parte prolis.

## PROPOSITIO II.

§. 54. Viator quiſpiam cavillando petit ex Arithmetico ſcire: quotnam milliaria ſpatio unius ſeptimanæ confecerit?

Arithmeticus igitur hujus ignarus jubeat viatorem, ſummam illam occultam milliarium, ſeptimanæ ſpatio a ſe peractorum, clam per 9 multiplicare, & *factum* proveniens dividere per 3. Denique *quotum* hac diviſione productum rurſum

ſum per 6 multiplicare. Hoc ultimum productum petat ſibi Arithmeticus a viatore manifeſtari, illudque per 18 dividat, *quotus* dabit numerum milliarium a Viatore ſpatio unius ſeptimanæ confectum. Sit v. g. occultus milliarium numerus

Nam $9 \times 6 = 54$. Et 54 per 3 dividendo habetur *quotus* 18; igitur per 18 ſumma tota dividi debet, ut occultus numerus 24 eliciatur.

24
9
3 | 216 | 72
–6 | 6
18 | 432 | 24 *Millia.*

§. 55. HÆc methodus ad alias res plurimas manifeſtandas adhiberi poteſt v. g. ad ætatem, ad nummos in clauſo ſacco contentos &c. v. g. haberet *Caius* 39 annos ætatis; jube eum itaque ignotos annos per 8 multiplicare, productum 312 per 4 dividere, & *quotum* 78 rurſus cum arbitrario quodam numero v. g. 9 multiplicare, habebitur factum 702. Hoc factum pete tibi manifeſtari, ac divide illud per 18. *Quotus* 39 dabit annos quæſitos.

39
8
4 | 312 | 78
9
18 | 702 | 39 *Anni.*
162

§. 56. QUod ſi voluiſſes numerum 78 loco 9 per 12. multiplicari, deberes occultam *diviſionem* aſſumere 24 loco 12; Nam ſicut $9 \times 8 = 72$; 72 autem diviſa per $4 = 18$: ita $12 \times 8 = 96$, & 96 diviſa per $4 = 24$.

## PROPOSITIO III.

§. 57. NUmerum magnum, etiam millenarios continentem, facili, & quidem ſola mentali operatione multiplicare.

Sit numerus 4264 per 25 multiplicandus v. g. quantum con-

conſtent 4264 modii tritici, ſi ſinguli modii 25 groſſis emuntur? Primum numerum multiplicandum 4264 mentaliter per 4 divide, habebis *quotum* 1066. Huic *quoto* adjice duas cyphras ut ſint 106600, & habebis numerum groſſorum, quo 4264 modii æſtimantur; haud aliter, ac ſi numerum 4264 prolixa operatione per 25 multiplicaſſes. Numerum groſſorum 106600 redige in florenos, idque vel dividendo per 20 (§. 41.), vel delendo duntaxat ultimam cyphram, & alia dividendo per 2. proditque florenorum numerus 5330, quibus 4264 modii appretiantur.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 4264 | 10660 \| 0 |
| | ‾26 | 5330 fl. |
| | ‾24 | |
| | — | |

§. 58. QUodſi diviſione peracta, unitas remaneret, tum loco duarum cyphrarum adjice *quoto* 25; ſi duo remaneant, adjice eidem 50; ſi denique tria remaneant, adjice 75. v. g. velis 763 per 25 multiplicare, operare ſic:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 763 | 19075. |
| | 36 | |
| | $-\frac{3}{4}$ | |

Numerus 19075 erit multiplicationis productum; nam per adjectas duas cyphras denotantur centum, cujus $25 = \frac{1}{4}$ $50 = \frac{1}{2}$, & $75 = \frac{3}{4}$.

## CAPUT VIII.

### De Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Diviſione in compoſitis.

§. 59. *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio* in compoſitis ſunt, quæ diverſæ ſpeciei numeros, pro ſua quosque ratione aut addunt, aut ab invicem ſubtrahunt, aut multiplicant, aut dividunt.

Eædem ſunt prope regulæ, & demonſtrationes ſpecie-

 rum

rum compoſitarum, quæ ſunt ſimplicium, quibusdam paucis obſervatis, quæ ex ſequentibus Problematis illuceſcent.

## PROPOSITIO I.

§. 60. COgnoſcere ope *Additionis compoſitæ* ſummam duorum debitorum, quorum primus A 236 fl. 49 cr. 2 den. alter vero B 101 fl. 35 cr. 3 den. teneatur.

| | fl. | | cr. | | den. |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 236 | — | 49 | — | 2. |
| B | 101 | — | 35 | — | 3. |
| | 338 | — | 25 | — | 1 |

Debitis duobus ſuo ordine rite collocatis, fiat initium a ſiniſtris, nempe a minima ſorte, dicaturque: 3 & 2 denarii ſunt 5; quia autem 4 denarii cruciferum efficiunt, igitur tantum 1 denarium adſcribe, cruciferum autem, ex 4 demptis denariis obvenientem, pro ordine cruciferorum adſerva. Tum ſiniſtram verſus procedendo adde juxta (§. 24.) 35 & 49 cruciferos, adjectoque uno prodibit numerus 85; quia vero 85 cruciferi florenum excedunt, ideo divide hos 85 cruciferos per 60, & prodibit unus florenus, remanentibus 25 cruciferis, quos ordini cruciferorum adſcribe; florenum autem acceſſorium ſerva pro ultimo ordine, & dic juxta (§. 24.) $1 + 101 + 236 = 338$. Igitur utriusque debitum eſt 338 fl. 25 cr. 1 den.

Proba *Additionis* in compoſitis rite peractæ, fit per *ſubtractionem compoſitam*, cujus ſpecimen prioris exempli inverſo modo poſiti mox ſubſequetur.

## PROPOSITIO II.

§. 61. SIt duorum debitorum ſumma 338 fl. 25 cr. 1 den. Primus debitor A ex hac ſumma teneatur 236 fl. 49 cr. 2 den. quæritur: quantum ſecundus debitor B teneatur?

Ad-

Adſcripta ſumma utriusque debiti, ſubjunge apto ordine debitum primi A, & initium ſubtractionis faciendo a primo numero dextimo (§. 28.) dic: 2 denarios ab uno demere nequeo, igitur accommodo cruciferum, facioque punctulum ad ſequentem numerum 9. Accommodatum cruciſerum reſolve in 4 denarios, adjectoque uno, erunt denarii 5. Jam dic: duobus denariis demptis a 5 remanent 3. Hos 3 denarios colloca in denariorum ordine infra lineam, ac procede ulterius ſiniſtram verſus; ſubtrahe 50 (49 enim cum punctulo cruciferum accommodatum notante faciunt 50) a 25·, quod cum rurſus fieri nequeat, hinc denuo florenum, ſeu 60 kr. accommodare eſt neceſſum, eruntque cruciferi ſuperiores 85. ab his ſubtrahe 49, & remanebunt 36, quos ſuo ordine adſcribe. Tranſi ad florenos, & demendo 237 (punctulum quippe ad 6 poſitum notat accomodatum florenum) a 338, remanebunt 101. Igitur debitum alterius B eſt 101 fl. 35 crucif. 3 den.

| fl. | | kr. | | den. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 338 | — | 25 | — | 1 | *ſumma utriusque.* |
| 236. | — | 49. | — | 2 | *debitum* A. |
| 101 | — | 35 | — | 3 | *debitum* B. |

Proba hujus eſt *Additio* antecédens.

## PROPOSITIO III.

§. 62. Annus ſolaris decurrit intra 365 dies, 5 horas, & 49 minuta fere; quæritur: quotnam diebus, horis, & minutis conſtabit triennium?

| *dies* | | *horæ* | | *minuta.* | |
|---|---|---|---|---|---|
| 365 | — | 5 | — | 49 | |
| | | | | 3 | |
| 1095 | — | 17 | — | 27 | *tempus triennii.* |

Hoc fit per *Multiplicationem in compoſitis*. Ponatur numerus multiplicandus ordine ſuarum ſibi ſuccedentium ſpecierum, ultimo numero minimæ ſortis dextrorſum poſito ſubjunge *multiplicatorem* 3, atque per hunc multiplicare incipeſ ſuperiorem (§. 32.) prodibitque minutornm numerus 147; quia autem hic minutorum numerus horam jam excedit, igitur huncce numerum 147 divide per 60 (tot enim minuta in una hora continentur) & provenient 2 horæ 27 minuta. Minuta ſuo ordine adſcribe, horas pro ſequenti horarum ordine reſerva; tum multiplica 5 horas per 3, eruntque horæ 15, & adjectis duabus illis horis, quæ diviſione priorum minutorum prodiverunt, erunt horæ 17. Has rurſus ſuo ordine adſcribe. Demum dies 365 per 3 multiplica, factum dabit dies 1095; ita ut tempus triennii ſit dierum 1095, horarum 17, minutorum 27.

Proba *Multiplicationis compoſitæ* fit per *Diviſionem compoſitam* de qua mox.

## PROPOSITIO IV.

§. 63. REſcire ope *Diviſionis compoſitæ*: quodnam tempus unius anni ſolaris eſſe debeat, ſi triennium 1095 dies, horas 17, minuta 27 complectitur?

| *dies* | | *horæ* | | *miuuta.* | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1095 | 365 | 17 | 5 | 27 | |
| 3 | | 3 | | 120 | |
| | | 2 | | 147 | 49. |
| | | 60 | | 3 | |
| | | 120 | | | |

Ponatur triennii tempus juxta exigentiam ſuarum partium ſibi ſuccedentium. Tum incipiatur a ſiniſtris *Diviſio* per 3 (§. 41.) prodibuntque 365 dies. Progredere dextram verſus ad numerum 17 dividendum per 3, & prodibunt 5 horæ; remanebit autem fractio ſeu numerus 2, hunc multiplica per 60 (hora enim una habet 60 minuta) & prodibunt 120. His adde ex tertia ſtatione 27 minuta, & erunt univerſim 147. Divide ea tandem per 3, eritque factum 49, ita ut Annus ſolaris 365 dies, 5 horas, 49 minuta habere intelligatur.

Proba hujus eſt *multiplicat.o.* Ali-

Aliter divisio hujus problematis fit, modo (§. 49.) insinuato.

| | *dies* | | *horæ* | | *minuta.* |
|---|---|---|---|---|---|
| Divisor 3) | 1095 | — | 17 | — | 27 |
| | 365 | — | 5 | — | 49. |

# CAPUT IX.

## De Fractionibus Numerorum.

§. 64. FRactio est, *quæ unam aut plures partes totius, in plures partes divisi, repræsentat.*

§. 65. FRactio semper duplicato ordine numerorum scribitur cum interjecta lineola; numerus autem superior dicitur *Numerator*; numerus vero inferior *Denominator* v. g. $\frac{3}{4}$ hæc fractio repræsentat 3 partes alicujus totius, in 4 partes divisi. $\frac{7}{9}$ Repræsentat 7 partes alicujus totius, in 9 partes distributi, & sic porro. Potest autem omne quodque totum in plurimas, millesimas insensibilesque partes ita dispesci, ut solo intellectu, & cogitatione eas deprehendere liceat.

§. 66. FRactionis magnitudo colligitur ex ratione *numeratoris* ad *denominatorem*; hinc quo sæpius *numerator* in *denominatore* continetur, hoc *fractio* est *minor*, atque ob hanc causam minor fractio est $\frac{6}{31}$ quam $\frac{3}{4}$. Rursum $\frac{1}{4}$ minor fractio, quam $\frac{1}{2}$. Porro hac eadem de causa contingit, quod *fractio*, in parvis numeris exhibita, eadem sit, & æqualis alteri in magnis numeris comprehensæ; sic fractio ejusdem rationis, & æqualis est: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{30}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{37}{74}$ &c. Ejusdem etiam rationis sunt $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{36}{45}$, $\frac{52}{65}$ &c. quia nempe toties *Numerator* in unius *denominatore* continetur, quoties alter *numerator* in *denominatore* alterius. Hinc ut *fractio* aliqua reducatur, & *minor* quidem sit, ejusdem tamen valoris; oportet numero quodam minore, & *numeratorem*, &

& *denominatorem* ſic dividi poſſe, ut nihil ex utroque remaneat.

## PROPOSITIO I.

§. 67. **F***Ractiones* has: $\frac{15}{36}$, $\frac{24}{52}$, $\frac{35}{49}$ ad minores fractiones reducere.

*Primæ fractionis* tam *numerator*, quam *denominator* per 3 dividantur, & patebit idem eſſe $\frac{15}{36}$ ac $\frac{5}{12}$ (§. 66.). In *ſecunda* fiat diviſio per 4, & erit $\frac{24}{52}$ idem, quod $\frac{6}{13}$, In *tertia* fiat diviſio per 7, & $\frac{35}{49}$ erit fractio æqualis cum $\frac{5}{7}$. Quæ omnia demonſtrantur per axioma (§. 13.)

§. 68. **Q**Uod ſi autem numerus reperiri nequeat, quo adæquate, & *numerator*, & *denominator* dividi poſſit; ſeu ſi *numerator*, & *denominator rationales* non ſint, tum fractio illa ad minorem redigi non poterit v. g. $\frac{6}{81}$.

## PROPOSITIO II.

§. 69. **S**I numeri *rationales* per eundem numerum v. g. ſi 3, & 9 multiplicentur per 2, *factorum* erit eadem ratio adinvicem (§. 100, & 106.) quæ fuit numerorum datorum; prodibunt quippe 6, & 18.

Nam ſicut ſe habet 1 ad 3, ita ſe habent 2 ad 6. *Item* ſicut ſe habent 3 ad 9. ita 4 ad 12, 5 ad 15. Igitur, & 3 ſic ſe habent ad 9, ſicut 6 ad 18 (§. 13.).

§. 70. **D**Uas diverſorum *denominatorum* fractiones ſolemus ad tertium aliquem æqualem *denominatorem* revocare, cum *numerator* utriusque multiplicatur per *denominatorem* alterius; *denominatores* autem multiplicantur inter ſe. Proveniens ex multiplicatione *numeratoris* cum *denominatore* numerus, erit *numerator novus*, ille vero, qui ex multiplicatione *denominatorum* mutua provenit, erit *novus denominator*. Quod ſi vero animus

mus sit, plures quam duas discrepantes fractiones reducere ad eundem *denominatorem*, tum *denominatores* primum omnes inter se multiplicentur, atque *factum* inde proveniens, erit singularum fractionum *novus denominator*; *Numerator* vero *novus* cujusque fractionis singillatim habebitur, si *novus denominator* per priorem *numeratorem* multiplicetur, & proveniens inde numerus per denominatorem priorem rursus dividatur. Facta divisione *quotus* erit novæ fractionis *numerator*. Atque ita necessum esse perspicitur; ubi *novus denominator* est, etiam *novum numeratorem* esse oportere.

## PROPOSITIO III.

§. 71. Duas has *fractiones* $\frac{1}{4}$, & $\frac{2}{3}$ fl. ad eundem *denominatorem* reducere.

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & \times & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{3}{12} & & \frac{8}{12} \end{array}$$

Ponantur ambæ *fractiones*, se mutuo respicientes. *Numerator* 1 multiplicetur decussatim cum *denominatore* alterius 3, & 3 ponantur infra denominatorem 1. eritque hic character 3 *novus numerator*. Mox multiplicetur alter *numerator* 2 decussatim per *denominatorem* alterius 4, & factum 8, exinde proveniens, ponatur infra *numeratorem* 2, eritque pariter novus *numerator*. Tandem multiplicentur *denominatores* ambo inter se, nempe 4, & 3, & *factum* prodiens 12 erit utriusque *novus denominator*, ita ut $\frac{1}{4}$ totidem sit ac $\frac{3}{12}$, & $\frac{2}{3}$ tolidem ac $\frac{8}{12}$ (§. 66.) Sic reductæ *fractiones* facile insimul addi possunt; tres enim, & octo duodecimæ partes si addantur, erunt $\frac{11}{12}$. Jam concipiatur florenus habere 12 partes, ex quibus 11 habeas, quæ 11 partes efficiunt 55 cruciferos; Quia nempe si 55 per 5 dividantur, *quotus* erit 11; si vero 60 per 5 dividantur, *quotus* erit 12, qui est totus florenus; Igitur $\frac{1}{4}$, & $\frac{2}{3}$ floreni continent 55 cruciferos.

Quomodo autem una *fractio* ab altera inverso modo subtrahi possit, pronum est cuivis assequi (§. 28.) Fra-

Fractionem Fractionis, vel etiam plures fractiones fractionum ad unam reducere fractionem.

Numeratores insimul multiplicentur, primus cum secundo, hujus productum cum tertio, & sic porro. Idem fiat cum denominatoribus. Utrumque productum ceu una fractio conjungatur, & habebitur quæsitum. v. g. Habeas tres quartas seu $\frac{3}{4}$ duarum tertiarum $\frac{2}{3}$ unius floreni, habebis medium florenum seu 30 cr.

## PROPOSITIO IV.

§. 72. Has fractiones $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$ ad eundem *denominatorem* reducere.

Omnes tres *denominatores* insimul multiplicentur, prodibit *factum* 616. hic numerus erit novus omnium trium *fractionum* denominator. *Primæ* vero *fractionis* ut reperiatur *novus numerator*, multiplica 616 per 3, & *factum* divide per 8, *quotus* proveniens erit 231; itaque erit $\frac{3}{8} = \frac{231}{616}$. *Secundam fractionem* quod attinet, rursus multiplica 616 per 5, & *factum* divide per 7, prodibitque quotus 440. Hic erit *numerator* secundæ fractionis, & erunt $\frac{5}{7} = \frac{440}{616}$. In *tertia fractione* eodem modo operare: multiplica 616 per 6, *factum* divide per 11, eritque *quotus* seu *novus numerator* 336, adeoque $\frac{6}{11} = \frac{336}{616}$. Qui omnes *numeratores* novarum fractionum si sibi addantur, atque per *novum denominatorem* dividantur, prodibit 1 totum, & $\frac{391}{616}$.

$$\frac{3}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{11}$$

$$\frac{231}{616} \quad \frac{440}{616} \quad \frac{356}{616}.$$

Nam *novus denominator*, priorum *denominatorum* multiplicatione factus, omnes priores *denominatores* complectitur, tanquam partes; atqui exinde sciri potest beneficio *divisionis*, quantum valeat $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$: ergo accedente multiplicatione *numeratorum* pariter innotescit: quid contineat ex novo illo *denominatore* $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{11}$. *Quod erat demonstrandum.* §. 73.

§. 73. *Multiplicatio fractionum* ſic fit : *Numeratores* fractionum multiplicantur invicem, uti & *denominatores*; quod ſi *numerator novus* major ſit, quam denominator, dividatur *numerator* per *denominatorem*. Sit Problema

## PROPOSITIO V.

§. 74. Reſcire, quotnam florenos cæſareos valeant 236 aurei Hollandici, ſi cujuslibet aurei Hollandici pretium eſt $4\frac{1}{8}$ fl. ſeu 4 fl. $7\frac{1}{2}$ Crucif.

Scribatur primo a ſiniſtris pretium unius aurei $4\frac{1}{8}$ fl.; hoc vero pretium reſolvatur per *denominatorem*, & erunt $\frac{33}{8}$. a dextris ponantur aurei in hac fractione $\frac{236}{1}$. Multiplicentur *denominatores* invicem, uti & *numeratores*. Factum ex *numeratorum* multiplicatione prodibit 7788; hoc dividatur per *denominatorem* 8, & erit *quotus* $973\frac{4}{8}$ ſeu $\frac{1}{2}$; ita ut 236 aurei Hollandici æquipolleant 973 florenis cæſareis, & 30 Crucif.

$$4\tfrac{1}{8}$$
$$\frac{33}{8} \;—\; \frac{236}{1}$$
$$7788 \;\Big|\; 973\tfrac{4}{8},\ \text{ſeu}\ \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{4}{8}$$

§. 75. *Diviſio fractionum*, quando nempe indagatur: quoties una fractio in altera contineatur, hac ratione peragi ſolet: *fractio*, per quam diviſio fieri debet, ordine inverſo ponitur, ut *numerator* in *denominatoris*, & *denominator* in numeratoris loco ſit. Quo facto multiplicantur invicem duo ſuperiores numeri, atque etiam duo inferiores: Quod ſi vero *tota quædam* adjuncta ſint fractionibus, hæc in *denominatorem* ducuntur, neque neceſſum eſt ordinem variari.

## PROPOSITIO VI.

§. 76. Ope divisionis rescire: quoties $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$ contineatur? Adscribatur fractio dividens $\frac{2}{3}$ inverso modo nempe $\frac{3}{2}$, & ex dextra parte $\frac{4}{5}$. multiplicentur *numeratores* ad invicem, atque etiam denominatores, prodibunt $\frac{12}{10}$. *Numerator* per *denominatorem* dividitur, & provenit 1 totum & $\frac{2}{10}$, seu $\frac{1}{5}$.

$$\frac{3}{2} \;—\; \frac{4}{5}$$
$$10 \;.\;.\; \left|\begin{matrix}12\\ \frac{2}{10}\end{matrix}\right| \quad 1\tfrac{2}{10} \text{ vel } \tfrac{1}{5}.$$

## PROPOSITIO VII.

§. 77. Si quis habeat $2\frac{4}{9}$ Centenarios plumbi, velitque ex eis globos sclopetarios formare; dum plumbum super igne liquat, deperditur ex eo $\frac{1}{8}$ Centenarii. Quæritur: quotnam ex residuo plumbo globos formare queat, ut tamen singuli globi $\frac{2}{7}$ libræ appendant?

Primo $2\frac{4}{9}$ centenarii resolvantur in libras, prodibuntque $244\frac{4}{9}$ libræ (unus enim Centenarius continet 100 libras) Rursus $\frac{1}{8}$ Cent. resolvatur in libras, & prodibunt $12\frac{1}{2}$ libræ. Uterque librarum numerus resolvatur cum suæ *fractionis denominatore* per multiplicationem, & prodibunt ex sinistimo $\frac{25}{2}$, ex dextimo autem $\frac{2200}{9}$. Jam ut ad eosdem *denominatores* utraque fractio reducatur, multiplica utrumque *numeratorem* per *denominatorem* alterius, & prodibit sinistimus *novus numerator* 225; dextimus vero 4400;

$\frac{1}{8}$ Cent. — $2\frac{4}{9}$ Cent.

$12\frac{1}{2}$ libræ — $244\frac{4}{9}$ libræ

$$\frac{25}{2} \times \frac{2200}{9}$$

$$\frac{225}{18} \qquad \frac{4400}{18}$$

$$\begin{array}{r}4400\\ 225\\ \hline 4175\\ \hline 18\end{array}$$

$$\frac{2}{7} \times \frac{4175}{18}$$

$$36 \;\left|\; 29225 \;\right|\; 811\,\frac{29}{36} \text{ globi}$$

$$\frac{29}{36}$$

4400 ; novus demum *denominator* ex multiplicatione utriusque inter se, nempe 18. Nunc minor *numerator* 225 nempe $\frac{1}{8}$ Centenarii, quæ deperdita est, subtrahitur a majori 4400, & remanebunt 4175. Porro hanc fractionem $\frac{4175}{18}$ reduc ad eundem *denominatorem* cum pondere unius globi sclopetarii nempe cum $\frac{2}{7}$ libræ, & decussatim multiplicando *numeratores* cum *denominatoribus* prodibit novus *numerator* sinistimus 36, dextimus vero 29225. Divide rursus dextimum *numeratorem* per sinistimum, & prodibit factum $811\frac{29}{36}$. Tot nempe globi sclopetarii, quorum quilibet $\frac{2}{7}$ libras appendit, formari ex illo liquato plumbo poterunt. Fractio vero denotat globum minoris ponderis quam $\frac{2}{7}$ libræ.

# CAPUT X.

## De Regula Trium, & Proportione Numerorum.

§. 78. *Regula Trium*, quæ & *aurea* vocatur, docet *ex datis tribus numeris proportionalibus in cognitionem quarti itidem proportionalis devenire.*

Respicit itaque *Regula Trium* proportionem, quod nempe quartus numerus, qui quæritur, talem proportionem ad tertium habere debeat, qualem habet secundus ad primum.

§. 79. *Regula Trium* ita peragitur : duo numeri, quorum nota est ad invicem *proportio*, adscribuntur, incipiendo a sinistris, ut virgula sit inter utrumque interjecta : post secundum, mediante pariter virgula, adscribitur tertius, cujus numerus *proportionalis* quæritur, qui eodem modo se habeat ad *tertium*, sicut *secundus* ad *primum* ; Tum vero *tertius* numerus multiplicatur per *secundum*, ac *productum* dividitur per numerum *primum*. *Quotus*, inde qui provenit, exprimit *quartum* numerum quæsitum, qui talem proportionem ad *tertium* habet, qualem *secundus* ad primum.

Notæ, quibus proportio exprimitur, aſſumuntur hæ, nempe 3 . 6 : : 4 . 8 . Vel in literis. a . b : : c . d . Id eſt : ſic ſe habet 3 ad 6, ſicut 4 ad 8. vel : ſic ſe habet a ad b, ſicut c ad d.

## PROPOSITIO I.

§. 80. RЕſcire : quantum mercedis perciperent indies 28 operarii, ſi ſeptem operariis diurna ſolutio obtingit 11 fl.

Primum dicatur : 7 Operarii habent 11 florenos mercedis diurnæ, quantum habebunt 28 operarii, æquali mercede perſoluti ? hoc adſcribatur uti (§. 79) præceptum eſt.

| Operarii | fl. | Operarii. |
|---|---|---|
| 7 --- | 11 | --- 28 |
| . | 28 | |
| . | 308 | 44 fl. |
| . . | | |

Multiplicentur 28 per 11, *factum* erit 308, hoc dividatur per 7, & prodibit quotus 44 floreni, ſeu merces 28 operariorum diurna, atque hi 44 floreni talem exprimeut *proportionem* ad 28 operarios, qualem 11 floreni ad 7 operarios.

Nam *ſecunda poſitio* nempe 11 exhibet æqualem 7 operariorum ſolutionem ; ergo & *quartus* numerus exhibere debet æqualem 28 operariorum ſolutionem. Dum multiplicantur 28 per 11, prodit numerus 308, id eſt : quod ſinguli operariorum perciperent indies 11 florenos (§. 32.) Hæc autem cum *proportio* nulla ſit ad 7 operarios, percipientes indies 11 florenos, ideo fit *proportio*, & non uni, ſed ſeptenis dicuntur indies 11 floreni æqua diſtributione obvenire, dividiturque ſumma 308 per 7, quod demonſtrat numerum *proportionalem* ad 28 (§. 41), & *factum* 44 toties continet 28, quoties 11 complectuntur 7.

§. 81.

§. 81. PRoba fit passim *inversione* positionum, dicendo v. g. 28 operarii percipiunt 44 florenos, quotnam percipient 7 operarii? facta operatione (§.79). prodibit denuo numerus 11.

§. 82. DUm compositæ species, vel fractiones in *Regulam Trium* incurrunt v. g. 7. operarii percipiunt 11. fl. 15. crucif. aut 7 operarii percipiunt $11\frac{1}{4}$ fl. quotnam percipient 28 operarii æqua distributione? tunc necessum est, *secundæ positionis* florenos, aut in meros cruciferos, aut in meras quartas partes resolvi. Hoc *productum* si per *tertiam positionem* juxta §. 79. multiplicatum fuerit, & *factum* proveniens rursus per *primam positionem* divisum, prodibit *quotus*, qui denuo vel per cruciferos 60, vel per *quartas partes* dividi debet, ut floreni, merces diurna 28 operariorum, inveniantur.

§. 83. *REgula Trium* passim adhiberi solet ad cognoscendas fractiones, v. g. ad cognoscendum valorem $\frac{4}{9}$ fl. dico: 9 sunt 1 fl. seu 60 Cruciferi, quot erunt 4? Juxta leges (§. 79) procedendo, provenit numerus $26\frac{2}{3}$ Cr.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \text{Cr.} \\
9 \text{ --- } 60 \text{ --- } 4 \\
\qquad\quad 4 \\
\hline
\quad 240 \quad | \; 26\frac{6}{9} \text{ vel } \frac{2}{3} \text{ Crucif.} \\
\; -60 \\
\quad\;\; \frac{6}{9}
\end{array}
$$

§. 84. ALius quoque modus est percommodus, *Regulam Trium* præsertim in compositis practice instituendi. Sit

## PROPOSITIO II.

DUæ libræ aromatum valeant 8. fl. 12 grossos, quid constabunt 16 libræ 12 lotones?

 Pri-

| *libræ* | *flor.* | *groſſi* | | *libræ* | *lot.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 12 | | 16 | 12 |
| | 4 | 6 | | | 8 ſeu $\frac{1}{4}$ |
| | 4 | 16 | | | 4 hujus $\frac{1}{2}$ |
| | 64 | | | | |
| | 68 | 16 | Cr. | | |
| $\frac{1}{4}$ …… | 1 | 1 | $1\frac{1}{2}$ | | 8 loton. |
| $\frac{1}{8}$ …… | // | 10 | $2\frac{1}{4}$ | | 4 lot. |
| | 70 | 8 | $\frac{3}{4}$ | | |

Primum 8 floreni, & 12 groſſi per 2 libras dividantur, & erit *productum* 4 fl. 6 groſſi pretium nempe unius libræ. Hoc multiplicetur per 16. 6 groſſi quidem decies ſexies multiplicati, efficiunt 4 fl. 16 groſſos: 4 floreni autem toties multiplicati efficiunt 64 florenos. Jam ad valorem 12 lotonum deveniendo: pretium unius libræ nempe 4 fl. 6 groſſos divide per 4. & habebis productum 1 fl. 1 groſſum $1\frac{1}{2}$ Cr. pretium 8 lotonum, ſeu quadrantis unius libræ; quia autem ad numerum 12 lotonum adhuc 4 lotones deficiunt, igitur divide rurſus 1 fl. 1 groſſum $1\frac{1}{2}$ Cr. per 2, & erit productum 10 groſſi $2\frac{1}{4}$ Cr. pretium 4 lotonum. Quæ omnia, ſi addita ſibi fuerint, prodibit pretium 16 librarum, & 12 lotonum, nempe 70 floreni 8 groſſi $\frac{3}{4}$ Cr. ſeu 3 denarii. Et hæc operandi ratio vel ideo perjucunda videri debet, quod ſtatim ſimul oculis ſubjiciatur; quid 1 libra, quid quadrans libræ, ſeu 8 lotones, quid 4 lotones conſtent?

§. 85. PRæter *Regulam Trium directam*, nunc expoſitam, habetur etiam alia *Regula Trium inverſa.* Hujus *Regulæ inverſæ* talis eſt poſitio, ut *terminus tertius* ponatur *primo loco*, & *primus terminus* loco tertio; tum duo *priores* termini invicem multiplicantur, *factumque* inde proveniens dividitur per ultimum. *Quotus* manifeſtabit numerum quæſitum.

§. 86. QUoniam vero tyrones ſæpe hærent ad propoſitionem datam, neſcientes: an Regula directa, an *inverſa* utendum ſit? igitur ſequenti ſe obſervatione communire eſt opus: Quotieſcunque ex ipſa quæſtionis natura accidit, ut quanto major terminus *tertius* eſt *primo*, tanto minor

pro-

prodire debeat terminus *quartus secundo*, vel viciſſim : quo minor term nus *tertius* eſt *primo*, tanto major terminus *quartus* prodire debeat *ſecundo*, toties adhibenda eſt Regula *proportionum inverſa* ; cum alias in *directa* regula proportionum, quanto major eſt terminus *tertius* primo, tanto quoque terminus *quartus* eſſe major debeat *ſecundo* ; aut : quanto minor terminus *tertius* eſt *primo*, tanto minor provenire debeat terminus *quartus*, quam ſit *ſecundus* juxta *Propoſit.* 14. *Euclidis lib. V.* Sit

## PROPOSITIO III.

§. 87. SI 63 murarii ædificium intra 105 dies abſolverunt, quotnam diebus laboraſſent, æquali contentione uſi, ſi fuiſſent tantummodo 15 Operarii ?

Dicatur primum : 63 operarii laborarunt 105 dies, quot diebus 15 operarii opus perfeciſſent ? debent autem hæ tres poſitiones ita conſiderari, quaſi vero inquireretur in proportionalem, *ad terminum*. 63. Hoc adſcripto, multiplicentur 105 per 63 juxta (§. 85.) *factum* dividatur per 15, & *quotus* proveniens ſignificabit dies 441, quibus 15 operarii ædificium compleſſent. Quæ eſt *proportio inverſa*, ut nempe numerus *primus* inventus tanto major ſit *tertio* nempe 105, quanto proportionaliter *ſecundus* 63 major eſt quarto 15. *Quod erat inquirendum.*

| *Operarii* | *dies* | *Operarii.* |
|---|---|---|
| 63 --- | 105 --- | 15 |
| 15 . . . . | . 63 | 63 |
| 15 \| | 6615 \| | 441 dies |
| | 61 | |
| | 15 | |

## NOTÆ ALGEBRAICÆ.

PRoblemata ejuſcemodi, ad *Regulam Proportionis* pertinentia percommode in Algebra ſolvuntur beneficio *æquationum*. Eſt autem *æquatio*, *duarum quantitatum comparatio*, *quæ ſigno æqualitatis* $=$ *conjunguntur*. Veluti : *Interrogatus quiſpiam, quanam hora antemo-*

*meridiana lycæum accedere soleat? Respondet: ea hora, ad quam horæ a duodecima noctis elapsæ se habent ad horas usque ad meridiem residuas, ut 5 ad 1. Quæritur: quænam sit illa hora?* Dicuntur autem horæ illæ incognitæ, a media nocte elapsæ X, & horæ a media nocte usque ad meridiem = 12; Horæ autem incognitæ X. a media nocte elapsæ, habent se ad horas 12 nempe usque ad meridiem — X, sicut 5 ad 1. Jam in Proportione *Geometrica* factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis (§. 107.) Igitur 1 X = 60 — 5 X; Rursus quia 1 X = 60 — 5 X, igitur etiam 6 X = 60: Igitur 1 X = 10.

$$X . 12 - X : : 5 . 1$$
$$1X = 60 - 5X$$
$$6X = 60$$
$$X = \frac{60}{6} = 10.$$

Igitur hora decima matutina accedere ad lycæum solet. Aut in terminis generalibus, prout dictum in notis *Capitis Primi*

$$X . A - X : : M : N$$
$$NX = MA - MX$$
$$NX + MX = MA$$
$$X = \frac{ma}{m+n}$$

Alia præterea problemata Algebraicis æquationibus expediuntur, quæ alias resolvi nequeunt per regulam simplicem *proportionis*, veluti: *Eques 100 passibus distans a cursore, cursorem insequitur ea velocitate, quæ se habeat ad velocitatem cursoris ut 7 ad 6. Quæritur: post quodnam spatium Eques ille sit cursorem assecuturus?* Distantia cognita 100 passuum vocetur A, spatium, quod interea absolvit cursor, vocetur X

$$A + X . X : : 7 . 6$$
$$6A + 6X = 7X.$$
$$7X = 6X - 6A$$
$$X = \frac{6a}{7-6}$$

Ideo-

Ideoque eques ille assequetur cursorem post 700 passus; Nam $X = 600$, & $A = 100$: Igitur $A + X = 700$.

Est enim *æquatio: Expressio ejusdem valoris sub nomine diverso*; veluti cum dico 48 divisa per 6 dant 8. Hæc propositio in æquatione sic exprimitur $\frac{48}{6} = 8$; ubi apparet *æquationem* exprimi mediante signo $=$ inter duos valores æquales, diversis tamen nominibus. Termini, qui sunt a sinistris signi $=$, constituunt primum *æquationis* membrum; illi vero termini, qui a dextris sunt ejusdem signi $=$ constituunt *æquationis* membrum secundum.

§. 88. Est & alia adhuc ex *Regula Trium* enata regula, quam *regulam auream compositam*, seu regulam *de quinque* nominamus; Hæc regula *de quinque* nihil fere aliud est, quam duplicata *Regula Trium*: quando nempe ex *quinque* numeris datis sextus quœritur. Fit autem hæc regula *de quinque* duplici modo. *Primo*: per duplicem positionem *regulæ trium*. *Secundo*: fiunt *quinque* positiones, quarum utrinque duæ infra se invicem positæ sunt, & *quinta* in medio; multiplicantur autem duo sinistimi inter se, uti & duo dextimi. Tum *factum* quod a dextris est, multiplicatur cum medio numero; inde proveniens *productum* dividitur cum sinistimo, & *quotus* erit numerus sextus quæsitus.

## PROPOSITIO IV.

§. 89. Si pro vectura 6 centenariorum ad 5 milliaria 12 floreni persolvi debent, rescire: quantum solvere necessum sit pro devectione 30 centenariorum ad 18 milliaria?

Cui lubitum fuerit operari primo modo (§. 88.) nempe usurpatione duplicis *regulæ trium*, ille primum juxta (§. 79.) adscribat tres has positiones nempe 6 — 12 — 30, & prodibit numerus 60 fl. Porro fiat altera poſitio, nempe: 5 — 60 — 18, & prodibit numerus 216, qui erit ſextus quæſitus.

Sin altero modo breviori, faciliorique placitum ſit operari, ponantur primum a ſiniſtris 6 centenarii, & infra 5 milliaria, ac in medio 12 floreni; a dextris vero ſuperne 30 centenarii, & inferne 18 milliaria. Tum $30 \times 18 = 540$, atque ex parte ſiniſtra $6 \times 5 = 30$. Jam juxta (§. 88.) $540 \times 12 = 6480$. Hoc dividatur per 30, habebiturque quotus 216, qui ſignificat florenos, quos proportionaliter pro vectura 30 centenariorum ad 18 milliaria ſolvere oporteat, ſi pro devectione 6 centenariorum ad 5 milliaria 12 floreni penduntur. Et hæc quidem Regula de quinque *directa* vocatur.

6 30
12
5 18

30 — 12 — 540
12

| 6480 | 216 fl.
18

§. 90. QUemadmodum autem præter *Regulam Trium directam*, alia *inverſa* eſt; ita pariter *Regula de quinque inverſa* habetur; cujus inſtitutum in eo conſiſtit, ut ex quinque terminis ſeu poſitionibus, certo quodam ordine inverſe diſpoſitis, ſextus terminus incognitus eliciatur. Ea ſors, quæ inquiritur, medio ſtatuitur loco, tum vero partes laterales utrinque ſibi correſpondent; veluti: *ſi milites 50 gregarii 12 menſibus 1500 florenis queant ſuſtentari, quamdiu 80 milites, itidem gregarii, ære ſexcentorum florenorum victitabunt?*

| | | |
|---|---|---|
| Milites 50 | | 80 Milites |
| | Menſes. 12 | |
| Flor. 1500 | | 600 Flor. |

§. 91. QUoniam autem terminorum seu positionum *inversio* triplex potissimum contingit; vel enim superiores termini invertuntur, vel inferiores, vel ambo simul, superiores nimirum, & inferiores, ut problematum datorum resolutio felicius procedat, oportet primo examen instituere I. num inter superiores terminos *inversio* intercedat, præscindendo a terminis inferioribus? Quod si ita esse fuerit deprehensum, procedatur ad examen terminorum inferiorum; porro si judicium operantis dictaverit, inferiores terminos non esse inversos, tum multiplicentur decussatim superiores termini cum inferioribus, hac lege, ut productum ex multiplicatione termini superioris dextimi inversi cum termino inferiori sinistimo, inferius ad primum locum reponatur, duoque hi termini multiplicati adjecta linea conjungantur: medius terminus seu positio manet suo in loco: in tertio demum loco collocatur factum e reliquis duobus terminis superiori nempe, & inferiore decussatim multiplicato, quorum duorum terminorum copulatio punctulis duntaxat indicatur non esse conversa.

II. Quod si in inferiorum tantummodo terminorum positione *inversio* advertatur, multiplicentur termini decussatim, ita tamen, ut productum ex multiplicatione termini superioris sinistimi cum termino inferiori dextimo (qui duo termini interjecta linea tanquam nota inversionis copulantur) primum locum inferius obtineat, tertio autem loco ponatur productum termini inferioris sinistimi, cum termino superiori dextimo multiplicati, interjectis inter hos ultimos terminos tantummodo punctulis.

III. Si demum ambæ, & superiores, & inferiores positiones inversæ examine præmisso judicentur, tum termini non debent decussatim multiplicari; sed terminus superior dextimus multiplicatur cum termino inferiore dextimo, & productum ponitur infra ad sinistram, nempe primo loco: rursus productum ex multiplicatione superioris, & inferioris sinistimi termini collocatur inferius ad dextram, id eſt, loco tertio. Media poſitio ſemper ſuo in ordine perſiſtat, cui etiam ſextus terminus, qui requiritur, correſpondere debet.

§. 92. Atque omnes hæ inſinuatæ cautelæ nihil quidquam obſiſtunt, quo minus Regula hæc *inverſa* de quinque ſit quoque regula proportionis; quamvis enim in problematis enunciatione *tertius*, & *ſextus* terminus non ſint homogenei, in operatione tamen ita proceditur, ut *tertius ſexto* homogeneus fiat, atque inter utrumque *inverſa* intercedat proportio. Jam ad praxim deſcendamus. Aſſumatur problema mox inſinuatum

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mil. | 50 | | 80 Milites |
| | | 12 | |
| Flo. | 1500 | | 600 Flor. |

Hocque ſimplici diſpoſitione adſcriptum examini ſubjiciatur: 50 milites ſuſtentantur annue certa quadam ſumma pecuniæ (præſcindendo ab inferioribus) poteruntne etiam 80 milites tamdiu eadem pecuniæ ſumma ſuſtentari? Igitur, cum ad tempus quæſtio collimet, pateſcet examinanti: non poſſe 80 milites eadem pecunia duodecim menſium ſpacio ſuſtentari; itaque inferatur juxta (§. 86.) hanc eſſe *inverſam* propoſitionem. Pergatur ad inquiſitionem inferiorum terminorum, dicendo: ſi certus militum numerus (abſtrahendo a ſuperioribus) 1500 florenis ſpatio 12 menſium victitant, poteritne idem numerus militum 12 menſibus ſuſtentari ære 600 florenorum? Sanus profecto quisque judicabit, certum illum numerum militum breviori tempore victitaturum pecunia ſexcentorum florenorum, quam 1500 fl. victitaſſet; igitur cum numerus 600, minor ſit, quam 1500, cumque etiam minus tempus prodire oporteat, propoſitio inferiorum terminorum non erit inverſa (§. 86.) Iam vero ducatur linea decuſſatim a 1500 ad 80; punctula autem ducantur itidem decuſſatim a 50 ad ad 600 juxta (§. 91.) *Num.* I. prodibitque factum 3 mensium, quibus 80 milites ære 600 florenorum queant sustentari.

Milit. 50 . . . . . . . Mens. 12 . . . . 80 Milit. *inversa.*

Flor. 1500 . . . . 600 Flor.

120000 . . . 12 . . 30000

3

36 | 3 Menses.

Problema secundi generis, in quo sola inferior propositio est inversa (§. 91.) *Num.* II.

*Præfectus equestris aliquando emit 64. ulnas panni, tres ulnæ quadrantes in latitudine continentis, atque ex hoc panno 8. equitibus æqualia pallia confecta fuerunt; Recens vero emit 600 ulnas panni, atque ex hoc 125 equitibus pallia, æqualia prioribus, conficiebantur. Quæritur: cujusnam latitudinis pannus secundus fuerit?*

Equites 8 . . . . Quad. 3 . . . . 125 Equites

Ulnæ 64 . . . . 600 Ulnæ *inversa.*

4800 . . . 3 . . . 8000

3

240 | 5 Quad. latitudinis.

 Ope-

Operatione juxta (§. 91.) *Num.* II. instituta prodibit, latitudinem secundi panni 5 quadrantum fuisse.

Nam primo nemo non videt, superiores terminos præscindendo ab inferioribus, non esse *inversos*, cum numerus dextimus Equitum seu palliorum procurandorum sit major sinistimo, & major etiam latitudo panni requiratur, adeoque superfluum foret examinare. Examen trium terminorum inferiorum sic instituitur: si 64 ulnæ, quarum quævis tres quadrantes latitudinis continet, sufficiant ad certum palliorum numerum conficiendum, eritne necessum, ut, si 600 ulnæ emantur pro eodem certo palliorum numero, quævis ejuscemodi ulna tres pariter quadrantes latitudinis complectatur? Dictabit profecto cuivis Judicium, suffecturas quam maxime 600 ulnas panni palliis illis certis conficiendis; etsi latitudo panni esset minor tribus quadrantibus; itaque cum minor latitudo panni requiratur, independenter a superioribus terminis, clarum est, positionem inferiorum terminorum esse inversam, ideoque etiam lineam a sinistimo superiore ad inferiorem dextimum esse adjectam (§. 91.) *Num.* II.

Sequitur Problema tertii generis; cujus nimirum, & superiores, & inferiores termini sint inversi. *Cajus elocat Capitale 250 florenorum pro annis 8 subsecuturis ad censum, hac conditione, ut singulis annis centum floreni 6 fructificent. Sempronius item elocat 500 florenos, a 4 pro centum, vultque tamdiu pecuniam hanc suam in censu elocatam, donec census seu interesse proveniens provenientem octo annorum censum Caji adæquet. Quæritur itaque: quot annis hanc Sempronii pecuniam in censu elocatam esse oporteat, donec petitionem detur assequi?*

Examen: si 250 floreni ad censum octo annorum spatio debeant elocari, quanto tempore elocabuntur ad censum floreni 500? Respondebis utique: tempore breviori. Igitur superiorum terminorum propositio est *inversa* (§. 86.) cum nempe sit major summa floreni 500, quam sint floreni 250, brevius vero tempus per computum elicere oporteat. Rursum:

ſi 6 floreni redeant ex cenſu annuo 100 florenorum ad poſſeſſorem per annos 8, ſufficietne idem 8 annorum tempus, ut certa illa ſumma pecuniæ, a 4 duntaxat pro centum elocata, cenſum priori æqualem fructificet? Reſpondebis illico: non ſufficere, ſed longiori tempore eſſe elocandum capitale, cujus annuo cenſu 100 floreni 4 fructificant, quam ſi idem ipſum capitale elocaretur, a 6 pro centum. Igitur, & propoſitio inferiorum terminorum erit pariter *inverſa*. Utere regulis (§. 91.) *Num.* III. præſcriptis, & operare.

Floreni 250 — Anni 8 — 500 Floreni

Cenſ. 6 — 4 Cenſ.

2000 . 8 . 1500

8

12000 | 6 Anni.

Terminus itaque ſextus proportionalis, ex problemate hoc *de quinque inverſo* proveniens, ſunt 6 anni, quibus ſignificatur, quemadmodum ex 250 florenis, a 6 pro centum elocatis, intra ſpatium octo annorum cenſus provenit 120 floreni; ita hic idem cenſus provenit ex 500 florenis, a 4 pro centum, ſpatio 6 annorum elocatis.

Longior forte, quam par erat, fuit Regulæ hujus *de quinque inverſæ* expoſitio; malui tamen in regulæ tam neceſſariæ tamque intricatæ tractatione eſſe paulo prolixior, quam manuductioni deeſſe, tyronumque animos in ancipiti ſuſpenſos præterire.

DE-

## DEFINITIO.

§. 93. *R*Atio eſt duorum vel plurium numerorum *mutuus reſpectus*. Vel : eſt *habitudo unius quantitatis ad aliam, modum exprimens, quo altera alteram contineat, vel ab illa contineatur.*

§. 94. EST autem *ratio* duplex : *Arithmetica*, & *Geometrica*. *Arithmetica ratio* eſt, differentia illa, ope ſubtractionis inveſtigata, quæ inter numeros eſt. v. g. inter 2, & 5. Eſt duplex, *continua*, & *diſcreta*. *Continua* eſt, dum continuo eadem differentia inter ſuccedentes ſibi numeros intercedit, v. g. 2. 5. 8. 11. 14. &c. diciturque etiam *progreſſio Arithmetica*. *Diſcreta* eſt, quæ interrumpitur v. g. 2. 5 = 7. 10 = 9. 12 &c. & vocatur *proportio Arithmetica.*

§. 95. MUltiplicitas permutationum, quæ inter quasdam unitates, permutato ſemper earum ordine, inſtitui poſſunt, invenitur multiplicatis in ſe mutuo numeris *progreſſionis Arithmeticæ naturalis* v. g. velis ſcire : ſi ſeptem Planetæ indies alia, & alia ſerie ſeu ordine conſtituerentur, quot anni effluerent, usque dum omnis eorum *permutatio* eſſet evoluta ?

| | |
|---|---|
| | 1 |
| Multiplicatis invicem ſeriei naturalis ſeptem numeris, productum erit 5040, hoc dividatur per anni dies 365, & habebitur ſumma annorum nempe 13 anni, & aliquid ſupra 9 menſes. | 2 |
| | 3 |
| | 4 |
| | 5 |
| | 6 |
| | 7 |
| | 5040 |

§. 96. HArmonica *proportio Arithmetica* reperitur ad plures numeros *Arithmetica progreſſione* aſcendentes hac ratione. v. g. ſit ad numerum 2, 5, 8. Item 3, 4, 5.
10, 16, 40. 12, 15, 20.

*Primus* numerus 2 multiplicetur per *ſecundum* 5, & habebitur

tur primus *harmonice proportionalis* 10. Item *primus numerus* 2 multiplicetur per *tertium* 8, & habebitur *secundus* numerus *harmonice proportionalis* 16. Denique *secundus numerus* 5 multiplicetur per *tertium* 8, & habebitur numerus *tertius* harmonice proportionalis 40 &c. Et sic porro de aliis.

§. 97. *RAtio Geometrica* est illa multiplicitas, quoties minor aliquis numerus in majori continetur. v. g. 2 ad 3, & 6. Est pariter duplex *continua*, & *discreta*. *Continua*, quæ & *progressio Geometrica* dicitur, est, dum plures numeri *Geometrica ratione* progrediuntur. v. g. 3. 6. 12. 24. 48. 96 &c. Et hæc notatur per præfixum signum $\div\!\!\cdot$

§. 98. MAxima est numerorum per *continuam* hanc *progressionem Geometricam* multiplicatio. Sassa Dahir Indus latrunculorum lusus inventor fertur a Scheramo rege suo, quem, & regulas illius lusus edocuit, præmii loco petiisse tot tritici grana, quot provenirent, si ponendo unum granum ad primam areolam illius lusus, *continua progressione Geometrica* multiplicarentur grana per 64 areolas, quas tabula illius lusus exhibet, & compertum est inito calculo: huic petitioni Sassæ, quæ primum quidem exigua regi videbatur, omne totius Orbis terrarum triticum non suffecturum.

§. 99. RAtio Geometrica *discreta* est, quæ etiam *Proportio Geometrica* appellatur, cum numeri *Geometrica ratione* progredientes, interrumpuntur v. g. 3. 6 = 4. 8. = 5. 10 &c. seu 3. 6 : : 4. 8, & : 4. 8 : : 5. 10 &c. toties nempe 4 in 8, quoties 5 in 10 continetur &c.

§. 100. IN *ratione Geometrica* ille numerus, qui indicat, quoties minor in majori contineatur, appellari consuevit *exponens rationis*; neque differt a numero *quoto*, ut in *divisione* notatur (§. 41.).

§. 101. *PRoportio* alia eſt *æqualitatis*, alia eſt *inæqualitatis*. Proportio *æqualitatis* tunc habetur, cum unus numerus aut quantitas alium adæquat v. g. $3 \times 4 = 12$, & $6 \times 2 = 12$. Proportio *inæqualitatis* eſt, dum alter duorum numerorum alterum excedit. Hæc autem rurſus duplex eſt: *rationalis*, & *irrationalis*. *Rationalis* eſt, quæ numeris exprimi poteſt. v. g. Proportio inter 3, & 9 *rationalis* eſt; etenim prior numerus a poſteriore ter ſuperatur. *Irrationalis* eſt, quæ numeris exprimi nequit. v. g. Proportio inter 3, & 10. Non poteſt enim hæc proportio numeris exprimi, ſed eſt neceſſum *fractionem* adhibere.

§. 102. *RAtio compoſita* eſt, cujus *exponens* eſt productum ex multiplicatis inter ſe aliarum *exponentibus*. Seu: quæ fit, cum non tantum *antecedentes*, ſed etiam *conſequentes rationes* in ſe ducuntur, & *novam rationem* efficiunt. v. g.

| | | |
|---|---|---|
| Prima ratio ſit | 3. | 6. |
| Secunda | 4. | 8. |

3 Ducuntur in 4, & productum erit 12, 6 ducantur in 8, & erit productum 48. *Ratio* 12 ad 48, dicitur *ratio compoſita* ex *ratione* 3 ad 6, & ex ratione 4 ad 8.

§. 103. ALiud eſt autem *ratio dupla*, aliud *ratio duplicatæ rationis*. *Ratio dupla* eſt in 6 ad 3; 6 enim eſt numerus duplus ad 3. Ratio autem *duplicatæ rationis* eſt, quando *rationes componentes* ſunt æquales, ſeu ejusdem proportionis v. g. 2. 4
3. 6.
duo numeri antecedentes in ſe invicem ducti nempe $2 \times 3 = 6$; & conſequentes pariter in ſe ducti mutuo nempe $4 \times 6 = 24$. eſt ratio *duplicatæ rationis* 2 ad 4, vel 3 ad 6, quarum altera alteri æqualis eſt

§. 104. ITaque quotiescunque datur *ratio* numeri ad numerum ut 2 ad 4, & debeat inveniri ratio duplicatæ rationis, tunc oportet illi *rationi numericæ* aliam *rationem* adjungere,

gere, ut 2. 4 : : 3. 6; ductis deinde, & *antecedentibus* in ſe invicem, & *conſequentibus*, habebitur ratio *duplicatæ rationis* 6 ad 4. Hi numeri reducuntur ad minimos *exponentes*, 1. 4. qui quadrati ſunt, nam 2. 4 : : 3. 6.
1. 2 : : 1. 2
cum tam *antecedentes* æquales, quam *conſequentes* inter ſe multiplicentur. Ex hac multiplicatione ejusdem numeri per ſe ipſum habetur *ratio duplicata* ſeu *numeri quadrati*.

§. 105. DUo numeri ſeu magnitudines ſunt in *ratione ſubduplicata* aliorum duorum numerorum, quando ea eſt illorum *ratio*, ut ſi ſemel in ſeipſam ducatur, *ratio* duorum illorum datorum numerorum conſurgat. In *ſubtriplicata* vero *ratione* dicuntur eſſe, cum eorum *ratio* hujusmodi eſt, ut *duplicata* in ſe ipſam ducta, *rationem* illorum aliorum numerorum efficiat. Ex quo habetur: *exponentem rationis ſubduplicatæ* eſſe *quadratam radicem*; *exponentem* vero *rationis ſubtriplicatæ* eſſe *cubicam radicem exponentis* datæ rationis.

Signum *æqualitatis* eſt $=$. Signum ſimilitudinis $\backsim$. $>$ notat majus ad minus. $<$ notat minus ad majus.

## AXIOMA.

§. 106. SI duæ *rationes* eidem tertiæ æquales fuerint, ſunt etiam æquales inter ſe.

Nam *exponentes* earundem *rationum* ſunt æquales v. g. 2. 3 $=$ 6. 9 $=$ 8. 12. Ratio enim *exponens* harum omnium eſt ſicut 2 ad 3. Itaque ſi 2. 3 $=$ 6. 9. & 2. 3 $=$ 8. 12. *Etiam* 6. 9 $=$ 8. 12.

§. 107. EX majori itaque vel minori *ratione* cognoſcitur etiam, quænam quantitas ſit altera quantitate aut major, aut minor. Quod ex ſequenti *theoremate* elucet.

Sint quantitates A, B, C. A habeat majorem *rationem* ad B, quam ad C. *Dico*: quantitatem B minorem esse, quam quantitatem C.

Etenim, cum ex hypothesi A majorem *rationem* habeat ad B, quam ad C; igitur pars aliqua ipsius A, quæ E dicatur, habebit eandem *rationem* ad B, quam ad C. id est: *ratio*, quam habet E ad B, erit æqualis rationi, quam habet A ad B. Præterea *ratio* E ad A est æqualis rationi B ad C: atqui E $<$ A. Igitur etiam B $<$ C. *Quod erat demonstrandum.*

Sic etiam vicissim dicitur: Idem A ad majus C minorem *rationem* habet, quam ad minus B; quia nempe C $>$ B, erit etiam A: C $<$ A: B. Itaque A ad majus C minorem habebit *rationem*, quam ad minus B.

Porro, si duæ quantitates sint A, & B. quarum A ad tertiam quantitatem C majorem *rationem* habeat, quam B ad tertiam illam quantitatem C; harum prima A erit major, quam B.

Nam pars aliqua majoris A habebit eandem *rationem* ad C, quam ipsa quantitas minor B ad C; igitur pars ipsius A $=$ B, & per consequens A $>$ B; Quod enim duorum quantorum majus est, habebit ad tertium aliquod quantum majorem rationem, quam alterum minus.

## PROPOSITIO VI.

§. 108. IN *progressione continua Geometrica* si positiones sint *impares* v.g. 5. multiplicando numeros extremos æque a medio distantes, eadem summa prodibit.

2. 4. 8. 16. 32

Harum quinque positionum multiplica duo extrema nempe 32 $\times$ 2, quorum utrumque a medio 8 æque distat, prodibunt

dibunt 64; rurſus multiplica 4 per 16, quæ pariter a medio 8 æque diſtant, & iterum *factum* erit 64.

Idem etiam obtinetur, dum poſitiones ſunt pares v. g. 2. 4. 8. 16. Idem quippe *factum* nempe 32 prodibit, ſive 16 × 2 ſive 8 × 4.

Nam *ſecundus* terminus 4 habetur, dum *primus* 2 in *exponentem* ducitur, ſeu dum 2 altero tanto augetur. *Quartus* terminus 16 rurſus habetur, dum *tertius* terminus 8 in *exponentem* ducitur, ſeu dum pariter 8 duplicantur (§. 107.) ergo ſi *primus* terminus in *quartum* ducitur, numerus prodibit ex *primo*, & *tertio* termino productus cum *exponente rationis*; & rurſus, ſi *ſecundus* terminus cum *tertio* multiplicetur, denuo prodibit numerus ex *primo*, & *tertio* termino productus cum *exponente rationis*, eruntque numeri æquales. *Quod erat demonſtrandum.*

§. 109. Ex mox allatis communis *proportionum* regula ſeu *trium* mirum quantum illuſtratur. In his quippe terminis 2. 4 : : 8. 16. video *primum* eſſe ſemiſſem *ſecundi*, & *tertium* eſſe ſemiſſem *quarti*; Quodſi multiplicem *primum* per *quartum*, productum erit 32 duplum nempe, reſpectu producti, quod habetur per multiplicationem *primi*, cum *tertio*, quia *quartus* duplus eſt *tertii*. Rurſus ſi multiplicem *primum* per *tertium*, prodibit 16, nempe dimidium illius producti 32, quod fieret, ſi *ſecundus* per *tertium* multiplicaretur: quia nempe productum ex multiplicatione 4 per 8 duplum eſt producti ex multiplicatione 2 per 8: & quia productum ex multiplicatione duorum mediorum 4, & 8 æquatur producto duorum extremorum 2, & 16; ſicut enim 4 duplum eſt 2, ita etiam 16 duplum eſt 8: & ſicut 2 ad 4, ita 8 ad 16. Quæ omnia per numeros ſic exprimuntur:

$$2.\ 4 :: 8.\ 16.$$

$$\&\ 2 \times 16.\ 2 \times 8 :: 16.\ 8.\ \&\ 8 \times 4.\ 8 \times 2 :: 4.\ 2$$

$$\text{Igitur } 2 \times 16.\ 2 \times 8 :: 8 \times 4.\ 8 \times 2$$

$$\text{Atque adeo } 2 \times 16 = 4 \times 8.$$

## PROPOSITIO VII.

§. 110. *Cum in progressione geometrica positiones sunt impares, media positio reperitur, si extrema æqualiter a medio distantia multiplicentur, & ex facto radix quadrata extrahatur.* v. g.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192 &c: sive 192 × 3, sive 96 × 6, sive 48 × 12 semper factum prodibit 576. Ex quo numero si *radicem quadratam* extraxeris, erit *quotus* 24, qui numerus totius illius *progressionis* est medium. De extractione *radicis quadratæ* infra (§. 147.) agetur.

## PROPOSITIO VIII.

§. 111. *IN progressione geometrica continua positiones a se æqualiter distantes habent se adinvicem æqualiter.*

Sint positiones: 5. 10. 20. 40. 80. 160. sicut se habet *primus* terminus 5, ad *secundum* 10: ita *secundus* 10 ad *tertium* 20; ita 20 ad 40 &c. nempe sicut $\frac{1}{2}$ ad *totum*. Rursus sicut se habet terminus *primus* 5 ad *tertium* 20, ita *secundus* 10 ad *quartum* 40; ita 20 ad 80; ita 40 ad 160 &c. nempe sicut $\frac{1}{4}$ ad *totum*. Iterum sicut se habet *primus* terminus 5 ad *quartum* 40, ita se habet *secundus* 10 ad *quintum* 80, ita 20 ad 160 &c. nempe tanquam $\frac{1}{8}$ ad *totum*. Denique sicut se habet *primus* terminus 5 ad *quintum* 80, ita se habet *secundus* 10 ad 160 &c. nempe sicut $\frac{1}{16}$ ad totum.

Nam *exponentes* earundem rationum sunt æquales (§. 107.) Igitur si a *primo* termino ad *tertium* toties mnltiplicatur eadem *ratio exponens*, quoties a *secundo* termino ad *quartum* &c. erit *ratio exponens* semper eadem (§. 11.) *Quod erat demonstrandum.*

## PROPOSITIO IX.

§. 112. *REperire numerum geometrice proportionalem medium inter 16, & 144.*

Mul-

Multiplicentur invicem 144 & 16, *factum* erit 2304. Ex hoc numero extrahatur *radix quadrata*, (§. 147) quæ erit 48. Itaque sic se habet 16 ad 48, sicut 48 ad 144. seu : 16. 48 = $\frac{1}{3}$ : : 48. 144 = $\frac{1}{3}$ (§. 107).

## PROPOSITIO X.

§. 113. INvenire numerum *tertium* continuo geometrice proportionalem duobus prioribus 7 & 35.

Multiplicetur *secundus* terminus 35 per semetipsum, eritque *factum* 1225. Hoc dividatur per *primum* terminum nempe 7. & erit *quotus* 175. Ita ut eadem ratione se habeat 7 ad 35; sicut 35 ad 175. Utrumque nimirum ut $\frac{1}{7}$ ad *totum*.

*Nota.* Geometricæ proportiones aliquando se habent in ratione *inversa*: aliquando in ratione *alterna*, aut *reciproca*. &c.

A. B : : C. D. aut : 2. 4 : : 3. 6.
In ratione inversa: B. A : : D. C. aut : 4. 2 : : 6. 3.
In ratione alterna: A. C : : B. D. aut : 2. 3 : : 4. 6.
quia nempe AD = BC §. 108.
Item componendo: A + B. B : C + D. D. quia nempe AD + BD = BC + BD. cum BC = AD.
Aut dividendo: A − B. B : : C − D. D.
In ratione reciproca: A. C : : D. B. aut. 2. 3. : : 6. 4.

§. 114. SUnt & aliæ numerorum *proportiones*, seu potius *combinationes*, quæ festivum quid, ac jucundum Tyronibus exhibent, veluti est *Quadratum vulgare*; cum nempe numeri quidam recurrentes sic disponuntur in aliquo *quadrato*, ut ex omni linea, seu *horizontali*, seu *verticali*, seu *diagonali* semper eadem summa eliciatur. v. g. velis hos numeros: 2, 6, 4, 1, 3. indiscriminatim positos quadrato inscribere: ponatur *medius* horum quinque characterum nempe 4 ad infimam lineam dextrorsum; tum sinistrorsum pergendo, scri-

ſcribe in ſubſequentibus areolis characteres, ut ſe ſiniſtrorſum ſequuntur v. g. poſt 4 ſint 6, poſt 6 ſint 2, poſt 2 ſint 3, poſt 3 ſit 1. Jam in ſecunda linea aſcendendo, pone pro *primo* charactere dextimo illum, qui *medius* fuerat in prima linea nempe 2, & ita rurſus ſecundum ordinem characterum, imple ſiniſtrorſum hanc ſecundam lineam, ut poſt 2 ſequantur 3, 1, 4, 6. In tertia linea aſcendendo, pone *medium* characterem ſecundæ lineæ nempe 1. pro *primo* dextimo. Atque ſic agatur cum aliis lineis, donec quadratum, & omnes areolæ impleantur; & fiet, ut quemmadmodum hi characteres 2, 6, 4, 1, 3 ſibi additi efficiunt 16, ita quoque omnis linea hujus *quadrati* complectatur 16. v. g.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 16 | | | 16 |
| 2 | 6 | 4 | 1 | 3 | |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 6 | |
| 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 16 |
| 6 | 4 | 1 | 3 | 2 | |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | |

Linea *verticalis* $4 + 3 + 6 + 1 + 2 = 16$

Linea *horizontalis* $3 + 2 + 6 + 4 + 1 = 16$

Linea *diagonalis* $2 + 1 + 6 + 3 + 4 = 16.$

§. 115. ALia præterea eſt methodus, multoque præſtantior *quadrata* ejuscemodi *arithmetica* conſtruendi ſecundum 5 cellulas, in quadratum redactas; quibus cellulis, ſi præter numeros etiam ſex diverſæ literæ inſcribantur, fiet, ut non modo duodecies (nempe juxta 5 ſupputationes verticales, 5 horizontales, & duas diagonales) idem numerus proveniat, ſed decies octies, nempe ſecundum illarum etiam cellularum ſupputationes, in quibus ſimiles literæ ſunt adſcriptæ. Quorum omnium *quadratorum* id debet ſtrui fundamentum; ut quis noverit 25 primos ſeriei naturalis numeros in cellulas *quadrati* ita diſtribuere, ut ſecundum omnem ſupputationem ſeu verticalem, ſeu horizontalem, ſeu diagonalem ſemper 65 numerentur. Quoniam vero hujusmodi *quadrati*, 25 cellulas continentis, radix eſt 5; quadretur hæc radix 5, = 25; huic quadrato 25 adjice 1 = 26; hujusque

que dimidium, nempe 13 erit numerus in media *quadrati* cellula collocandus, quod præſenti ſchemate exhibetur.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11<br>a | 24<br>b | 7<br>c | 20<br>b | 3<br>a | |
| 4<br>f | 12<br>d | 25<br>e | 8<br>d | 16<br>f | 4 |
| 17<br>c | 5<br>e | 13<br>abcdef | 21<br>e | 9<br>c | 17 |
| 10<br>f | 18<br>d | 1<br>e | 14<br>d | 22<br>f | 10 |
| 23<br>a | 6<br>b | 19<br>c | 2<br>b | 15<br>a | 23 |
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 | 16 |

Porro 1 ponitur inſra mediam cellam. 2 ponuntur dextrorſum, una cella inferius; 3 rurſus poni deberent dextrorſum in inferiori ordine; cum autem nulla jam cella ibidem exiſtat, ponitur ad ſupremam cellam verticalem ejusdem ordinis; 4 iterum collocari deberent in cella dextrorſum deſcendendo, cum tamen cella ibidem nulla ſuperſit, transferuntur ad primam ſiniſtimam cellam ejusdem ordinis horizontalis. Aſt, ſi forte obtingat, ut numerus quispiam, hac perpetua ratione diſponendus, incurrat in cellam, alio jam numero occupatam, ponatur ille numerus ſiniſtrorſum in cella inferioris ordinis, veluti factum eſt cum numero 6, qui alioquin ponendus fuiſſet in cellam, unitate prius occupatam.

Hac aliorum ſubſequentium numerorum diſpoſitione adornata, ſive verticales, ſive horizontales, ſive diagonales numerorum ordines addideris, ſive etiam numeros cellularum, iisdem literis ſparſim inſignitarum, productum habebis perpetuum numerum 65. Porro 6 literæ ABCDEF eo

 ordi-

ordine diſperguntur, ut in media areola omnes quidem collocentur, A vero præterea teneat quatuor angulos; B vicinas areolas horizontales; C medias laterales; D areolas verticales, ipſi B vicinas; E vicinas mediæ cellæ & horizontales, & verticales; F demum vicinas verticales ipſi A, quod ex ſchematis inſpectione pateſcit. Atque hæc inſtructio ceu fundamentum omnibus aliis quadratis deſervit, quibus aut certum aliquem annorum numerum, aut etiam certum nomen literis cabaliſticis expreſſum eruere velis. Probatio *quadrato* bene conſtructo accedet; ſi tam verticales, quam horizontales, & diagonales; itemque ſimilium literarum computationes idem productum conſtituant, quemadmodum & in mox præcedente ſchemate conſtituunt. v. g.

| | |
|---|---|
| Ordo horizontalis | 11 + 24 + 7 + 20 + 3 = 65. |
| Ordo verticalis | 11 + 4 + 17 + 10 + 23 = 65. |
| Ordo diagonalis | 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65. |
| Computus lit. A | 11 + 3 + 23 + 15 + 13 = 65. |

Idem prorſus per cæteros ordines, & literas continuando producetur.

Quod ſi igitur cuipiam animus ſit *quadratum* hac methodo conſtruendi, quod undequaque numerum anni labentis 1752 referat, dividatur primum numerus anni 1752 per numerum cellularum 5. & prodibit quotus 350. Hic quotus ſemper medium obtinere locum debet in quadrato, quemadmodum & in præcedenti ſchemate conſpicitur numerus 13.

$$5 \,|\, 1752 \,|\, 350$$
$$-25$$
$$2$$

Tum ab hac radice 350 progreſſio fit ſecundum ſeriem naturalem deſcendendo, nempe 349, 348, 347, 346 atque ita porro per duodecim gradus, uſque ad numerum 338, qui numerus 338 ſtatim infra medium ponitur, ſicut antea unitas infra medium quoque numerum fuit collocata. Cum his 12 deſcendentibus numeris implebis medietatem *quadrati*, 25 cellulas continentis.

Porro pro altera quadrati medietate, formabis ex radice 350 progreſſionem numerorum naturali ſerie aſcendentium nempe 351, 352, 353, 354 pariter uſque ad gradum duodecidecimum nimirum 362. Qui numerus 362 eo prorſus loco ponendus erit nempe ſupra mediam areolam, quo nempe in præcedenti ſchemate numerus 25 erat rejectus; diſpoſitio numerorum ſervatur eadem, quæ tradita eſt pro ſchemate præcedenti. Quoniam autem in diviſione anni 1752 duo remanſerunt, forent utique præter numeros integros ſingulis areolis etiam $\frac{2}{5}$ adjiciendæ; alioquin productum ex illis ſupputationibus, ſeu diagonalibus, ſeu verticalibus, ſeu horizontalibus, ſeu etiam literariis deficeret, & quod referre deberet 1752, referet duntaxat 1750, nimirum fractione $\frac{2}{5}$ in omnibus omiſſa. Fractionum autem poſitio cum *quadrati* ordinem deformem reddat; igitur numerus binarius cuivis ordini & verticali, & horizontali, & diagonali adjicitur ea adhibita cautela, ut ne numerus ille 2 in uno quocunque ordine bis poſitus fuiſſe recurrat, quod in mox conſequenti ſchemate amplius pateſcet: ſignum quippe * areolis inſperſum notabit, numerum binarium numero occurrenti fuiſſe adjectum. Eadem omnino praxi uteris, ſi qua forte in diviſione numerus 3 vel 4 remanſerit.

Quotus 350+2
Progreſſio deſcendens
349
348
347
346
345
344
343
342
341
340
339
338

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 348 a | 361 b | 344 c | * 359 b | 340 a |
| 341 f | 349 d | 362 e | 345 d | * 355 f |
| 354 c | 342 e | * 352 abcdef | 358 e | 346 c |
| * 349 f | 355 d | 338 e | 351 d | 359 f |
| 360 a | * 345 b | 356 c | 339 b | 352 a |

Progreſſio Aſcendens
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362

 Ex

Ex omnibus hujus *quadrati* ordinibus, ſeu horizontalibus, ſeu verticalibus, ſeu diagonalibus, itemque ex ſupputatione cellularum, literam conſimilem præferentium, nempe per 18 variationes, idem ſemper numerus anni labentis 1752 elicitur. v. g.

| | |
|---|---|
| Ordo horizontalis | 348 + 361 + 344 + 359 + 340 = 1752 |
| Ordo verticalis | 348 + 341 + 354 + 349 + 360 = 1752 |
| Ordo diagonalis | 348 + 349 + 352 + 351 + 352 = 1752 |
| Computus lit. A | 348 + 340 + 352 + 360 + 352 = 1752 |

Et ſic de cæteris.

Et hæc quidem de *quadratis*, quæ fiunt ex numeris progreſſionis ordinem ſervantibus. Quod ſi vero progreſſionis ordinem in numeris interrumpi ſit neceſſum, nempe ut in quadrati areolis certus quispiam numerus dierum, menſium, aut annorum exprimatur, aut etiam ut voces numeris cabaliſticis comprehenſæ ſenſum integrum intra quadrati cellulas exhibeant; tum majori quopiam ſtudio arithmetico, atque attentione eſt opus. Velis v. g. Schema quadrati mox antecedentis ita immutare, ut præter numerum 1752 undequaque provenientem, etiam in deſignatis hujus quadrati cellulis exprimatur annus, menſis, & dies, quo nata eſt MARIA THERESIA Auguſta, annus nempe 1717, menſis quintus, id eſt Majus, & dies ejusdem menſis 13 Item etiam annus, menſis, & dies, quo natus eſt Sereniſſimus Archidux JOSEPHUS, nimirum annus 1741, menſis tertius, id eſt Martius, dies ejusdem menſis pariter tertius decimus; primo numerum 348 in ſuperiore ſiniſtima cellula quadrati præcedentis recurrentem commuta in 17, ut conſpicis in ſequenti quadrato arithmetico-magico, & remanebunt 331, quem eundem numerum 331 quartæ cellulæ, a ſiniſtris dextram verſus pergendo in ſupremo horizontali ordine, addes, ut in eadem quarta cellula, loco 359 prioris ſchematis, ſint 690; Igitur utut numeri, in primo horizontali ordine ſint interrupti, nihilominus ex additione omnium cellularum prodibit nu-

numerus 1752; quod enim uni areolæ eſt demptum, hoc alteri acceſſit; aſt in utriusque immutatæ areolæ linea verticali deprehendetur error; itaque ut & hic tollatur e medio, deſcende in primo ordine ſiniſtimo verticali uſque ad quartam areolam, & quem numerum 331 ſupremæ ejusdem ordinis cellulæ dempſiſti, adjice numero 349 ut ſit 680. Et facta hac immutatione proveniet etiam ex primo ſiniſtimo verticali ordine anni labentis numerus, nempe 1752: procede ad quartam cellulam; in qua loco 359 ponebantur 690, atque ex hac deſcende ad quartam in verticali ordine, in qua cellula numerum 351 deprehendes, huic numero deme iterum 331, quæ ſuperiori numero hujus verticalis ordinis antehac adjeciſti, & remanebunt 20, quo etiam fiet, ut hic verticalis ordo, ſublato errore, denuo annum 1752 complectatur. Atque ſic unus certus numerus inductus eſt, nempe 17, interrupto quidem progreſſionis ordine, manente tamen priori producto, nempe 1752.

Perge jam ad primam ſuperiorem dextimam areolam, eique loco 340, inſcribe 41; ut nimirum annus natalis Sereniſſimi Archiducis repræſentetur 1741. Remanebunt 299, quem numerum reſiduum adde quartæ cellæ primi ordinis horizontalis a dextra ſiniſtram verſus pergendo, ut nempe loco 361, fiant 660. Totus ſuperior ordo horizontalis exhibebit hos numeros 17 + 660 + 344 + 690 + 41, qui numeri omnes in unum collecti non modo annum 1752 ſignificant, verum etiam in prima, & ultima cella oſtendunt annum nativitatis 1741. Porro, quia primæ ſuperiori dextimæ areolæ ſubtractus eſt numerus 299, & quia idem numerus additus fuit cellæ quartæ ejusdem ordinis horizontalis, ideo ex utraque hac cella verticaliter ad quartam deſcende, & quartæ cellæ verticali primi dextimi ordinis, quæ 359 refert, adde 299, ut ſint 658: quartæ autem cellæ verticali quarti ordinis (a dextris pergendo ſiniſtram verſus) cui inſcriptus eſt numerus 355, ſubtrahe 299, ut ſint 56. Erunt itaque omnes numeri ordinis horizontalis quarti 349 + 56 + 338 + 351 + 658, qui additi inſimul conſtituunt productum 1752.

Hanc eandem methodum tenebis in variandis quadrati præcedentis numeris, ut nempe in inferioribus areolis annus, menſis, & dies Natalis MARIÆ THERESIÆ Auguſtæ exhibeatur; operam tamen dabis, utne diagonales numeros nimium permutes. Quæ omnia ſubjecto ſchemate exhibentur.

## *Quadratum Arithmetico - Cabaliſtico - Magicum.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 a | 317 | 964 b | 413 | 41 a |
| 32 | 729 c | Natalis M. Thereſiæ Auguſt. & Joſephi F. | 649 c | 342 |
| 17 b | 698 d | 356 abcd | 664 d | 17 b |
| 985 | 5 c | 34 d | 13 c | 715 |
| 701 a | 3 | 398 b | 13 | 637 a |

In primo ordine horizontali majoribus characteribus exprimitur annus 1741; ultimo vero ordine horizontali consignatur mensis tertius nempe Majus, & dies ejusdem 13. quo natus est, illud tot gentium ac regnorum Delicium, & stirpis Augustæ Decus, serenissimus Archidux JOSEPHUS. In tertio horizontali ordine majoribus characteribus notatur annus 1717. in quarto autem ordine mensis 5 id est majus, & dies ejusdem 13 Natalis MARIÆ THERESIÆ AUGUSTÆ. Qui quidem omnes numeri sic adspersi sunt, ut nihilominus ex omni ordinum seu verticalium, seu horizontalium seu diagonalium supputatione, itemque ex areolis, similes literas exhibentibus, universim decies sexies numerus anni labentis 1752 eliciatur. v. g.

| | |
|---|---|
| Ordo horizontalis | $17 + 317 + 964 + 413 + 41 = 1752$ |
| Ordo verticalis | $17 + 32 + 17 + 985 + 701 = 1752$ |
| Ordo diagonalis | $17 + 729 + 356 + 13 + 637 = 1752$ |
| Computus lit. D | $698 + 664 + 34 + \text{- - - -}\ 356 = 1752$ &c. |

Prolixiores has de *quadrati* constructione præceptiones afferre placuit, non quidem eum in finem, quasi vero merces ejuscemodi ex Mathematicorum officinis jure suo repeti deberent; sed quod adolescentum horas subsecivas industria curiositate traducere soleant, & otia non raro officiis atque humanitati impendant.

§. 116. HUc quoque referri debet ars illa combinandi, ut ex certo quodam numero, per alium certum numerum mensurato, certæ tantummodo res capiantur: sic fertur nauta quispiam, cum 30 homines, 15 nempe *Christianos*, & quindecim *Judæos* veheret, cumque ingruente necessitate medietas hominum in mare esset ejicienda; ita consentientes, & *Christianos*, & *Judæos* in circulum disposuisse, ut *nonus* ordine quisque fortuitus in mare præcipitaretur, donec medietas esset avulsa; fertur, inquam, nauta ille *Christianus* cæteros quindecim *Christianos* sic disposuisse inter *judæos* juxta hoc carmen:

men: *Populeam virgam mater regina tenebat*, ut ordine *nonus* quisque ſemper eſſet *judæus*, ſuperſtitibus Chriſtianis. Carminis hujus vocales ſignificant $\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ a, & e, & i, & o, & u.\end{matrix}$ Itaque primum pro exigentia literæ o quatuor *Chriſtianos* diſpoſuit, tum pro exigentia vocalis u quinque *judæos*. Rurſus duos *Chriſtianos* &c. prodibatque ſeries collocatorum

cccc iiiii cc i ccc i c ii cc iii c ii cc i.

in qua ſerie nonus quisque exemptus, & ejectus erat judæus. Sed Inſtitutionum noſtrarum brevitas non patitur hiſce nos diutius immorari.

Aliæ denique ſunt ſpecies proportionis, quæ *Arithmeticam practicam* potiſſimum ſpectant, nempe: regula *Societatis*, *Alligationis*, & *Falſi*, quas compendio abſolvemus.

## CAPUT XI.

### De Regulis *Societatis*, *Alligationis*, & *Falſi*.

§. 117. REgula *Societatis* eſt, quæ damnum vel lucrum æquatione inter eos partitur, qui ſymbolam ad Societatem contulerunt. Fit eo modo, quo regula *Trium*.

### PROPOSITIO I.

§. 118. TRes mercatores *Societatem* pro tractandis commerciis iniverunt: *primus* A contulit 1400 fl. *ſecundus* B 950 fl. *Tertius* C 720 fl. lucrati ſunt autem 1000 fl. Quæritur, quantum cuivis pro ratione collati peculii ex lucro obvenire debeat?

Omnium *trium* mercatorum ſymbolæ addantur (§. 24.) prodibitque factum 3070. Jam per *regulam trium* dic: 3070 — 1000 — 1400 (§. 79.) & operatione facta habebitur lucrum

*primi-*

*primi* A nempe 456 $\frac{80}{3070}$ fl. Repete operationem secundo: 3070 — 1000 — 720, & prodibit lucrum *secundi* B 234 $\frac{1620}{3070}$ fl. Denique tertio operationem repetendo, reperies lucrum *tertii* C 309 $\frac{1370}{3070}$ fl. Jam vero, additis fractionum numeratoribus, habebitur totus florenus. Adde etiam florenos, & reperies 999, adjectoque illo ex fractionibus prodeunte erunt 1000 fl.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1400 A | | | | | |
| 720 B | | | 1400 | — | 456 $\frac{80}{3070}$ |
| 950 C | | | | | |
| 3070 | --- | 1000 | 720 | — | 234 $\frac{1620}{3070}$ |
| | | | 950 | — | 309 $\frac{1370}{3070}$ |

§. 119. SI accedant circumstantiæ certi temporis v. g. A contribuit 1400 fl. pro 2 annis. B 720 pro 3 annis. &c. Multiplica has temporis circumstantias cum ipsa pecunia, & operare prout in regula Proportionis (§. 79.)

§. 120. REgula *Alligationis* est, quæ diversi generis, & precii res alligat, atque commiscet, & precium, mixtis partibus correspondens, indicat. Seu: docet, quantum e singulis diversi precii rebus misceri debeat, ut certo quopiam precio divendi possint. v. g. Vellet caupo, habens duas vini sortes, quarum unius mensura valet 24, alterius vero 16 cruciferos, vendere cuidam emptori vinum, petenti unam urnam, id est 42 mensuras, sed tali precio, ut una mensura 18 cruciferis væneat. Jam quæritur: quantum ex singulis duplicis vini sortibus caupo in unam urnam commiscere debeat: ut sine suo damno, & etiam citra emptoris deceptionem in negocio versetur? Fit itaque operatio juxta sequentem *hypothesim*.

§. 121. NUmeri duo commiscendi ordine, alter infra alterum adscribantur; in sinistimo autem latere note-

M tur

tur precium ſeu numerus determinatus eo loco, ubi inter majorem, & minorem mediat. Ad dextram pone *differentias* inter numeros oppoſitos, & numerum determinatum ſiniſtimum, ſic, ut *exceſſus* majoris numeri ad dextram minoris numeri ponatur; *defectus* vero minoris ad dextram majoris. Addantur hæ *differentiæ*, ut unam ſummam efficiant, fiatque *regula trium*. Sit Problema reſolvendum mox (§. 120.) inſinuatum.

Precium vini ordine alterum inſra alterum adſcribatur nempe 24, & 16, ſiniſtrorſum notetur *precium medians* nempe 18. *Defectus* numeri minoris 16 reſpectu majoris 18 nempe 2 alligetur ad dextram numeri majoris 24; & rurſus *exceſſus* majoris numeri 24 reſpectu 18 nempe 6 ponatur dextrorſum ad numerum minorem 16. Hæ duæ *differentiæ* 2 + 6 = 8. Jam vero, quia ex duplici hoc vino una urna, id eſt 42 menſuræ commiſceri debent, fiat *regula trium* dicendo: 8 dant 42 menſuras, quotnam menſuras dabunt 2? & prodibit numerus menſurarum, quæ ex ſorte 24 cruciferorum admiſceri debent, nempe 10 $\frac{1}{2}$. Altera rurſus fiat poſitio, dicendo: 8 dant 42, quotnam menſuras dabunt 6? habebiturque numerus menſurarum ex ſorte vini 16 cruciferorum, quæ commiſceri debeant, nempe 31 $\frac{1}{2}$. Denique 10 $\frac{1}{2}$ + 31 $\frac{1}{2}$ = 42.

$$\begin{array}{c|c|c} & 24 & 2 \\ 18 & & \\ & 16 & 6 \\ \hline & & 8 \end{array}$$

Menſuræ

8 ---- 42 ---- 2 ---- 10 $\frac{4}{8}$ *ſeu* $\frac{1}{2}$

8 ---- 42 ---- 6 ---- 31 $\frac{4}{8}$ *ſeu* $\frac{1}{2}$

42

§. 122. PRoba hac ratione fit: precium unius urnæ ſeu 42 menſurarum, quarum ſingulæ conſtent 18 cruciferos,

feros, inquiratur, in est: 42 × 18 = 756 crucif. seu 12 fl. 36 cr. Porro 10 ½ mensuræ vini, quarum singulæ valeant 24 cr., constabunt 252 cr. seu 4 fl. 12 cr. Mensuræ vero 31 ½, per 16 cr. constituunt summam 504 cr. seu 8. fl. 24 cr. Quæ duæ summæ 4 fl. 12 cr. + 8 fl. 24 cr. = 12 fl. 36 cr. Ita ut mensura, ex his duplicis vini sortibus commixta, pariter 18 cr. valeat. *Quod erat faciendum.*

§. 123. QUod si plures quam duo numeri alligandi seu commiscendi forent, tunc numerus ille *medians* ponitur eo loco, ubi inter majores, & minores mediat. Si plures sint numeri *excedentes*, & unus tantum *deficiens*, tum omnium majorum numerorum *differentiæ* adjunguntur numero *deficienti* v. g.

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 24 | 2 |
| | 20 | 2 |
| | 16 | 6. 2. |
| | | 12 |

Sint tres vini sortes commiscendæ, quarum unius mensura valeat 24 cr. alterius 20 cr. tertii 16 cr. debeat ex his una urna vini commisceri, cujus mensura sit 18 cr. Itaque *defectus* numeri 16 respectu numeri 18 nempe 2 apponitur ad utrumqne numerum majorem 24, & 20. Et vicissim: excessus uterque numerorum majorum 24, & 20 respectu 18, nimirum 6, & 2 apponitur ad numerum minorem, fitque *regula trium* 12 --- 42 mensuras --- 8. (§. 79.) factum dabit numerum mensurarum ex sorte vini per 16. cr. nempe 28. Sicque de cæteris. Sin vero plures sint *deficientes*, quam *excedentes* numeri, tunc *differentia* omnis minorum numerorum additur numero majori, *differentia* autem majoris numeri adscribitur singulis minoribus v. g. sit urna vini commiscenda, cujus una mensura valeat 18 cr. ex triplici sorte vini: cujus unius mensura 24 cr., alterius 16, tertii 12 æstimatur. *Differentiæ* minorum numerorum nempe 6, & 2 id est 8 adscribantur majori numero 24; *excessus* vero majoris numeri 24 respectu 18, id est 6. apponitur utrique minori. Additæ omnes differentiæ 8 + 6 + 6 = 20. Fiat itaque operatio (§. 121.)

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 24 | 6. 2. |
| | 16 | 6 |
| | 12 | 6 |
| | | 20. |

§. 124. DEnique *alligationes* in pluribus numeris diverſimode deſignari poſſunt. v.g. Velles quatuor ſortes vini commiſcere, quarum *primæ* ſortis menſura 24 cr. *ſecundæ* 18. *tertiæ* 12, *quartæ* demum 8 cr. conſtat, ut ex his vinum commiſceatur, quod valeat 16 cr. Duplici modo hæc alligare poteris.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 24 | 4 | *vel* | 16 | 24 | 8 |
| | 18 | 8 | | | 18 | 4 |
| | 12 | 8 | | | 12 | 2 |
| | 8 | 2 | | | 8 | 8 |
| | | 22 | | | | 22 |

§. 125. VIſum eſt, & hoc loco commemorare regulam illam, dictam *cæci* ſeu *virginum*, eo quod in ea cæcis veluti manuductionibus operari ſit neceſſum. Docet hæc regula certas ſpecies diſcriminare v.g. emptæ ſunt carnes quadruplicis ſortis, aprina libra per 10 cr. vitulina 8 cr. bubula 6. cr. vervecina 4 cr., atque pro 62 libris expenſi ſunt 6 fl. 48 cr. Quæritur: qnotnam libræ ex ſingulis ſortibus emptæ ſint?

Apponantur ſiniſtrorſum precia, *minimum* vero pretium, inferius poſitum, nempe 4 a ſingulis ſubtrahatur, id quod remanet, dextrorſum adſcribatur. Jam pretium 6 fl. 48 cr. reducantur in meros cruciferos, nempe 408 cr. Numerus vero librarum 62 multiplicetur per minimum inferius precium 4, & erit factum 248. Hoc ſubducatur a precio 408, reſiduum 160. Porro hæc 160 per tres illos differentiales numeros, qui remanſerunt 6, 4, 2 tanquam per diviſores ſucceſſive dividantur, donec, cæco modo diviſionem per 3 hos diviſores continuando, videas in fine omnia diſparere, & nihil remanere. Divide itaque primo nume-

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 408 | |
| | | 248 | |
| 10 | 6 | - - - - 160 | 12 |
| 8 | 4 | - - - - 88 | 14 |
| 6 | 2 | - - - - 32 | 16 |
| 4 | 0 | | |
| | | | 42 |

merum 160 per 6 cæco modo duodecies, & remanebunt 88; hæc divide per 4 decies quater, remanebuntque 32; hæc 32 tandem divide per 2, & erit *quotus* 16 nullo remanente. Igitur 12 libræ aprinæ, 14 vitulinæ, & 16 bubulæ carnis additæ efficiunt 42. At vero emptæ ſunt libræ carnium univerſim 62 libræ; Itaque $62 - 42 = 20$. ut 20 libras vervecinæ carnis neceſſum ſit aliis adjicere.

§. 126. PRoba fit: $12 \times 10 = 120$. $14 \times 8 = 112$. $16 \times 6 = 96$. $20 \times 4 = 80$. Numeri autem $120 + 112 + 96 + 80$ cruciferorum $= 408$ cr. ſeu 6 fl. 48 cr.

Verumtamen incerta eſt hujus regulæ operatio, vehementerque ab arithmetica infallibilitate abludit; tum quod diviſionem cæco prorſus modo inſtituere neceſſum ſit: tum quod numerus variarum, & variarum ſpecierum poſſit aliter, & aliter variari. Dividatur numerus 160 per 6 duodecies, remanentia 88 per 4 rurſus duodecies, remanentia tandem 40 per 2 vigeſies; $12 + 12 + 20 = 44$ libris carnium. Sed debent eſſe libræ 62; igitur $62 - 44 = 18$. tot enim præterea emptæ fuiſſe cenſeri debebunt libræ carnis vervecinæ. Quæ omnia, ſi ſuis quæque pretiis æſtimentur, prodibunt pariter 408 cr. ſeu 6 fl. 48 cr. ita ut nihil certi reſcire liceat de numero librarum determinatæ cujusque ſortis. Ideoque regulam hanc inſufficientem vel commemoraſſe ſufficiat. Ad regulam *falſi* eſt accedendum.

§. 127. REgula *falſi* eſt, quæ ex pluribus numeris falſis docet verum elicere. Eſt duplex: regula *falſi ſimplicis poſitionis*, & regula *falſi duplicis poſitionis*. Regula *falſi ſimplicis poſitionis* ex una ſola poſitione alterum verum numerum deducit. Regula *falſi duplicis poſitionis*, duas adhibet poſitiones, ut ex numeris falſis aſſumptis *verus* tandem eruatur.

§. 128. OMnes quidem Propoſitiones, quæ ad regulam *falſi* referuntur, poſſunt reſolvi per regulam *duplicis*

*cis poſitionis*; at non omnes propoſitiones reſolventur per regulam *ſimplicis poſitionis*; Unde regula *ſimplicis poſitionis* brevioris quidem operationis eſt; regula tamen *duplicis poſitionis* ad plures ſeſe extendit propoſitiones reſolvendas, eſtque plane neceſſum eam nonnunquam adhiberi v. g. cum numerus quidam *determinatus* numerum alterum *ignotum*, & inquirendum ingreditur, ut mox dicetur.

§. 129. REgula *ſimplicis poſitionis* aſſumit ſibi numerum *arbitrarium* loco illius, qui inquiritur. Cum hoc numero *arbitrario* proceditur juxta Propoſitionis ſeriem: Quod ſi numerum talem *arbitrarium* ſortuito aſſumpſeris, qui verus ſimul ſit, ulteriori regulæ uſu opus non eſt. Quodſi vero numerus ille *arbitrarius* vel major ſit, vel minor, quam oporteat, tum regulam *trium* adhibebis (§. 79.) primo loco ponendo *factum* prodiens ex numero arbitrario aſſumpto: ſecundo loco ipſum numerum arbitrarium: tertio demum loco *numerus datus* in quæſtione, & *factum* ex regula *trium* proveniens, numerum quæſitum exhibebit. Sit.

## PROPOSITIO II.

§. 130. INterrogatur Cajus: quotnam florenos pro annuo victu perſolvat? interroganti reſpodet: ſi medietati hujus pecuniæ adderem $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$. tum darem 78 florenos. Quæritur igitur: quotnam florenos revera annue perſolverit.

Finge numerum *arbitrarium* v. g. 12. cujus medietas $= 6$; tertia vero pars $= 4$, & quarta pars $= 3$. Jam $6 + 4 + 3 = 13$. Igitur 13 numerus *falſus* eſt; ut vero in cognitionem veri deveniatur, fac regulam *proportionis* dicendo: 13 proveniunt ex 12, ex quo numero prodibunt 78 floreni? *Factum* prodibit nempe *verus numerus* 72, tot enim pro annuo victu Cajus perſolvit. Nam 13. 12 : : 78. 72. *Quod erat demonſtrandum*.

§. 131.

§. 131. PRoba fit, dum *factum*, ex instituta regula *trium* proveniens, juxta indicatam seriem dividitur; veluti in data mox propositione: ex 72 accipiatur medium, id est 36. tertia illius pars est 24. quarta pars est 18. Quæ omnia si insimul addideris, rursus prodibit *falsus* numerus primum indicatus, nempe: 78.

## PROPOSITIO III.

§. 132. QUatuor sunt scribæ, habentes diversam in describendo velocitatem. *Primus* die uno describit 7 phyliras, *secundus* 6, *tertius* 4, *quartus* 3. Sint igitur describendæ 360 phyliræ, quæritur: quot diebus hi scribæ collocata opera dictas phyliras sint descripturi?

Assume numerum dierum *arbitrarium* v. g. 5. Igitur *primus* scriba 5 dierum spacio describet phyliras 35. *secundus* 30, *tertius* 20, *quartus* 15. Jam $35 + 30 + 20 + 15 = 100$; debebant autem esse phyliræ 360; igitur numerus dierum 5 *falsus* est. Itaque ut *verus* eruatur, fiat regula *proportionis* (§. 79.) 100 phyliræ describuntur intra 5 dies, intra quot dies describentur 360? productum habebis 18 numerum *verum*; tot quippe dies quatuor illi scribæ insument.

Proba fit modo mox insinuato (§. 131.)

§. 133. REgula *falsi duplicis positionis* hoc modo peragitur: primo numerus *arbitrarius* assumitur, cum hoc agitur juxta quæstionis seriem; si *factum* prodeat + vel — quam oporteret, tum assumitur alter numerus *arbitrarius*, & cum eodem pariter agitur juxta seriem quæstionis. Si & ex isto secundo *arbitrario* numero falsus proveniat, vel per excessum, vel per defectum, tum pone sinistrorsum utrumque numerum *arbitrarium*, alterum infra alterum; dextrorsum vero nota pariter errorem utriusque, vel per + vel per —, ac multiplicentur decussatim errores cum numeris *arbitrariis*. Si errores fuerint similes, id est uterque vel per *excessum*, vel per *defectum*, tum *diffe-*

*differentia* productorum ex multiplicatione, dividatur per *differentiam* errorum : Quod si vero errores fuerint dissimiles, id est: alter +, alter —, tunc *ambo producta* ex multiplicatione *errorum*, & numerorum *arbitrariorum* addita dividantur per summam additam utriusque erroris, & *quotus* exhibebit numerum quæsitum.

## PROPOSITIO IV.

§. 134. TRibus pauperibus legantur per testamentum 47 aurei; hac cum testatoris expressione, ut secundus pauper B accipiat 5 aureis +, quam primus pauper A; tertius vero C tantundem, quantum secundus B, & insuper 10 aureos. Quæritur: quantum singuli horum pauperum A, B, C obtinuerint?

Accipe numerum arbitrarium pro paupere A fuisse 4 aureos; igitur B accepit 9. C vero 19. Hi numeri 4 + 9 + 19 = 32. Atqui debebant esse 47. Itaque error est — 15. Iterum assume alterum numerum *arbitrarium*, & tribue pauperi A 7 aureos, obvenient pauperi B 12, & pauperi C 22. Numeri aureorum 7 + 12 + 22 = 41. Ast debebant esse 47. Ergo alter error — 6. Pone itaque utrumque numerum *arbitrarium* sinistrorsum 4, & 7. dextrorsum autem utriusque *errorem* 15, & 6: tum multiplica decussatim numeros *arbitrarios* cum *erroribus*, & habebis duplex productum 24, & 105; Quia vero *errores* similes sunt: uterq; nimirum per defectum; igitur minus productum 23 subtrahe a 105, habebisque *differentiam* productorum 81. Hanc *differentiam* divide per *differentiam* 9 (quippe inter 15, & 6 est *differentia* 9) & prodibit *quotus* 9. Tot nempe aureos *primus* pauper A percepit, *secundus* B 14, *tertius* C 24. & 9 + 14 + 24 = 47. *Quod erat faciendum.*

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 15 \\ & \times & \qquad > 9 \\ 7 & - & 6 \\ \hline 24 & & 105 \\ & & 24 \\ 9 & | & 81 \ | \ 9. \end{array}$$

PRO-

## PROPOSITIO V.

§. 135. INterrogatus quidam: quotnam libros habeat domi suæ? ſciſcitanti reponit: ſi adhuc medietatem, & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ numeri librorum, atque præterea 10 haberem, haberem libros 60. Quotnam libros revera habeat?

Adſcribe primum numerum *arbitrarium* 12, huic adde medietatem 6, & unam tertiam, id eſt 4, cum una quarta, id eſt 3. Ac tandem adjice 10, prodibitque ex hac additione numerus 35. At debebant prodire 60. Igitur *error* per defectum 25. Rurſum aſſume alterum numerum *arbitrarium* v. g. 36, adde huic $\frac{1}{2}$ nempe 18, item $\frac{1}{3}$, id eſt 12, ac tandem $\frac{1}{4}$, id eſt 9, adjunctis 10 habebitur numerus 85. Debebant autem eſſe 60; igitur error per exceſſum 25.

12 — 25 . . . 25
×
36 + 25 . . . 25
300 900 50
300
50 | 1200 | 24 *Numerus librorum.*

Multiplica decuſſatim numeros *arbitrarios* cum *erroribus*, & prodibunt numeri 300, & 900. Quoniam vero errores ſunt diſſimiles: alter nimirum per *defectum*, alter per *exceſſum*; ideo *productum* ex utriusque multiplicatione nempe 300, & 900 adduntur (§. 133), eruntque 1200. Hunc numerum 1200 divide per ſummam additam utriusque erroris, nempe per 50, & proveniet *quotus* 24, qui indicabit *verum* numerum librorum; nam medietas, id eſt 12 + $\frac{1}{3}$, id eſt 8 + $\frac{1}{4}$ id eſt 6 + 10 = 60. *Quod erat faciendum.*

§. 136. DEmonſtratio & hujus, & mox antecedentis propoſitionis fundatur in regula proportionis (§. 79.) & quidem quoad priorem propoſitionem: ſicut ſe habet utriusque per defectum erroris *differentia* 9, ad aſſumptorum falſorum numerorum 4 & 7 *differentiam* 3. Ita ſe habebit *defectus* erroris 15. ad *defectum* quæſitum pro ſupplendo primo numero falſo 4. Operatione facta prodibit numerus 5. Igitur 5 + 4 constituunt verum aureorum numerum 9. Item : sicut se habet *differentia* 9 ad falsorum numerorum *differentiam* 3; ita defectus 6 ad defectum quæsitum pro numero falso 7 supplendo. Factum erit 2 : rursus 7, & 2 constituunt 9. seu : 9. 3 : : 15. 4. = 5. 4 + 5 = 9. Item 9. 3 : : 6. 7. = 2. 7 + 2 = 9 *verus* igitur aureorum numerus est 9.

Pro ultima vero propositione : sicut se habet *differentia* per defectum 25. cum addita *differentia* per excessum pariter 25 = 50 ad falsos numeros 12 + 36 = 48, ita se habet tam *defectus* 25 ad *defectum* quæsitum pro 14, quam *excessus* 25 ad *excessum* numeri 36. *Factum* ex utroque proveniet 24. Q. E. D.

## SCHOLION

§. 137. UTrumque mox positum problema nequit resolvi per regulam *falsi simplicis positionis*, sed debet necessario regula *falsi duplicis positionis* adhiberi; quia nempe numerus adjectus 10 afficit, seu ingreditur rationem partium ignotarum, & quærendarum, nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{4}$, id est : numerus adjectus 10 summam ex partibus illis, seu fractionibus conflatam majorem reddit; At vero, quando aliquis numerus adjicitur, qui non tangit partes aliquotas, tunc potest fieri problema per simplicem positionem v. g. quispiam habuit bursam pecuniæ, medietatem hujus pecuniæ elargitus est pauperibus, $\frac{1}{4}$ impendit in res sacras, & $\frac{1}{5}$ in suas animi remissiones; remanserunt eidem 5 floreni. Quæritur : quotnam floreni in bursa fuerint? Quinque, qui remanserut, floreni, non afficiunt partes aliquotas, sed tantum exprimunt illos florenos, qui ablatis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{5}$ remanserunt. Igitur hoc problema fieri potest per *simplicem positionem falsi*, assumendo primum arbitrarium numerum 20. Hujus medietas = 10, $\frac{1}{4}$ = 5, $\frac{1}{5}$ = 4. Additi hi numeri 10 + 5 + 4 = 19, adeoque ex hoc arbitrario numero remaneret duntaxat 1; ast remanere deberent 5; ideo verus numerus inquirendus est per regulam *Trium* dicendo : 1 remanet ex 20 post demptas partes; dum

dum remanent 5, quis erit numerus poſitus? factaque operatione habebitur numerus verus 100; etenim $\frac{1}{2} = 50$, $\frac{1}{4} = 25$, & $\frac{1}{5} = 20$ ſimul addita producunt *factum* 95, adeoque remanent 5. *Quod erat inquirendum.*

## PROPOSITIO VI.

§. 138. TRes libri empti ſunt. A, & B conſtabant 50 florenos, BC conſtabant 70 florenos; AC vero 60 florenos. Quæritur: qualenam precium fuerit ſingulorum, & omnium ſimul?

Propoſitio reſolvitur per duplicem poſitionem: aſſume primum numerum *arbitrarium* pro A 16, debebit itaque B eſſe 34, C 36 florenorum, & A & C ſimul 52 florenorum; ſed debebant eſſe 60 fl. Igitur error occurrit per *defectum* 8 florenorum. Aſſume ſecundo numerum *arbitrarium* pro A 18 fl. erit B 32, & C 38 flor. A autem, & C ſimul 56 florenorum. At, debebant hi ultimi duo valere florenos 60. Igitur rurſus error per defectum 4. Jam itaque operando juxta §. 133. deduceris in cognitionem: librum A 20, B 30, C 40 fl. omnes vero ſimul 90 florenos conſtitiſſe. *Quod erat faciendum.*

## COROLLARIUM.

§. 139. SUnt conſimiles fere propoſitiones, quæ reſolvi poſſunt per *extractionem quadratam* § 147. v.g. ſint duo fratres, quorum A 6 annis ſenior eſt fratre B; multiplicati tamen invicem anni eorum faciunt productum 1287. Quæritur: quot annorum ſit utriusque ſingilatim ætas?

Aſſumatur dimidium *differentiæ* annorum 6, nempe 3. Hoc quadretur, & prodibunt 9. Hæc 9 addantur ſummæ inſinuatæ 1287, habebiturque *factum* 1296. Ex hoc numero extrahatur *radix quadrata* (§. 147). nempe 36. Porro medium *differentiæ* annorum nempe 3 addantur huic *radici* 36. & prodibit ætas fratris ſenioris A nempe 39 anni. Quod ſi ex his 39 dempſeris 6 annos, habebis ætatem junioris fratris B, nempe 33 annos.

$$\begin{array}{rr|rr} \frac{6}{2} & 1287 & & \\ & 9 & & \\ \hline \frac{3}{9} & 1296 & \textit{Radix} & 36 \\ & & & 3 \\ \cline{4-4} & & & 39\ \text{A.} \\ & & & 6 \\ \cline{4-4} & & & 33\ \text{B.} \end{array}$$

Nam ad hoc, ut *radix* ex toto numero quadrato extrahi queat, debet & quadratum numeri 6 admiſceri; Quoniam autem exceſſus 6 unum tantummodo fratrem reſpicit; igitur medietas 6 nempe 3 quadrantur. $1287 + 9 = 1296$. radix 36. Porro quemadmodum numerus quadratus duplici ex ætate utriusque fratris componitur, ita & exceſſus 6 in duas diſpeſci partes debet, ſic ut $\frac{1}{2} = 3$ adjiciatur *radici* 36 pro A, & $\frac{1}{2} = 3$ dematur numero 36 pro B. Erit itaque ætas ſenioris 39, & junioris 33. *Quod erat demonſtrandum.*

Proba fit: $39 \times 33 = 1287$.

# CAPUT XII.

## De Extractionibus Radicum quadratarum, & cubicarum.

§ 140. *Numerus quadratus* eſt ſumma, quæ orta eſt ex multiplicatione numeri per ſemetipſum v. g. $5 \times 5 = 25$ q. Item $4 \times 4 = 16$ q. Dicitur vero *numerus quadratus* ob analogiam, quam habet ad *quadratum Geometricum* (§. 162 *Geom.*) Numeri autem, ex quorum multiplicatione fit *quadratus numerus*, dicuntur *radix*, ſeu analogice ad quadratum geometrimetricum *latus*. Eſt itaque extractio *radicis quadratæ* e quodam numero : *inventio illius numeri , qui bis , ter , quater , aut ſæpius in ſe ductus numerum majorem produxit.*

§. 141. Signum *quadrati* eſt q. v. g. CB q. id eſt : lateris CB quadratum. Signum cubi eſt c. v. g. E c. id eſt : cubus lateris E. *Radicis quadratæ* ſignum eſt R, ſeu $\sqrt{}$ v. g. $\sqrt{}$ A + B id eſt : ſi quantitas A & B in unam ſummam redigantur , extrahatur *radix quadrata*. Vel $\sqrt{}$ 25 id eſt : ſi area quadrati ſit 25, erit radix quadrata 5. *Radicis cubicæ* ſignum eſt R c, vel $\sqrt{}$ c. v. g. $\sqrt{}$ 216. id eſt : ſi cubus fuerit 216. radix illius erit 6.

§. 142. C*ubus*, ſeu *numerus cubicus* eſt, qui producitur , dum quadratus numerus per ſuam radicem multiplicatur v. g. 125 ex multiplicatione 25 per 5. Dicitur autem *numerus cubicus* ob analogiam ad *cubum geometricum* , qui æqualiter *longus, latus*, & *profundus* eſt. Ob eandem analogiam dicitur *radix cubica* etiam latus cubi. (§. 349 *Geom.*) Quod ſi *cubus* ipſe v. g. 125 per ſuam radicem 5 multiplicetur , oritur numerus *quadrato-quadratus*. Si rurſus *quadrato-quadratus* per eandem radicem multiplicetur, prodibit numerus *quadrato-cubicus* &c. Quoniam vero iſtiusmodi multiplicatio continuari poteſt in infinitum, igitur multiplicationes illæ generali quodam nomine *Poteſtates*, *Potentiæ*, aut *dignitates* appellantur.

§. 143. Eſt itaque *potentia*, ſeu *dignitas* illud productum, quod habetur ex aliquo numero, aliquoties per ſe ipſum multiplicato. Sic v. g. numerus 2 eſt *prima potentia*, ſeu *dignitas*, aut *radix* , reſpectu nimirum habito ad ſubſequentes ; quemadmodum enim unitas ad *radicem* , ita ſe habet radix ad *quadratum*. Productum ex $2 \times 2 = 4$ vocatur *dignitas ſecunda*. Productum ex $4 \times 2 = 8$ dicitur tertia dignitas. Productum ex $8 \times 2 = 16$ vocatur *quarta dignitas* &c. Hi gradus dignitatum vocantur proprie *exponentes dignitatum* , & exprimuntur per numeros , indicantes , quoties datam *dignitatem* dividere neceſſum

ceſſum ſit, antequam ad unitatem perveniatur. Itaque *exponens* quadrati eſt adjunctus numerus 2, *exponens* cubi eſt 3 &c. Apud algebraicos notantur *exponentes potentiarum* hoc modo v. g. $\sqrt[2]{\ }$ ſignificat *radicem ſecundam* ſeu *quadratam*, $\sqrt[3]{\ }$ radicem *tertiam* ſeu cubicam &c.

§. 144. *RAdix* igitur alicujus potentiæ eſt ſimpliciſſimus numerus ſeu quantitas, quæ certum aliquem numerum multiplicat per ſemetipſum. Trahit autem omnis radix nomen ſuum a *potentia*, cui attribuitur v. g. radix *quadrati* ſeu radix *ſecundæ potentiæ* eſt *radix quadrata* ſeu $a^2$. radix *cubi* ſeu *tertiæ potentiæ* eſt radix cubica ſeu $a^3$: ita porro de *radice quarta*, *quinta* &c. Quod ſi aliquis *radicem cubicam* ex 125 extrahere velit, ille itaque inquirere debet: quisnam ille numerus ſit, qui primum in ſeipſum ductus, tum vero rurſus ipſum quadratum multiplicans conſtituat 125. ac deprehendet 5.

§. 145. EXtractionibus *quadratis*, & *cubicis* expedit annexam tabellam præmittere. Quod ſi numerus quadratus non ſit, v. g. 60. accipitur ex tabella *radix* proxime minor, nempe 7; hæc in ſe ducta producit 49, & hoc eſt *quadratum* maximum, contentum in numero 60. Cætera 11 ex 60 ſuperfluunt.

| Radix | Quadr. | Cubus. |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 16 | 64 |
| 5 | 25 | 125 |
| 6 | 36 | 216 |
| 7 | 49 | 343 |
| 8 | 64 | 512 |
| 9 | 81 | 729 |

§. 146. POrro *radices* pro diverſitate partium componentium diverſa etiam nomina ſortiuntur: aliquæ dicuntur *binomiæ*, aliæ *trinomiæ*, aliæ demum *polynomiæ*. v. g. 28 eſt radix *binomia*, cum ex duabus *decimis*, & 8 *unitatibus* conſtet, ſeu 20 + 8. Sic 645 eſt radix *Trinomia*, quia per tres poſitiones

nes exprimitur, idemque valet, ac 600 + 40 + 5. 1219 eſt radix *Quadrinomia* = 1000 + 200 + 10 + 9. &c. Omnes autem quæque *radices*, quæ plures quam duas poſitiones habent, *polynomiæ* dicuntur.

*Hypotheſis* extrahendi quadratam radicem eſt ſequens.

## PROPOSITIO I.

§. 147. Ex dato numero 24029604 *radicem quadratam* extrahere.

I. Poſt binos ſemper numeros a dextris incipiendo punctulum ponatur.

II. Incipiendo a ſiniſtris nempe a 24, qui duo numeri ob nullum punctum interjacens ad ſe invicem pertinent; quæratur hujus radix proxima minor nempe 4. Quadratus numerus radicis 4 eſt 16. Hæc 16 ſubtrahantur a 24. & remanebunt 8. priora 24 deleantur.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | | | |
| ~~24~~. | ~~02~~. | ~~96~~. | ~~04~~ | 4902. |
| ~~16~~ | .. | .. | .. | |
| | 89 | .. | .. | |
| | 9 | .. | .. | |
| | 801 | .. | .. | |
| | 9 | 80 | .. | |
| | | 98 | 02 | |
| | | | 2 | |
| | ~~1~~ | ~~96~~ | ~~04~~ | |

III. Quotus nempe 4 duplicetur, & erunt 8. Hic numerus 8 ponatur infra 0, ubi nimirum *ſecunda ſeries* incipit; ac dicatur: 8 continetur in ſuperioribus 80 novies; 9 itaque ponantur ad priorem quotum 4, & ſimul ad 8, ut loco 8 ſint 89. 89 × 9 = 801. Subtractione facta a ſuperiori numero 802, remanet 1, ſuperiores numeri 802 deleantur ductis lineolis

IV.

IV. Rurſus duplicentur quoti 49, eruntque 98. Hi duo numeri collocentur infra ſuperiores duos 19, & quoniam 19 per 98 dividi nequeunt, ideo o ponatur pro tertio *quoto* ut ſint 490, & ſimul etiam o apponitur numero 98, ut ſint 980. Proceditur tandem ad *ultimam ſeriem*, & duplicantur *quoti* 490, eritque *factum* 980, quod ponitur infra *ultimam ſeriem* ſuperiorum numerorum 1960. Jam vero dicatur: 9 continentur in 19, vel 98 continentur in 196 bis; binarius itaque numerus ponatur pro quarto *quoto*, & ſimul apponatur idem numerus 2 ad 980, ut ſint 9802. 9802 × 2 = 19604. Quod *factum* ſi a ſuperioribus ſubtraxeris, nihil remanebit; adeo, ut numeri quadrati 24029604 radix ſit 4902. Hac methodo aliæ propoſitiones reſolvuntur.

§. 148. Est hæc *radicis quadratæ* extractio, ut apparet, quædam ſpecies *diviſionis*, hoc ſolum cum diſcrimine, quod in ſimplici diviſione, *diviſor* ſit numerus datus; in *extractione* vero radicis inquiri debeat, & quidem per plures partes, quæ radicem conſtituunt.

Proba fit, cum radix 4902 per ſemetipſam multiplicatur; nam 4902 × 4902 = 24029604 nempe numero *quadrato*.

## PROPOSITIO II.

§. 149. *Radicem quadratam* ex hoc numero 43722. extrahere.

*Radix quadrata* numeri 4 eſt 2. Hæc radix 2 × 2 = 4. Hæc 4 ab illis 4 numeri dividendi ſubtracta nihil relinquunt. Igitur pro *quoto* ſecundo ponatur o. Tandem *quoti* 20 pro *tertia ſerie* numeri dividendi duplicentur, eruntque 40. 4 in 37 novies

| | |
|---|---|
| 41 | |
| 4.37.22 | 209 |
| 40 . | |
| 409 | |
| 9 | |
| 36 81 | |

duci

duci possunt; igitur pro tertio *quoto* ponatur numerus 9. & simul adjungatur etiam divisori, ut sint 409. $409 \times 9 = 3681$; quæ dum a superiori numero 3722 subtrahuntur, remanebunt 41. Quod argumento est: numerum datum 43722 non posse in *quadratum* redigi; Itaque si quis *quadratam* aream 43722 pedibus constantem designari juberet, remanerent utique ex illis pedibus 41. quibus 41. pedibus demptis, numerus fit *quadratus rationalis* 43681. Neque ullus numerus quadratus esse potest, in cujus termino vel 2 vel 3 vel 7 vel 8 vel una o deprehandatur; cum quadrati numeri vel unitate vel 4. vel 5 vel 6 vel 9 vel etiam duabus o o passim terminentur

§. 150. QUod si quis mallet dato numero 43722 tot pedes quadratos superaddere, ut in *quadrati* formatione, atque in extractione *radicis* seu *lateris quadrati* nihil remaneret, ille deberet inventam *radicem* 209 duplicare, ut sint 418; tum addere 1, ut sit numerus proveniens 419: addere demum hunc numerum 419 priori *rationali numero quadrato* 43681, & habebitur *factum* 44100. Hic numerus proximus *rationalis quadratus* est priori *rationali quadrato* 43681, habetque *radicem quadratam* 210.

§. 151. SImiliter, si quæratur numeri, proxime post 9 subsequentis in Tabula (§. 145.) *numerus quadratus*, duplicetur *numeri quadrati* 9 *radix* nempe 3, ut cum addita unitate faciat 7. Hæc 7 adde numero 9, & habebis proximum *quadratum rationalem numerum* nempe 16, cujus *radix* erit 4. Rursus si post 16 velis proximum *rationalem numerum quadratum*, duplica numeri 16 radicem 4, ut cum addita unitate efficiat 9. Hæc 9 adde priori *quadrato* nempe 16, & habebis proxime sequentem *numerum quadratum* 25, cujus *radix* sit 5. Et sic porro de cœteris in infinitum.

§. 152. PErmultæ propositiones aliæ resolvi possunt sola *extractione quadratæ radicis*. Veluti hæc: Cæsareani mi-

 lites

lites caſſam hoſtilem 66049 florenorum intercipiunt ; hanc ſummam ita inter ſe partiuntur, ut ſingulis quibusque tot floreni obtingant, quot numero ſunt milites intercipientes. Quæritur : quotnam revera milites fuerint, & quot florenos obtinuerint ſinguli eorum ?

Ex ſumma 66049 *radix quadrata* extrahatur (§. 147.) hæc erit 257. Tot igitur milites intercipientes extiterunt, totque florenorum portio erat ſingulorum.

Nam numerus quicunque, in ſe ipſum ductus', conſtituit *numerum quadratum*. Igitur ſi tot florenos quisque militum percepit, quot numero fuerunt milites, neceſſario debuit numerus militum, in numerum perceptorum a ſingulis florenorum duci, ut proveniat *numerus quadratus*: ſed *radix* nihil aliud eſt, quam numerus ille, qui in ſeipſum ducitur : ergo hic per *extractionem* (§. 147.) erutus numerum exhibebit, & militum, & florenorum a ſingulis perceptorum. Proba quippe fit $257 \times 257 = 66049$.

## PROPOSITIO III.

§. 153. *Radicem cubicam* ex dato numero 14 706 125 extrahere.

I. A dextris incipiendo ternos quosque numeros pnncto intercalabis, quæ puncta tot erunt membra futuræ *radicis cubicæ*, quot ordines numerorum beneficio intercalationis formabuntur.

II. Ex primi ordinis ſiniſtimo numero, nempe ex 14 qùære *radicem cubicam* in tabella (§. 145.) nempe 2; igitur 2 poſt numerum dividendum apponantur.

III.

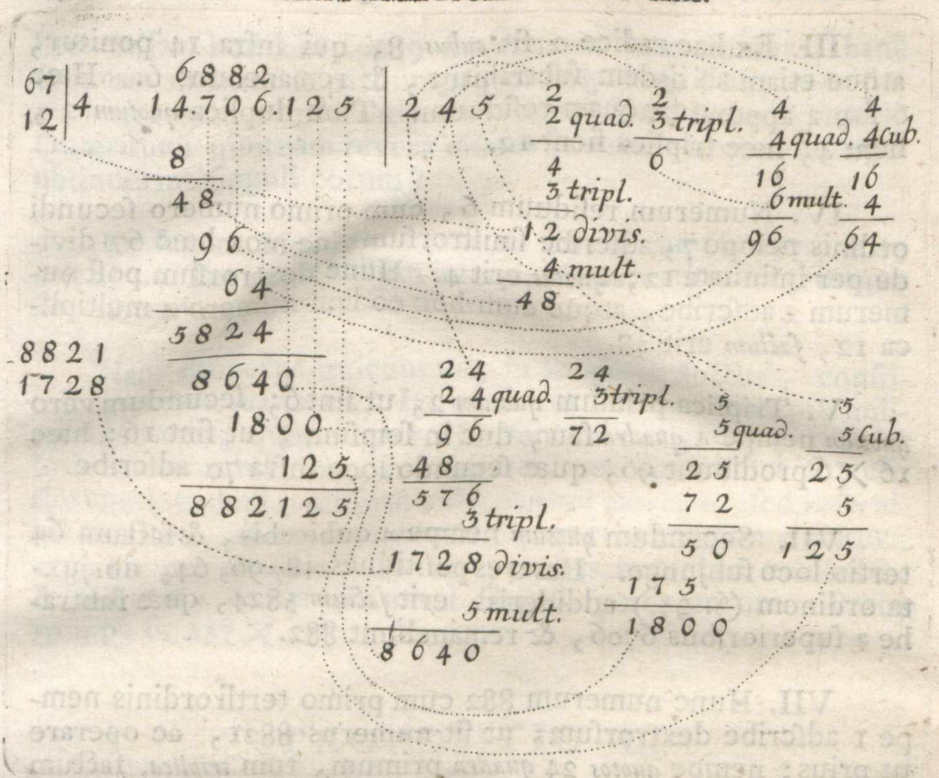
III. Ex hac radice 2 fit *cubus* 8, qui infra 14 ponitur, atque etiam ab iisdem ſubtrahitur, & remanebunt 6. Hæc 6 ſupra appone tanquam reſiduum. Tum duplica *quotum* 2, fient 4, hæc triplica fient 12.

IV. Numerum reſiduum 6, cum primo numero ſecundi ordinis nempe 7, adſcribe ſiniſtrorſum; ac mox hæc 67 divide per inſinuata 12; *quotus* erit 4. Hunc dextrorſum poſt numerum 2 adſcribe, atque cum hoc eodem numero 4 multiplica 12, *factum* erit 48.

V. Triplica primum *quotum* 2, ut ſint 6; ſecundum vero *quotum* nempe 4 *quadra* ſeu, duc in ſeipſum, ut ſint 16; hæc 16 $\times$ 6 prodibunt 96, quæ ſecundo loco infra 70 adſcribe.

VII. Secundum *quotum* nempe 4 cubicabis, & factum 64 tertio loco ſubjunge. Has tres poſitiones 48, 96, 64, ubi juxta ordinem (§. 24.) addideris, erit *factum* 5824, quæ ſubtrahe a ſuperioribus 6706, & remanebunt 882.

VII. Hunc numerum 882 cum primo tertii ordinis nempe 1 adſcribe dextrorſum, ut ſit numerus 8821, ac operare ut prius; nempe *quotos* 24 *quadra* primum, tum *triplica*, factum erit 1728. Hoc cum numero dividantur 8821, *quotus* erit 5. Scribantur itaque 5 poſt duos priores *quotos* 2, & 4. & cum iisdem 5 multiplicetur *diviſor* 1728; *factum* 8640 ponatur primo loco pro tertio numerorum ordine. Tum *triplicentur* 24, *factum* erit 72. Rurſus tertius *quotus* 5 *quadretur*, fient exinde 25. Hic numerus multiplicetur per 72, ac *factum* 1800 ponatur ſecundo loco. Denique tertius *quotus* 5 *cubicetur*, & factum 125 ponatur tertio loco, eoque res redibit, ut hi numeri invicem additi, atque a ſuperioribus 882125 ſubtracti, nihil reliquum faciant, atque ut *radix cubica* ſit 245. Quod ex ſequenti ſchemate elucet.




§. 154. Quod si vero post ultimam subtractionem quidam numerus remaneret, id indicat: numerum datum exacte *cubicum* non esse; ac proinde *radicem* inventam non esse numeri *dati*, sed maximi cubi in eo contenti.

# CAPUT XIII.

## De Computo Decimali.

§. 155. *Computus* seu *calculus decimalis* docet fractiones illas supputare, quarum denominatores ab unitate pro-

gre-

grediuntur in *ratione decupla* v. g. 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. ſic perticam, pedem, digitum in 10 partes dividimus, ſingulas has partes iterum in 10 alias partes, & ſic porro. Ex qua utique diviſione oriuntur partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. Hunc calculum pro magno Matheſeos ſubſidio Auctor Simon Stevinus in Arithmeticam induxit, & poſteriorum temporum mathematici impenſis ſtudiis illuſtrarunt.

§. 156. FRactiones *decimales* ſcribuntur ſine *denominatoribus*, horumque denominatorum vices agunt *virgulæ* ſeu *notæ ſupernæ*. Sic o notat *integrum*, , notat partes *decimas*, ,, partes *centeſimas*, ,,, partes *milleſimas* &c. v. g. perticæ $\overset{0}{3}\,\overset{\prime}{4}\,\overset{\prime\prime}{5}\,\overset{\prime\prime\prime}{2}\,\overset{\prime\prime\prime\prime}{3}$ &c. id eſt: $3\frac{4}{10}\frac{5}{100}\frac{2}{1000}\frac{3}{10000}$, quot enim accreſcunt *virgulæ*, tot etiam characteres cenſeri debent accreſcere. *Punctulum* tamen paſſim fit inter *integra*, & *fractiones*.

§. 157. NUmeri, ſeu characteres, qui unam virgulam habent, dicuntur *primæ* nimirum partes; qui duas habent, *ſecundæ*; qui tres, *tertiæ*; qui quatuor, *quartæ* &c. Cæterum idem ſemper perſtat numerorum valor, ſive *virgulæ* adjiciantur, ſive non. Sic 2 integra tantum valent, quantum $2\overset{\prime}{0}$, $20\overset{\prime\prime}{0}$, $200\overset{\prime\prime\prime}{0}$ id eſt: quantum vel viginti decimæ, aut ducentæ centeſimæ, aut demum bis mille milleſimæ partes. Item $6.\overset{\prime}{4}$ tantum valent, quantum $6.\,4\overset{\prime\prime}{0}$, aut $6.\,40\overset{\prime\prime\prime}{0}$ &c.

Arithmetica *decimalis* quatuor conſtat regulis communibus: *additione* nimirum, *ſubtractione*, *multiplicatione*, & *diviſione*. De quibus ordine, atque breviſſime agendum eſt.

§. 158. ADditio *decimalis* eſt, quæ addit plures fractiones, infra ſe mutuo ſcriptas, juxta gradum atque valorem *notularum* v. g. deberes tot perticas insimul addere $3\frac{7}{1000} + 5\frac{9}{100} + 7\frac{8}{10}$ seu $3.00\overset{\prime\prime\prime}{7} + 5.0\overset{\prime\prime}{9} + 7.\overset{\prime}{8}$. dabunt summam $15.\overset{\prime}{8}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{7}$.

$$\begin{array}{r} 3.00\overset{\prime\prime\prime}{7} \\ 5.0\overset{\prime\prime}{9} \\ 7.\overset{\prime}{8} \\ \hline 15.\overset{\prime}{8}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{7} \end{array}$$

## SCHOLION.

§. 159. Quod si *fractiones decimales* addendæ sint, quarum *progressio decimalis* sit interrupta, id est: si post integra non sequantur decimæ, sed centesimæ aut millesimæ partes tunc ordines vacui suppleantur cyphris. v. g. addere deberes perticas $4.\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime\prime}{9} + 8.\overset{\prime\prime\prime}{8} + 2.\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{6} + \overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{7}$. Factum $15.\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{1}\overset{\prime\prime\prime}{0}$.

$$\begin{array}{r} 4.\overset{\prime}{7}0\overset{\prime\prime\prime}{9} \\ 8.00\overset{\prime\prime\prime}{8} \\ 2.0\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{6} \\ 0.\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{7} \\ \hline 15.\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{1}\overset{\prime\prime\prime}{0} \end{array}$$

§. 160. *Subtractio decimalis* minorem *fractionem decimalem*, ordine, & gradu bene dispositam, ab altera majori subtrahit. v. g. Sint perticæ $3.\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{3}$ subtrahendæ a $5.\overset{\prime}{8}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{1}$ remanebunt $2.\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{8}$.

$$\begin{array}{r} 5.\overset{\prime}{8}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{1} \\ 3.\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime}{3} \\ \hline 2.\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{8} \end{array}$$

SCHO-

## SCHOLION.

§. 161. SI *fractiones decimales* ab integris subtrahi debeant, tunc tot *integro* apponantur cyphræ, quot fuerint ordines numeri subtrahendi v. g. sint perticæ $3.4'2''5'''$ subtrahendæ a perticis 5. remanebunt $1.5'7''5'''$.

$$\begin{array}{r} 5.000 \\ 3.4'2''5''' \\ \hline 1.5'7''5''' \end{array}$$

§. 162. *MUltiplicatio decimalis* docet *fractiones decimales* multiplicare, & peragitur eo prope modo, quo simplex multiplicatio (§. 32.) nisi, quod virgulæ ultimi characteris tam multiplicandi numeri quam multiplicatoris sibi addantur, atque ex additione utriusque, virgulæ tandem in ultimo charactere facti resultent. Quod si numeri deficiant, locum suppleant cyphræ, ut in exemplis patescet. v. g. multiplicandæ sint perticæ $6.0'3''$ per $2.6'$, factum erit $15.6'7''8'''$. seu $6.0'3'' \times 2.6' = 15.6'7''8'''$. Ideo autem supra 8 tres virgulæ appositæ sunt, quia virgulæ numerorum $6'$, & $3''$ adduntur.

$$\begin{array}{r} 6.0'3'' \\ 2.6' \\ \hline 3618 \\ 1206\phantom{0} \\ \hline 15.6'7''8''' \end{array}$$

Item perticæ $0.6'1''3''' \times 7'5'' = 0.4'5''9'''7''''5^{v}$

$$\begin{array}{r} 0.6'1''3''' \\ 7'5'' \\ \hline 3065 \\ 4291\phantom{0} \\ \hline 0.4'5''9'''7''''5^{v} \end{array}$$

Denique perticæ $0.\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime\prime}{2}\overset{\text{v}}{4}\overset{\text{vi}}{1} \times \overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime\prime}{6} = 0.000000626\overset{\text{x}}{6}$ ita ut ultimus character facti habeat decem virgulas, eritque necessum, tot cyphras adjicere, donec competentem virgularum numerum exprimant.

$$
\begin{array}{r}
0.\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime\prime}{2}\overset{\text{v}}{4}\overset{\text{vi}}{1} \\
0.00\overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{\prime\prime\prime\prime}{6} \\
\hline
1446 \\
482\phantom{0} \\
\hline
0.000000626\overset{\text{x}}{6}
\end{array}
$$

## SCHOLION I.

§. 163. **Q**Uod si vel *multiplicans* vel *multiplicandus* meris integris constent sine *fractione decimali*, tunc *producto* tot virgulæ adjicientur, quot alteruter ante multiplicationem habuit v. g. $6.\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{2} \times 7. = 43.\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{4}$

$$
\begin{array}{r}
6.\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{2} \\
7. \\
\hline
43.\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{4}
\end{array}
$$

## SCHOLION II.

§. 164. **Q**Uod si demum vel *multiplicans* numerus, vel *multiplicandus* habeat interruptam progressionem decimalem, tunc totidem cyphris suppleatur defectus v. g. $\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{7} \times 5.\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{3} = 3.\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime\prime}{0}\overset{\text{v}}{1}.$ Neque mireris pauciora integra prodire in *facto*, quam fuerint in *multiplicatore*; Non enim multiplicantur integra multipli-

$$
\begin{array}{r}
\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{7} \\
5.\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{3} \\
\hline
1821 \\
2428\phantom{0} \\
3035\phantom{00} \\
\hline
3.\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{9}\overset{\prime\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime\prime}{0}\overset{\text{v}}{1}.
\end{array}
$$

tiplicatoris $5.4'3''$. Sed numerus aliquis minor, qui nullum integrum complectitur, nempe $6'7'''$ juxta exigentiam hujus numeri $5.4'3''$ multiplicatur.

§. 165. *Divisio decimalis* docet *fractiones decimales* dividere, fitque eo prorsus modo, quo divisio simplex (§. 42.) attamen ut in *producto*, seu in *quoto* virgularum superimponendarum numerus sciatur, debet virgulæ *divisoris* a *dividendo* subtrahi. v. g. debeant dividi $2.6'7''4'''2''''$ per $3'''$, prodibit

$$3''' \mid 2.6'7''4'''2'''' \mid 891.4'$$

*quotus* $891.4'$. Toties quippe continetur *divisor* in *dividendo*. Proba fit per *multiplicationem* (§. 162.)

## SCHOLION. I.

§. 166. Quod si vero pauciores numeri sint in *quoto* seu *producto* quam virgularum ordo deposceret, tunc eidem totidem cyphræ adjiciantur, quot sufficiant, v. g. dividenda sint $0.000000\overset{\mathrm{VII}}{6}\,\overset{\mathrm{VIII}}{2}\,\overset{\mathrm{IX}}{6}\,\overset{\mathrm{X}}{6}$ per $2'''6''''$. prodibit *quotus* $\overset{\mathrm{IV}}{2}\,\overset{\mathrm{V}}{4}\,\overset{\mathrm{VI}}{1}$, quem tamen sic adscribere oportebit: $0.0002''''\overset{\mathrm{V}}{4}\,\overset{\mathrm{VI}}{1}$.

Quod si denique progressio *fractionum decimalium* vel in *divisore*, vel in dividendo interrupta sit, suppleatur per cyphras, quemadmodum dictum est (§. 164.)

## CORROLLARIUM.

§. 167. Facile ex dictis ratio patet plura *integra* ad *fractiones* reducendi. v. g. 3 integra reducere esset animus in partes *millesimas*, fieret $\frac{3000}{1000}$ vel $3.0'0''0'''$. Quod si autem *fracti*o quæpiam minor reducenda foret ad majorem *fractionem decimalem* v. g. $\frac{7}{22}$ in partes *millies millesimas*, tum *numerator* 7 multiplicatur per 1000 000, eruntque 7000 000; hæc dividantur per denominatorem 22, & *quotus* erit $\frac{0.31^{\circ}636}{1.000000}$ seu $0.\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{1}\,\overset{\prime\prime\prime}{8}\,\overset{\prime\prime\prime\prime}{6}\,\overset{\mathrm{V}}{3}\,\overset{\mathrm{VI}}{6}$. Verum tamen hæc *decimalis fractio* non exprimit accurate $\frac{7}{22}$, remanent quippe in divisione 8, seu defectus aliquis minor, quam $\frac{1}{1000000}$, ideoque vocatur fractio approximans ad verum: faciunt tamen plurimum consimiles reductiones ad deprehendendam minorem, & minorem differentiam; quo enim partes reducuntur in plures partes, eo fiunt magis divisibiles, quod in approximatione radicum maxime elucet.

## *Finis Institutionum Arithmeticarum.*

IN-

# INSTITUTIONES GEOMETRIÆ.

## CAPUT I.

## De Principiis Geometriæ.

### DEFINITIONES.

§. 1. *GEometria* est scientia, *quæ dimensiones docet quantitatem continuarum.*

Dicta est Geometria, ἀπὸ τοῦ τὴν γῆν μέτρειν, non quidem quod terram solummodo dimetiri doceat, cum rebus plurimis applicari *Geometria* possit, & quadam ratione idem sit quod *Mathesis* (Proleg. Num. III.) sed quod primi Geometræ, qui olim exstiterunt, *Geometriæ* legibus præcipue ad terræ dimensiones uterentur. Agit autem *Geometria* de dimensionibus abstractis prout in mente sunt; Hinc nemo punctum geometricum: vel lineam stylo describere valet; ut tamen oculis exhibeantur, describi solent in chartis, fiuntque tum *puncta*, & *lineæ physicæ*.

§. 2. AXIOMATA, *quantitatem continuam attinentia sunt hæc præcipua:*

I. Totum est majus sua parte, & æquale omnibus partibus simul sumptis.

II. Si æqualibus æqualia vel addantur vel demantur, remanebunt æqualia.

III. Si inæqualibus vel addantur vel demantur æqualia remanebunt inæqualia.

IV. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe

V. Quæ ejusdem dimenſionis dimidia ſunt, ſunt inter ſe æqualia. Item, quæ ejusdem extenſionis dupla, tripla, quadrupla, ſextupla &c. ſunt, ſunt pariter inter ſe æqualia.

VI. Si extenſio prima major fuerit, quam ſecunda, & ſecunda rurſus major, quam tertia, erit eadem extenſio prima major tertia.

VII. Quæ mutuo ſuperimpoſita congruunt, ſunt æqualia.

## DEFINITIO II.

§. 3. QUantitas *continua* eſt, cujus partes communibus terminis copulantur; neque ſuapte natura diſtinctæ ſunt. Tres ſunt ſpecies *quantitatis continuæ* nempe: *linea*, *ſuperficies*, & *ſolidum.*

## DEFINITIO III.

§. 4. L*inea* eſt longitudo ſine latitudine, & profunditate conſiderata; & tum deſcribitur, cum punctum ab uno loco ad alterum moveri concipitur.

## DEFINITIO IV.

§. 5. P*Unctum* eſt id, quod partibus caret.

## DEFINITIO V.

§. 6. S*Uperficies* eſt longitudo cum latitudine, ſed ſine altitudine ſive profunditate, quæ tum deſcribitur, cum lineam moveri imaginamur.

DE-

## DEFINITIO VI.

§. 7. *Solida* dicuntur illa, quæ in longitudinem, latitudinem, & profunditatem extensa sunt. *Solidum* tum habetur, cum superficies planas, & transversas concipimus.

## DEFINITIO VII.

§. 8. *Similia* sunt, quæ non possunt distingui nisi per compræsentiam. Ait *Leubnitius*. Videatur apud hominem A aureus nummus, & apud hominem B simillimus nummus aureus, putabitur esse idem, nisi compræsentia eos distinguat. Imo si in diversis locis aut diverso tempore viderimus prorsus similia v. g. ædificia, distinguentur etiam per compræsentiam utriusque in animo, cum reipsa non possint coëxistere; atque ideo quantitas est discrimen similium, licet eadem sit in utroque nummo.

## DEFINITIO VIII.

§. 9. *Perimeter* dicitur illud continuum, quo figura aliqua seu plana seu solida circumcluditur.

## DEFINITIO IX.

§. 10. *Figura* est illud continuum, quod ambiente perimetro tanquam suo termino continetur, estque pro diversis dimensionibus diversa.

## DEFINITIO X.

§. 11. *Distantia* est linea recta seu brevissima intra duos terminos. Juxta triplices dimisiones nempe longum, latum, profundum, Geometria triplex est; prima, quæ agit de *lineis*, diciturque *Euthymetria*; altera, quæ de *superficiebus* agit: tertia est *Stereometria*, quæ *solidorum* doctrinam complectitur.

tur. *Geodæsia* demum ea appellari consuevit, quæ praxim Geometricam cum theoria conjungit.

# CAPUT II.

## De Dimensione linearum.

### DEFINITIO I.

§. 12, *Linea recta* est omnium brevissima, quæ ab uno puncto ad aliud duci potest; hinc ab uno puncto ad aliud duæ rectæ duci nequeunt. *Linea curva* est, quæ non brevissima via sed per ambages ex uno ad aliud punctum tendit.

Si *linea recta* ducenda sit in charta, regula ebena, ne charta maculetur, præfertur aurichalcinæ: in saxis vel lignis filum tensum, & colore tinctum adhibetur: in campis autem vastioribus linea *recta* designatur, cum duo baculi infiguntur, atque tertius intermedius ita collocatur, ut directus in unum oculus alios duos non videat.

### POSTULATUM I.

§. 13. AB uno puncto ad alterum quodlibet lineam rectam ducere.

### POSTULATUM II.

§. 14. Lineam rectam in infinitum extendere.

### PROPOSITIO I.

Tab. I. Fig. 1. §. 15. *Datam lineam rectam* AB *bifariam dividere.*

Circini apertura sit in longitudine lineæ AB, ponatur circini pes in A, fiatque arcus versus C, & D; Iterum pona-

ponatur circini pes in B, fiatque iterum arcus versus C, & D; Si ex puncto C in D, quo arcus se secant, linea recta ducatur per A, B, dividet hæc lineam AB bisariam.

Nam ducantur ex centris A, & B utriusque lineæ rectæ in C, & D, hæ erunt æquales inter se (§. 2.) *Num.* IV. Sunt enim æquales uni tertio nempe AB. Ergo cum CB, DB tantum distent a centro B, quantum CA, DA a centro A, sequitur, quod dimidium spacii in C, & D contineatur, & linea AB sit bisariam divisa.

In campo media linea deprehenditur, cum funiculus primum per totam illam lineam tenditur, tum vero extremitates funiculi componuntur; altera extremitas complicati funiculi dabit lineæ medietatem.

## PROPOSITIO II.

§. 16. *Eadem circini apertura lineam in tres partes æquales dividere.*

Sit linea data AB. aperi circinum in longitudine lineæ, & ex centro A describe arcum CBD; iterum ex centro B duc arcum CAD, in horum duorum arcuum sectione superiore C denuo colloca pedem circini, & describe circulum æqualem AEGHFB; tum servata semper eadem circini apertura ponatur pes circini in E, & fiat sectio in G: rursus ponatur pes circini in F, & fiat sectio in H; Si ex G & H duæ rectæ in D ducantur, scindent illæ lineam AB in I, & K, facientque tres partes æquales. *Tab. I. Fig. 2.*

Nam latera hexagoni (§. 286.) EG+GH+HF. EF : : AI+IK+KB. AB.

## COROLLARIUM.

§. 17. Linea in partes quotcunque commodissime dividi potest beneficio circini proportionalis (§. 116.) Sit v. g. linea *Tab. I. Fig. 3.*

linea AB in 100 partes æquales dividenda: accipiatur beneficio circini manualis C tota lineæ diſtantia AB; alter vero circulus nempe proportionalis FG eousque aperiatur, ut circinus manualis C uno pede in E tangat numerum 100 lineæ arithmeticæ (in tot enim partes lineam eſſe dividendam ſupponimus) & altero pede in D pariter numerum 100 contingat. Sic diſpoſito circino proportionali, accipiatur beneficio manualis circini C primo diſtantia numeri 10 in utroque crure, & hæc notetur in linea AB, tum diſtantia numeri 20, & hæc rurſus transferatur in lineam AB, & ſic usque ad 100, habebiturque linea AB in 100 æquales partes diviſa.

## DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 4. §. 18. *Lineæ parallelæ* ſunt, *quæ æqualiter ubique a ſe mutuo diſtant, neque unquam concurrerent, etſi in infinitum protraherentur.*

Tab. I. Fig. 5. 6. 7. & 8. §. 19. *Lineis rectis* opponuntur lineæ *inclinatæ*, quæ ab invicem hoc quidem loco magis, altero loco unius diſtant. *Fig. 5. Contingentes*, quæ in uno ſe puncto tangunt, non tamen ſecant *Fig. 6. Concurrentes*, quæ in uno puncto conveniunt, & ulterius non pergunt. *Fig. 7.* & *ſecantes*, quarum una ſecat alteram *Fig. 8.*

## PROPOSITIO III.

Tab. I. Fig. 9. §. 20. *Datæ lineæ rectæ* A B *ex dato puncto* C *parallelam ducere.* Eucl. I. 2.

Colloca circini pedem in puncto arbitrario lineæ A B. v. g. in D, & forma arcum EC, transfer eandem circini aperturam in F, & fac arcum GH; tum deſume diſtantiam EC, & ſigna eandem ex G in H. Si per punctum H & C lineam rectam duxeris IK, erit parallela lineæ AB.

Nam cum EC, & GH æquales arcus ſint, æquali radio DE, DE, & FG descripti, tantum distabit GH, quantum EC; ideoque & lineæ IK, & AB erunt parallelæ (§. 18.).

*Alio Modo.*

§. 21. SIt ex puncto C parallela ducenda lineæ AB : duc primum ex hoc puncto C ad quodcunque punctum lineæ AB v. g. ad F lineam *concurrentem*, hanc transversam lineam metire circino, servataque eadem apertura, pone alterum circini pedem in quocunque puncto lineæ AB v. g. in D, atque duc arcum in E : rursus assume distantiam FD, & altero circini pede in C posito, duc alterum arcum in E; Itaque si ex puncto, in quo se hi duo arculi secant, duxeris lineam rectam in C, erit linea CE ipsi AB parallela. *Tab. I. Fig. 10.*

§. 22. UTimur etiam frequenter *parallelismo*, quod instrumentum commodissime ex ebeno ligno præparatur, constatque duabus regulis AB, & CD, quæ lineæ duobus retinaculis EE, & FF, ubique ejusdem distantiæ a se invicem dissitis, copulantur, ut hac ratione regulæ ambæ æqualiter, ac diversimode diduci, aut contrahi, atque ad regularum distantiam parallelæ formari in charta queant. *Tab. I. Fig. 11.*

## DEFINITIO III.

§. 23. *LInea perpendicularis*, quæ & *normalis* dicitur, est *linea recta in alteram ita descendens, ut in nullam partem inclinet, sed angulum rectum efficiat.* (§. 54).

## PROPOSITIO IV.

§. 24. *IN linea* AB *ex puncto* C *lineam perpendicularem erigere* CF. *Tab. I. Fig. 12.*

Ponatur circini pes in C, designenturque duo arbitraria puncta v. g. D, & E, a puncto C æquedistantia. Amplietur paulisper circini apertura, atque tam ex D, quam ex E fiant arcus in F. ab intersectione arcuum duc lineam rectam in C, hæc nempe FC erit perpendicularis ipsi AB.

Q Nam:

Nam: ducantur lineæ rectæ ex F in D & E. Jam DC = CE, DF = FE. Igitur & anguli FCD, & FCE sunt æquales, & linea FC erit perpendicularis (§. 54).

*Alio Modo.*

Tab. I. Fig. 13. §. 25. ACcipe *normam*, vulgo Winkel-Hagen, atque hujus alterum crus NO ita lineæ AB adapta, ut punctum N accuratissime punctum C contingat, tum vero alterum crus MN exhibebit lineam *perpendicularem*. In campis quoque, ut perpendicularis erigatur, utimur *norma*, sed paulo majore.

§. 26. SI *normam*, num exacta sit, examinare cupias, aut in illius defectu aliquam conficere tuo usui velis: accipe chartam simplicem, hanc presse complica, ut duplex sit, tum chartam hanc denuo complica, ut quadruplex sit, hac tamen ratione; ut prima plicatura accurate sibi correspondeat, habebisque interim normam exactam, quæ & *perpendicularem*, & *rectum angulum* exhibeat.

## PROPOSITIO V.

Tab. I. Fig. 14. §. 27. *EX puncto superne dato* C *lineam perpendicularem ad* AB *dimittere.* Circini pede in C collocato fac sectiones arbitrarias æquales in D, & E; tum servata eadem circini apertura, fac ex D & E arcus in F. Si ex arcuum sectione F in punctum C lineam rectam duxeris, CG, erit *perpendicularis* descendens ipsi AB.

## PROPOSITIO VI.

Tab. I. Fig. 15. §. 28. *IN initio, vel fine lineæ* AB *lineam perpendicularem erigere.* Pone circini pedem in puncto arbitrario supra A, & B v. g. in O; ex O tanquam centro forma circulum hac ratione, ut peripheria punctum A contingat, & lineam AB

in

in E secet : Jam ubi ex E per centrum O lineam rectam duxeris ad peripheriam circuli C, atque ex puncto contactus C lineam rectam dimiseris in A, erit hæc linea CA ipsi AB perpendicularis. Tab. I. Fig. 15.

Nam OAM = OEM, & OAN = OCN; Igitur ON perpendicularis ipsi AC, & OM perpendicularis ipsi AB (§. 23); sed ON parallela est ipsi AB, & OM parallela ipsi AC (§. 18); ergo & AC perpendicularis ipsi AB.

*Alio Modo.*

§. 29. DEfige circini pedem in A, & fac ad arbitrariam distantiam arcum CDF; eadem servata circini apertura duc ex centro C arcum, qui priorem in D secet; rursus eadem servata circini apertura ex intersectione arcuum D fac arcum in E. Tum duc rectam ex C per punctum sectionis D ad arcum E, ubi linea hæc recta arcum E contigerit, ibi erit punctum perpendicularis descendentis : itaque duc rectam ex E in A, hæc erit perpendicularis ipsi AB. *Tab. I. Fig. 16.*

## COROLLARIUM.

§. 30. SI super eandem lineam rectam AB plures perpendiculares descenderint, erunt illæ inter se parallelæ; Cum enim perpendiculares in nullam partem inclinent, distabunt a se mutuo æqualiter, nec poterunt unquam concurrere (§. 18). *Tab. I. Fig. 17.*

## DEFINITIO IV.

§. 31. *LInea Horizontalis* v.g. AB est, *ad quam radius ex terræ centro* C *ductus, est perpendicularis.* *Tab. I. Fig. 18.*

Percommode *linea horizontalis* ducitur ope *libellæ*, in qua pondus ex filo pendulum naturali gravitate versus terræ cen-

*Tab. I. Fig. 19.* trum fertur. Alia *libella* est triangulum ABC æquicrurum, cujus basis AB in medio notam habet; itaque si filum plumbeo globulo illigatum ex centro C suspendatur, illudque filum notam mediæ basis D contingat, linea illa seu planum, cui libella insistit, erit *horizontalis*. Alia *libella* est *tubus vitreus* AB spiritu vini sic impletus, ut aër in quantitate unius guttæ in tubo remaneat. Tum orificium infusionis B hermetice claudatur: si itaque tubus ita collocatus fuerit, ut aërea illa portio medium tubi C teneat, situs hujus tubi cylindrici erit *horizontalis*.

*Tab. I. Fig. 20.*

In omni prope usu instrumentorum geometricorum v. g. *Mensulæ Prætorianæ* &c. præcipua esse cura debet *lineæ horizontalis*, ut experimenta rite fiant.

## DEFINITIO V.

*Tab. I. Fig. 21.* §. 32. *Linea verticalis* v. g. AB *est, quæ lineæ horizontali* CD *perpendiculariter innititur.*

*Tab. I. Fig. 22.* Erigitur *linea verticalis* exacte ope hujus instrumenti *geometrici*: Est lignum AB, per cujus medium linea utrique lateri parallela ducitur C: in summitate lineæ suspendatur filum, ex quo globus plumbeus dependeat: si itaque filum recta descendat secundum lineam mediam C, tunc baculus, cui latus unum tabulæ AB bene applicatum sit, respectu soli *lineam verticalem tenebit.*

## DEFINITIO VI.

*Tab. I. Fig. 23.* §. 33. *Linea diagonalis* est illa: v. g. CD, *quæ angulos oppositos quadrangulorum v. g.* ACBD *copulat.* Dicitur etiam *diameter.*

## DEFINITIO VII.

§. 34. *Linea coincidens* est, *quæ alteram, cui applicatur, suam ob æqualitatem, totam tegit.*

PRO-

## PROPOSITIO VII.

§. 35. *Lineæ, quæ sibi mutuo congruunt, & æquales, & similes sunt.* Nam juxta axioma 7 §. 2. quæ sibi superimposita congruunt, habent eandem extensionem, ergo & *æqualitatem*. Præterea, lineæ, quæ eandem prorsus habent extensionem, non possunt distingui, nisi per compræsentiam §. 8. ergo sunt quoque sibi *similes*. *Quod erat demonstrandum.*

## PROPOSITIO VIII.

§. 36. *Lineæ rectæ* AB *ex dato puncto* C *lineam æqualem describere.* Eucl. I. 2. *Tab. I. Fig. 24.*

Circini pede posito in A describatur arcus in extensione DC, rursusque posito circini pede in puncto C, eadem apertura describatur arcus DA, radius AD = CD §. 233. Ex centro A describatur in apertura AB arcus BEF, qui secetur in E a radio DE. Rursum e centro D describatur arcus FEG, qui secetur in H a radio DH. hæc recta CH erit æqualis datæ lineæ rectæ AB.

Nam radius DE = DH §. 232. ergo etiam AE, & CH sunt æquales, juxta *axioma* 2. §. 2. sed radius AB = AE §. 232. Igitur etiam erit æqualis radio CH. *axiom.* 4. §. 2. *Quod erat demonstrandum.*

## PROPOSITIO IX.

§. 37. *Datis duabus lineis rectis inæqualibus, ex majori partem auferre, ut fiat æqualis minori.* *Tab. I. Fig. 25.*

Sint duæ lineæ inæquales AE, & CD, & oporteat majorem AE facere minori CD æqualem: pone igitur circini pedem in A, apertura CD, ubi arcus lineam AE in B secuerit, erit AB = CD. *axioma* 7. §. 2.

## PROPOSITIO X.

Tab. I. Fig. 26. §. 38. *Datis duabus lineis rectis* AB, *&* CD *tertiam proportionalem* FB *invenire.* Eucl. VI. 11.

Super majorem lineam AB ex centro G describatur semicirculus AEB; tum longitudo lineæ CD transferatur ex B in E. Ex E demittatur linea perpendicularis EF in lineam AB §. 27. linea FB erit tertia proportionalis ad AB, & CD, seu: FB. CD : : CD. AB.

Nam angulus AEB est rectus §. 241; ab angulo recto E dimittatur perpendicularis EF in AB. triangulum BEF simile erit triangulo ABE §. 87. Ergo ut BE se habet ad triangulum ABE; ita se habet FB ad triangulum BEF; ideoque FB erit tertia proportionalis. Q. E. D.

Tertiam proportionalem continuam invenire licet ope *circini proportionalis* §. 116. sit duarum datarum major = 40. hæc in lineam arithmeticam deponatur in numerum 40. altera data minor linea transferatur ab uno crure ex 40 ad alterius cruris 40, & sit = 20. Jam ope circini manualis assumatur distantia numeri 20 a 20 in linea arithmetica, hæc erit tertia proportionalis continua, erit enim = 10. E. ∺ 40, 20, 10.

In inquisitione tertiæ proportionalis majoris proceditur ordine inverso.

Tab. I. Fig. 27. §. 39. Consimili ratione media proportionalis duarum datarum reperitur: sint datæ EF, & GH, super majori recta EF fiat semicirculus ENF. GH transferatur in MF, atque ex M erigatur perpendicularis ad peripheriam MN, recta NF erit media proportionalis ad EF, & GH seu: EF. NF : : NF. MF, seu GH. Adeo, ut si quadratum formetur ex FN, vel fiat parallelogrammum ex EF × GH, quadratum ex FN sit æquale parallelogrammo ex EF × GH.

Quod

Quod si vero duæ rectæ, quarum media proportionalis quæritur v. g. AF, & FB in unam lineam redigantur, & super utramque conjunctam semicirculus formetur, tunc non EB sed EF erit media proportionalis; Nam AF ad triangulum AEF, sicut EF ad triangulum EBF.

Ope *circini proportionalis* facillime reperitur media proportionalis (§. 116.) Nimirum utraque datarum linearum transferatur ad lineam arithmeticam. Sit major datarum linearum $= 36$; minor autem $= 16$. Deferatur major linea ad circini proportionalis lineam Geometricam, ita quidem, ut ab uno termino 36 ad alterum 36 pertingat. Manente sic circino proportionali immoto, desumatur per circinum manualem distantia 16 a 16 in linea Geometrica, quæ erit inter duas datas media proportionalis; mensurata siquidem in linea Arithmetica, erit $= 24$. Et $\div$ 36, 24, 16.

Cum linea Geometrica passim ad 64 duntaxat extendatur; sicubi major datarum linearum excederet numerum 64, assumantur meræ linearum medietates in linea Geometrica, ac tandem, finita operatione, media proportionalis inventa duplicetur.

## PROPOSITIO XI.

§. 40. *Datis tribus lineis rectis* AB, AG, *&* BC, *quartam proportionalem* CH *invenire, quæ sic se habeat ad* BC, *sicut* AG *ad* AB. *Eucl. VI. 12.* Tab. I. Fig. 28.

Ponatur oblique linea AB, continueturque & AC, subnectatur linea BC, & efficiat quemlibet angulum cum AB, continuetur recta ex C in I, ex G dimittatur recta GH in GI, quæ recta GH sit parallela ipsi AC; erit CH quarta proportionalis petita, seu: CH. BC : : AG. AB.

In *circino Proportionali* quarta proportionalis invenitur hac ratione: tres lineæ datæ in linea arithmetica a centro mensurentur,

sitque

ſitque prima = 21, ſecunda = 14, tertia = 9. Jam ſecunda = 14 deponatur in linea arithmetica transverſe ab 21 nimirum ad 21. Manente ſic circino proportionali immoto menſuretur diſtantia a 9 ad 9 lineæ itidem arithmeticæ, quæ erit quarta proportionalis, & = 6. Nam ∺ 21, 14, 9, 6.

Major quarta proportionalis inquiritur modo inverſo.

*Alio Modo.*

Tab. I. Fig. 29. §. 41. INvenitur etiam quarta proportionalis ſic: *ſint tres datæ, nempe:* AG, AB, CD, *petaturque quarta proportionalis, quæ ſic ſe habeat ad* CD, *ſicut ſe habet* AG, *ad* AB.

Ponatur AG in recta linea, & AB formet qualemcunque angulum cum AG. Ex A demittatur perpendicularis ad quamcunque diſtantiam in C; ex C vero fiat tertia linea CD, parallela ipſi AG. Porro ex D ducatur recta in M perallela ipſi AC, ex M ducatur MI parallela ipſi GB; linea AN, vel potius HI erit quarta hæc proportionalis. Sicut enim AG ad AB; ita CD vel AM ad AN vel HI.

## PROPOSITIO XII.

Tab. II. Fig. 30. §. 42. *INter duas datas rectas, duas alias medias proportionales lineas invenire.*

Sint duæ rectæ datæ AB, & CD. Formentur duæ rectæ, cum angulo recto concurrentes HK, & KL. In linea HK notetur longitudo lineæ AB per OK; in lineam vero KL deponatur linea CD per KP. Rurſus ex P, & O ducantur rectæ in Q, ut ſit parallelogrammum OKPQ: tum fiant diagonales QK, & PO ſecantes ſe invicem in X; linea vero KO transferatur in KZ, ducaturque recta ex O in Z. Porro ex centro O radio OP ducatur arcus ex P in R: aſſumatur linea RZ, & deferatur ex P in S. Denique linea KP transferatur ex puncto S in punctum T, & ducatur recta ex T per

Q in

Q in H. Erit itaque linea P T prima proportionalis M N, linea O H altera proportionalis media F G. seu ∺ C D, F G, M N, A B.

Nam ſit linea P Q ſeu A B $=$ 64; erit linea P T ſeu M N $=$ 48, linea H O ſeu F G $=$ 36, & O Q ſeu C D $=$ 27. *Euclid. Lib.* VIII. *Prop.* 12. Et cubus lineæ A B ad cubum lineæ C D eſt in ratione cubica lateris 4 ad 3.

$$AB = 64,\ MN = 48,\ FG = 36,\ CD = 27.$$
$$\quad 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3$$

Ope *circini proportionalis* expedita eſt methodus duas medias proportionales inveniendi. Menſurentur primum duæ datæ in linea Arithmetica, ſitque major $=$ 54, minor $=$ 16. Jam linea major $=$ 54 deponatur in linea cuborum ſeu ſolidorum a numero 54 transverſe ad numerum 54. Hac in apertura circini proportionalis deſumatur per aliquem circinum manualem diſtantia inter 16, & 16; hæc erit duarum mediarum proportionalium major, quæ, ſi menſurata fuerit in linea arithmetica, erit æqualis 36. Porro hanc lineam $=$ 36 transfer in numerum 54, & 54 lineæ cubicæ, atque hac in apertura circini proportionalis deſumatur rurſus diſtantia inter 16, & 16. hæc erit duarum mediarum proportionalium minor, & æqualis 24. Et ∺ 54, 36, 24, 16.

## SCHOLION.

§. 43. PEr numeros inveniuntur duæ lineæ mediæ proportionales hoc modo: ſint duæ lineæ datæ, prima 8 pedum, altera 125 pedum, inter has duas oporteat duas medias proportionales invenire: linea igitur 8 pedum quadretur $=$ 64; tum $125 \times 64 = 800$. Ex 800 extrahatur radix cubica $=$ 20 (§. 149. *Arith.* 20) igitur pedum erit prima inventa linea e mediis duabus proportionalibus. Porro 20 quadrentur $=$ 400. hæc 400 dividantur per primam lineam 8 pe-

 dum,

dum, quotus 50 erit ſecunda proportionalis inventa ſeu ∺ 8, 20, 50, 125.

Nam 8 ad 20, 20 ad 50, 50 ad 125 ſicut 1 ad $2\frac{1}{2}$.

## PROPOSITIO XIII.

Tab. II. Fig. 31. §. 44. *PRimorum terminorum differentia, & prima linea; imo ſi infinitæ lineæ proportionales ponantur, ſunt continuo proportionales.*

Sint lineæ quotcunque proportionales AZ, BZ, CZ &c. proportionalium illarum linearum differentiæ ſunt AB, BC, CD, DE &c. & hæ differentiæ una cum ultima quantitate FZ æquales ſunt primæ lineæ A Z. Quod ſi vero lineæ proportionales in infinitum continuentur, evaneſcit poſtrema quantitas FZ, ipſæ tamen differentiæ omnes ſubſequentes ſic ſe habent ad invicem, veluti AB ad AZ; Etenim AZ habet ſe ad BZ ut BZ ad CZ &c. & iterum: AB ad BZ ut BC ad CZ &c. item ut prima differentia AB ad AZ, ita ſecunda differentia BC ad BZ &c. Igitur ut prima differentia AB ad lineam AZ, ita cæteræ omnes differentiæ ad ſuas lineas ſe habent. Q.E.D.

## PROPOSITIO XIV.

Tab. II. Fig. 32. §. 45. *LIneæ quatuor diſcrete proportionales* AB, CD, HI, KL *ſic comparatæ ſunt, ut extremæ duæ* AB, & KL *ſimul ſumptæ majores ſint, quam duæ intermediæ* CD, HI.

Ex linea AB dematur pars EB, & ex CD dematur FD; ut AE, & CF æqualia ſint ipſis HI, & KL; Jam EB ſic ſe habebit ad FD, ſicut tota AB ad CD, & HI ad KL, tantoque major erit EB ipſo FD, quanto major eſt AB quam CD. Ergo ſi ad lineam AB addatur KL, erit tanto major ipſis duabus mediis invicem additis HI, & CD, quanto EB majus eſt ipſo FD; Etenim in AB, & KL ſimul ſumptis continetur etiam HI, & CD: & præterea in duabus prioribus reperitur

pars

pars major EB, quæ in duabus mediis minor est, nempe FD. Ergo AB+KL > HI+CD. Q.E.D.

## PROPOSITIO XV.

§. 46. *Lineæ quotcunque, quarum antecedens prima A se habeat ad primam consequentem E, ut secunda antecedens B, ad secundam consequentem F, & sic porro, sic se habent collectæ omnes antecedentes, ad omnes consequentes, ut prima antecedens A ad primam consequentem E.* Tab. II. Fig. 33.

Nam cum sic se habeat A ad E, sicut se habet B ad F &c. ex hypothesi; ergo etiam sic se habebit A ad B, sicut E ad F; & B ad C, sicut F ad G; Igitur etiam sic se habebit A+B ad B, ut se habet E+F ad F. Imo: A+B+C.D :: E+F+G.H. Itaque omnes, quotquot fuerint antecedentes, sic se habebunt. ad ultimam D, ut se habent omnes simul consequentes ad ultimam H; & permutando omnes antecedentes, simul sumptæ erunt ad omnes consequentes simul sumptas, ut ultima antecedens ad ultimam consequentem, seu ut prima antecedens ad primam consequentem. Q.E.D.

## PROPOSITIO XVI.

§. 47. *Scalam Geometricam, vulgo* Feld-Messer Maas-Stab *conficere.* Tab. II. Fig. 34.

Duc lineam rectam AB, quam pro lubito extendere poteris in E, F, &c. adjunge 10 alias lineas, ejusdem ab invicem distantiæ usque in CD vel CH; hæ lineæ superius inter A, & C numeris, 1, 2, 3 &c. insigniantur. Rursum ex A in B æqualis ab invicem distantiæ 10 partes distribue, quas pariter ab A retrograde numeris designa 9, 8, 7, 6 &c. Denique transfer lineas obliquas ex 9 in 10, ex 8 in 9, ex 7 in 8 &c.

Itaque si spatium AB accipiatur pro spatio perticæ, tum numeri recto ordine aſcendentes notabunt pedes, numeri vero inter 9, & 10, 8, & 9 &c. intercepti, digitos adſignificabunt. v. g. velis juxta hanc ſcalam dimetiri ſpatium MN, pone circini pedem alterum in L, alterum protende uſque in I, & deprehendes ſpatium MN eſſe 1 perticæ, 2 pedum, & 5 digitorum.

§. 48. HAc ſcala frequentiſſime utuntur Geometræ, ut magna territoria, & ichnographias minori figura in chartis exprimant.

§. 49. QUoniam vero menſurarum Geometricarum ſermo incidit; juvat eas potiſſimum menſuras commemorare, quibus paſſim Geometræ utuntur; ſunt autem: *milliare*, quod *paſſibus* menſuratur, *Pertica*, *hexapeda*, *orgyia*, quæ *pedibus* conſtant; *Pes* rurſus *lineis* ſeu *granis* menſuratur. Attamen, cum hæ menſuræ pro varietate populorum, & provinciarum varient, ea ſingillatim perſtringemus.

*Milliare.*

| | |
|---|---|
| Italicum conſtat paſſibus Geometricis | 1000 |
| Anglicum - - - - - - - - - - | 1250 |
| Gallicum commune - - - - - | 2000 |
| Germanicum commune - - - - | 4000 |
| Polonicum - - - - - - - - - | 3000 |
| Hiſpanicum - - - - - - - - - | 3428 |
| Danicum, & Suecicum - - - | 5000 |
| Hungaricum - - - - - - - - - | 6000 |

Paſſus propter diverſam ambulantium conſtitutionem exacte definiri nequit; dividitur in *ſimplum*, & *duplicem*. *Simplus* ſeu *greſſus* eſt ſpatium illud, inter plantas ambulantium interceptum, continetque *duos pedes*; *Paſſus duplex* eſt, qui ſpatium & duarum plantarum, & ſpatii inter plantas interjacentis complectitur; hinc 4 *pedibus* conſtat.

§. 50. PErtica apud Geometras 10 pedes continet, *Pertica* autem Rhenana 12 pedes. *Perticæ* autem apud diverſos populos ſunt diverſæ.

*Hexa-*

*Hexapeda* Parisiensis 6 *pedes regios*.

*Orgyia* est mensura, quæ ambobus brachiis extensis definitur, continetque passim 6 *pedes* vel 3 *ulnas*.

§. 51. *PEdum* maxima quoque est diversitas; mos autem, & usus duplices *pedes* nempe *Parisienses regios*, & *Rhenanos* induxit; Itaque, cum *pes regius Parisiensis* in 1440 partes dividatur, aliarum gentium pedes æqualibus partibus sequenti ordine constabunt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pes regius Parisiensis | 1440 | Londinensis - - - | 1350 |
| Rhenanus - - - | $1391\frac{3}{10}$ | Suecicus - - - - | 1320 |
| Vetus Romanus - | 1320 | Augustanus - - - | 1313 |
| Viennensis - - - | 1400 | Lipsiensis - - - - | 1397 |
| Norimbergensis - | $1346\frac{1}{4}$ | Cracoviensis - - - | 1580 |
| Batavus Lugdunensis | 1390 | Constantinopolitanus - | 3140 |
| Amstelodamensis - | 1253 | Græcus - - - - - | 1350 |
| Pragensis - - - - | 1338 | Vetus Hæbræus - - | 1590 |
| Lisabonensis - - - | 1387 | | |
| Bononiensis - - - | $1682\frac{2}{7}$ | | |
| Venetus - - - - | 1540 | | |

§. 52. APud Geometras, accommodata ad Arithmeticam decimalem partitione, pertica dividitur in 10 *pedes*, *pes* in 10 *digitos*, digitus in 10 *lineas* seu *grana*.

## CAPUT III.

## De Angulis.

### DEFINITIONES.

§. 53. *ANgulus* est *intervallum sub inclinatione duarum linearum collectum*. Unde fit, ut pro linearum varietate anguli varii sint. Generaliter angulus alius est *rectilineus*, qui lineis *rectis*, Tab. II. Fig. 35, 36, 37.

*rectis*, *fig.* 35. alius *curvilineus*, quem curvæ lineæ efficiunt, *fig.* 36. alius *mixtus fig.* 37.

Tab. II. Fig. 38. §. 54. *ANgulus rectus* dicitur *intervallum collectum ab inclinatione æquali lineæ incidentis.* Quo casu *incidens* dicitur *perpendicularis.*

Tab. II. Fig. 39, 40. §. 55. *ANgulus obliquus* dicitur *intervallum, ab inclinatione inæquali lineæ incidentis collectum.* Estque vel *obtusus*, vel *acutus*: hic minor est recto. *Fig.* 39; ille vero major. *Fig.* 40.

§. 56. *ANguli vertex* vocatur *punctum illud, in quo duæ lineæ inclinatæ ita sibi occurrunt, ut se tangant.*

## PROPOSITIO I.

Tab. II. Fig. 41. §. 57. *DAtum angulum* ABC *in duos æquales dividere.* *Eucl. l.* 9.

Sit triangulum ABC, ponatur circini pes in B, fiantque arbitrariæ æquales utrinque abscissiones in D, & E, ex puncto B demittatur perpendicularis BG, quæ lineam DE in medio secet (§. 15.) eritque angulus DBF=FBE.

Nam mensura anguli ABC est recta DE. atqui hæc est in duas æquales partes in F divisa; Igitur & angulus ABC erit in duos æquales angulos divisus, nempe in DBF, & FBE.

## PROPOSITIO II.

Tab. II. Fig. 42. §. 58. *DEscribere ex puncto* A *datæ rectæ lineæ* AB *æqualem angulum ipsi* DCE. *Eucl. l.* 23.

Sit linea AB, transfer lineam CD in AF, & lineam CE in AG; ex centro A radio AG duc arcum GKF; tum accipe mensuram lateris DE, & posito circini pede in centro F

duc

duc arcum I H L M. Conjunge puncta A H, & H F lineis; & erit angulus F A H = D C E.

Nam linea A G = A H (§. 232.) sed A G = C D; ergo etiam A H = C D. Item A F = C D (§. 2. *Axiom* 7.) Porro F M = E D, sed F M = F H, ergo etiam F H = D E. Igitur cum, datis duorum triangulorum æqualibus lateribus, Anguli quoque, qui æqualibus lateribus opponuntur, æquales sint, *Eucl. I.* 8. Angulus F A H = D C E. Q. E. D.

## PROPOSITIO III.

§. 59. *OMnes anguli recti inter se sunt æquales.*

Etenim anguli recti fiunt per descensum lineæ perpendicularis in lineam rectam (§. 54.) sed linea perpendicularis in neutram partem inclinat (§. 23.) Igitur uterque angulus rectus æqualis est. Q. E. D.

## PROPOSITIO IV.

§. 60. *SI super lineam rectam* A B *inciderit quæcunque alia linea recta* C D *sive* E D; *anguli* C D A, *&* C D B, *sive* E D A, *&* E D B *erunt aut duo Anguli recti, aut duobus rectis æquales. Eucl. I.* 13. *Tab. II. Fig.* 43.

Dum perpendicularis in lineam rectam incidit, patet, angulos esse duos rectos (§. 54.) Quod si vero linea oblique incidat, ut E D; erige perpendicularem D C, quæ perpendicularis faciat duos angulos rectos C D A, & C D B (§. 59.) Igitur obtuso angulo A D E aufer angulum C D E, & relinquetur angulus A D C: Acuto autem angulo E D B adjice acutum C D E, erit rursus angulus rectus; ergo anguli E D B, & A D E sunt duobus rectis æquales. Q. E. D.

## DEFINITIO.

§. 61. ANguli A E C, & C E B vocantur *contigui*; quia communi lateri E C adjacent. Anguli vero A E D, & C E B *Tab. II. Fig.* 44.

CEB vocantur *anguli verticales oppositi*; quia in concursu vertices suos tangunt.

## PROPOSITIO V.

Fig. ead. §. 62. *SI duæ lineæ rectæ* AB, *& CD se mutuo secuerint in* E, *angulos ad verticem oppositos nempe* AED, *&* CEB, *item* AEC, & DEB, *æquales efficient.* Eucl. I. 15.

Sive angulus CEB sive angulus AED, accipiatur cum angulo obtuso AEC, semper efficient angulos duobus rectis æquales (§. 59.) ergo, si angulus hic communis AEC ablatus fuerit ab utroque angulo acuto AED, & CEB, remanebunt anguli hi acuti æquales (§. 2. *Axiom.* 2); Et iterum: sive angulus AEC, sive DEB assumatur cum angulo CEB, rursus facient angulos duobus rectis æquales (§. 59;) Igitur, si & hic communis angulus CEB ablatus fuerit, remanebunt & hi duo obtusi anguli AEC, & DEB æquales (§. 2. *Axiom.* 2.) Igitur anguli ad verticem oppositi sunt æquales. Q.E.D.

## COROLLARIUM I.

§. 63. EX hoc consequitur: lineas illas, quæ angulos, ad verticem oppositos, æquales efficiunt, debere esse rectas; secus enim, si una earum v. g. in F declinaret, anguli ad verticem oppositi æquales minime forent.

## COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 45. §. 64. SIc quoque angulus *incidentiæ*, & angulus *reflexionis* est idem, cujus vel maxime in ludo tudiculari rationem haberi oportet: sit globus A, quocum impellere cupias globum B, sitque obex recti linearis CD; angulus *incidentiæ* erit AEC, & angulus *reflexionis* BED: si igitur globus secundum rectam AEF impellatur, reflectetur ex E in B, & alterum globum B impellet; Nam latus ED utrique triangulo BED, & DEF commune est: latus vero BD = DF, &

angu-

angulus uterque ad D rectus, propter perpendicularem ipsi CD (§. 59) adeoque & EB = EF *Eucl. I. 8.* : ergo angulus ad verticem oppositus DEF = AEC; & consequenter angulus *incidentiæ* AEC æqualis angulo *reflexionis* BED.

## DEFINITIO.

§. 65. ANguli *externi* sunt, qui sunt extra parallelas v. g. G, H, & N, O. *Interni* autem, qui sunt intra parallelas v. g. I, K, & L, M. *Alterni* autem anguli vocantur, qui intra duas parallelas a se sunt aversi v. g I, M, & L, K. *Tab. II. Fig. 46.*

## PROPOSITIO VI.

§. 66. *SI linea transversa* EF *secet duas parallelas* AB, *&* CD, *erunt anguli alterni* I M, *&* LK *æquales.* 2*do. angulus externus* H *erit æqualis externo opposito* N, *&* G *æqualis* O. 3*tio. Duo interni oppositi* LI, *&* KM *erunt duobus angulis rectis æquales.* *Fig. ead.*

Nam 1mo: H = I (§. 62), & propter parallelas AB, & CD angulus H = M: ergo etiam I = M (§. 2 *axiom.* 4.) Idem dicendum quoad angulos obtusos G = K, & G = L. ergo & K = L.

2do. Ex mox dictis H = M, & M = N (§. 62). ergo & N = H.

3tio. G, & H sunt duobus rectis æquales (§. 60). sed M = H, & G = K; igitur & M, & K sunt duo anguli duobus rectis æquales. *Quod erat demonstrandum.*

## COROLLARIUM I.

§. 67. SI itaque in duas lineas rectas AB, CD recta incidens linea EF alternatim angulos æquales inter se fecerit; lineæ illæ rectæ AB, & CD erunt inter se parallelæ. *Eucl.* I. 27. *Fig. ead.*

## COROLLARIUM II.

Tab. II. Fig. 47. §. 68. SI in tres lineas parallelas AB, CD, EF una linea perpendicularis, vel plures v. g. GH, & IK descenderint, facient in omnibus parallelis angulos rectos.

## DEFINITIONES.

§. 69. *Anguli ad centrum* sunt, quorum vertices in centro conveniunt. *Anguli ad peripheriam*, quorum vertices ad circumferentiam excurrunt; hi etiam aliter dicuntur *anguli inscripti*. *Anguli circumscripti* sunt, quorum latera circulum attingunt; vertex autem extra circulum situs est. *De his infra*

Hactenus de *lineis*, & *angulis* egimus, posthac de *figuris* agemus; Est autem *figura*, *spatium undique circumclusum*.

# CAPUT IV.
## De Triangulis.
## DEFINITIONES.

§. 70. *Triangulum* est, *quod trium linearum concursu formatur*; hæ vero lineæ *latera* trianguli nominantur.

§. 71. *Triangulum* aliud est planum *rectilineum*, quod ex rectis lineis constat: aliud *sphæricum*, quod ex arcubus circulorum conficitur. Triangulum *rectilineum* porro multiplex est: aliud *rectangulum*, dum unus angulus rectus est, seu 90 graduum: aliud *acutangulum*, cujus tres anguli acuti sunt; aliud *obtusangulum*, seu *amblygonium*, cujus unus angulus est obtusus.

§. 72. RAtione *laterum* dividitur triangulum in *æquilaterum*, cujus omnia latera sunt æqualia: & *æquicrurum*, quod & *Isosceles* dicitur, quod duo tantum latera æqualia habet: ac tandem *scalenum*, cujus nullum latus est alteri æquale.

§. 73.

§. 73. IN omni triangulo *rectangulo* maximum latus AB, quod nempe est angulo recto C oppositum, vocatur *Hypothenusa*: Illud vero latus AC, quod horizonti est parallelum, vocatur *basis*: denique illud latus, quod perpendiculariter descendit BC vocatur *cathetus*. Ast in reliquis angulis obliquangulis, simpliciter *latera* vocantur. Tab. III. Fig. 53.

§. 74. CÆtera dicitur etiam triangulum *figura prima*, & *simplex*; quia nempe omnes aliæ figuræ in triangula resolvi possunt.

## SCHOLION.

§. 75. ANgulos per literas sic determinare consuevimus, ut media litera angulum trianguli petitum designet. v. g. angulus C Fig. 42 exprimitur sic: ECD &c.

## PROPOSITIO I.

§. 76. *OMnis trianguli v. g.* CDE *angulus quivis externus v. g.* EDF, *duobus internis oppositis v. g.* C & E *æqualis est.* Tab. II. Fig. 48.

Nam ducatur ex D, linea DG, parallela ipsi CE; Jam, quia FC secat duas parallelas DG, & CE, erunt anguli FDG, & DCE æquales (§. 65.) & quia etiam linea DE secat lineas parallelas DG, & CE, erunt pariter anguli GDE, & DEC æquales. ergo quia angulus DCE = FDG, & angulus DEC = GDE, erit angulus FDE, continens duos angulos FDG, & GDE æqualis duobus internis oppositis DCE, & DEC. Q. E. D.

## PROPOSITIO II.

§. 77. *IN omni triangulo, tres anguli simul sumpti, sunt æquales semicirculo, seu duobus rectis, efficiuntque gradus 180. Eucl. I. 32. In rectangulo autem duo acuti anguli sunt æquales quadranti, seu 90 gradibus.*

*Tab. II. Fig. 49.* Concipiatur in triangulo ABC linea BD parallela lineæ AC; hæ duæ lineæ fecentur per AB, & hæc tertia fecans AB formabit angulos alternos CAB, & ABD æquales (§. 65). Præterea concipiatur linea BC duas parallelas AC, & DB fecare; hæc fecans quoque formabit duos angulos internos nempe ACB, & CBD. Jam ACB + FCB funt æquales duobus angulis rectis (§. 60.) atqui FCB = ABC + CAB (§. 76). ergo etiam ACB + CBA + BAC æquales funt duobus angulis rectis. Q. E. D.

## PROPOSITIO III.

*Tab. II. Fig. 50.* §. 78. *SI latera trianguli* ABC *fint inæqualia, etiam anguli ipfi inæquales erunt, & angulus* BAC, *qui majori lateri* BC *opponitur, major erit angulo* BCA, *qui minori lateri* AB *opponitur. Eucl. I. 18.*

Dividatur linea AC bifariam in D, ex D ducatur linea in B; hæc latera AD, DB trianguli ADB, funt æqualia lateribus CD, DB trianguli CDB; attamen latus DB cum minus fit, facit angulum DAB minorem, quam majus latus CB, quod angulum CDB conftituit majorem recto. Jam ex D erigatur linea perpendicularis in E, ex E ducatur linea in A, angulus DAE = ECD (§. 81). Sed angulus CAB major eft angulo CAE, quia hunc continet; ergo etiam angulus idem CAB erit major angulo BCA. Q. E. D.

### *Aliter.*

*Tab. II. Fig. 51.* §. 79. INfcribatur triangulum ABC circulo ex centro G (§. 291); Jam latus, quod majorem arcum fubtendit, eft majus; (§. 80); major vero arcus eft menfura majoris anguli (§. 241) Igitur & latera AB, & BC, & CA inæqualia erunt, & angulus BAC, qui majori lateri BC, majorique arcui BDC opponitur, major erit angulo BCA, qui minore latere BA, minoreque arcu AEB menfuratur. Q. E. D.

CO-

## COROLLARIUM I.

§. 80. IN omni itaque triangulo latera æqualia æquales subtendunt angulos; Et si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt. *Eucl.* I. 6.

## COROLLARIUM II.

§. 81. SI duo triangula v. g. ADE, & CDE, duo latera AE, & DE habuerint, duobus lateribus CE, & DE æqualia; basim item AD = DC, erunt etiam singuli anguli, singulis æqualibus lineis contenti, æquales. *Eucl.* I. 8. Itaque angulus DAE = DCE. & AED = CED, anguli denique EDA, & EDC cum recti sint, pariter inter se æquales erunt. *Tab. II. Fig. 50.*

## COROLLARIUM III.

§. 82. HInc etiam, si duo triangula fuerint, quæ habeant duos angulos æquales, habebunt etiam tertium æqualem; alias quippe tres anguli quorumcunque triangulorum, simul sumpti, non constituerent duos rectos, seu 180 gradus (§. 77).

## COROLLARIUM IV.

§. 83. DEnique colligitur: quod si duo, vel plura triangula v.g. ABG, ACG, ADG, AOG duo latera habeant duobus lateribus æqualia, utrumque utrique; tunc, quæ angulum his lateribus comprehensum majorem habuerint, habebunt etiam latus tertium, seu basim majorem. Sic in hæc triangula ABG, ACG, ADG, AOG latus AB, AC, AD, AO habent æquale (§. 232). Latus quoque AG est commune omnibus: itaque cum angulus BAG > GAC, vel GAD, erit etiam latus BG > CG, aut DG, aut OG. *Tab. III. Fig. 52.*

## PROPOSITIO IV.

§. 84. *IN omni triangulo duo ſaltem anguli neceſſario debent eſſe acuti.* Nam ſi haberet duos rectos, vel duos obtuſos, vel unum rectum, alterum obtuſum, tertium acutum, falſum eſſet, quod tres anguli omnis trianguli efficiant duos angulos rectos, quod tamen eſt demonſtratum (§. 77). Etenim obtuſus unus, & alter rectus, aut duo obtuſi, aut duo recti ſine tertio angulo excederent jam duos angulos rectos, aut ſaltem eosdem adæquarent.

## PROPOSITIO V.

§. 85. *CUjuslibet trianguli quælibet duo latera ſimul ſumpta tertio ſunt majora.*

*Tab. II. Fig. 51.* Sit triangulum ABC. latus CA + AB > BC. Nempe CA + AB eſt linea curva, a puncto C ad punctum B tendens: CB autem eſt linea recta inter hæc duo puncta extenſa; linea autem recta eſt breviſſima omnium, quæ ab uno puncto ad aliud duci poſſunt (§. 12). Igitur CA + AB > CB. Q. E. D.

## PROPOSITIO VI.

*Tab. III. Fig. 53.* §. 86. *SI trianguli recta linea* DE *parallela fuerit baſi* AC, *trianguli latera* AB, CB *ſecabuntur proportionaliter; ita ut* AD *eandem proportionem habeat ad* DB, *quam habet* CE *ad* EB.

Concipiatur enim linea DE hærere in B, tum vero, ſitu ad baſim AC parallelo, moveri verſus baſim AC; ita progredietur, ut ſive tertiam, ſive quartam, aut quamcunque partem lateris majoris AB decurrat, eandem etiam partem proportionaliter minoris lateris BC decurrere debeat. (§. 40). Atque hinc apparet, motum lineæ transverſæ DE velociorem eſſe oportere in latere AB, quam CB; latera tamen decurſa perpetuam proportionem oſtendent.

PRO-

## PROPOSITIO VII.

§. 87. *SI ex trianguli rectanguli angulo* B *perpendicularis ducatur in basim* AC; *duo nova triangula, quæ hac ratione producuntur, nempe:* ADB, *&* BDC *erunt toti triangulo* ABC *similia, & etiam similia inter se,* Tab. III. Fig. 54.

Etenim duo triangula ABC, & ADB habent duos angulos rectos (§. 54.) majus quidem triangulum angulum B, minus vero D; præterea habent angulum A communem. Ergo & angulus ACB = ABD. (§. 82.) Iterum triangulum CDB habet angulum D rectum, & angulum DCB communem triangulo maximo ABC; igitur & angulus CBD minoris trianguli erit æqualis angulo BAC majoris trianguli (§. 82.) ergo tria hæc triangula erunt inter se similia. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

§. 88. UNde triangula æquiangula sunt quoque similia. *Eucl.* VI. 4.

## PROPOSITIO VIII.

§. 89. *TRiangula* ABC, *&* EFG, *quorum bases* AC, *&* EG *item altitudines* BS, *&* FT *sunt æquales, erunt etiam æqualia inter se. Eucl.* I. 38. Tab. III. Fig. 55.

Ducatur BD parallela ipsi AC; & CD parallela ipsi AB, fiat parallelogrammum ABDC. Similiter compleatur, & parallelogrammum EFHG; Lineæ præterea perpendiculares BS, & FT æquales sint *per hypothesim*; atqui parallelogramma, quæ eandem habent basim, eandemque altitudinem, sunt inter se æqualia. (§. 181.) Igitur, & semisses horum parallelogrammorum sunt æquales inter se (§. 2. *Axiom.* 5.) Adeoque cum triangula ABC, & EFG sint semisses parallelogrammorum ABCD, & EFHG (§. 196.) erunt dicta illa triangula etiam æqualia inter se. Q. E. D.

Alti-

Altitudo autem triangulorum desumitur a perpendiculari, a summi.ate trianguli in basim demissa.

## PROPOSITIO IX.

Tab. III. Fig. 56. §. 90. *Triangula* ACD, *&* EGH *quæ in eadem altitudine, hoc est, intra easdem parallelas constituta fuerint, eam inter se proportionem habent, quam bases* AD, *&* EH. *Eucl.* VI. 1.

Sumatur baseos EH quæcunque pars aliquota v. g. media EM, & ducatur recta MG; erit triangulum EGM media pars trianguli EGH (§. 89.) Igitur recta EM, & triangulum EGM sunt consequentium similes aliquotæ. Auferatur recta EM ex basi AD, quotiescunque potest v. g. ter; ducanturque rectæ DC, FC, GC; Quia rectæ DF, FG, GA æquales sunt ipsi EM, etiam tria triangula, DCF, FCG, GCA triangulo MGE æqualia erunt singula: ergo quoties EM continetur in antecedente AD, toties triangulum MGE continetur in antecedente ACD, adeoque ut basis AD ad basim EH, ita triangulum ACD ad triangulum EGH. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 57. §. 91. Ex his quoque consequitur: triangula ACB, ADB, AEB, & AFB esse inter se æqualia; æqualem quippe basim, & altitudinem habent.

## PROPOSITIO X.

Tab. III. Fig. 58. §. 92. *Triangula similia v. g.* ABC, *&* DEF *sunt inter se in duplicata ratione laterum homologorum* AC, *&* DF. *id est: si latus* AC *fuerit altero tanto m.ijus quam* DF, *& alia latera utriusque trianguli fuerint similia, triangulum* ABC *erit quadruplum trianguli* DEF. *Eucl.* VI. 19.

Fiat GH ad DF, ut AB ad DE, propter similitudinem trian-

triangulorum ABC, & DEF ſic ſe habebit AB ad DE, ſicut AC ad DF; atqui ut AB ad DE, ita eſt DF ad GH; Igitur AC ad GH habet duplicatam rationem ejus, quam habet AC ad DF, aut AB ad DE; ſed proportio trianguli ABC ad ſimile triangulum DEF eſt ut AC ad GH, nempe compoſita ex rationibus laterum AC ad DF, & DF ad GH (§. *Arith.*) ergo triangulum ABC ad triangulum DEF habebit duplicatam proportionem rationis lateris homologi AC ad DF. Adeoque ABC erit quadratum ipſius DEF. Q.E.D.

## PROPOSITIO XI.

§. 93. *Trianguli Iſoſcelis anguli ad baſim* AB *ſunt æquales.*

Idem triangulum ACB ſecunda vice ponatur, ſed inverſum BCA; Igitur cum in his duobus triangulis ACB, & BCA per *hypotheſim* latus AC = BC, & latus CB = CA, angulus item ACB = BCA, erit etiam angulus CAB = CBA, & CBA = CAB. (§. 81.) Q.E.D. *Tab. III. Fig. 59.*

## COROLLARIUM.

§. 94. Triangulum igitur æquilaterum eſt etiam æquiangulum, & viciſſim: triangulum æquiangulum eſt etiam laterum proportionalium.

## PROPOSITIO XII.

§. 95. *Si ſuper latera trianguli rectanguli* ABC *tria triangula ſimilia æquiangula* ADB, BEC, CFA *deſcribantur, erit figura* CFA, *ſuper hypothenuſa* AC *deſcripta, æqualis aliis duabus figuris ſimilibus ſuper baſi* AB, *&* *catheto* BC *deſcriptis. Eucl. VI. 31.* *Tab. III. Fig. 60.*

## SCHOLION I.

§. 96. Idem quoque eveniet, ſi ſuper lateribus ejuſdem trianguli ABC quadrata aut quæcunque alia figura *Fig. ead.*

regularis, describantur; nam quadratum super hypothenusa AC descriptum, æquale erit utrique quadrato, tam super basi AB, quam super catheto BC descripto. *Eucl.* I. 47. Ad hoc vero, ut triangulum rationale sit, cujus nimirum latera communem quandam rationem exprimant; tribue *hypothenusæ* spatia 5, *basi* spatia 4. *catheto* autem spatia 3. Si jam 3 quadraveris (§. 140. *Arith.*) habebis 9; si quadraveris 4, habebis 16; 16 vero $+ 9 = 25$. Quæ eadem 25 provenient, si numerum hypothenusæ 5 quadraveris. Porro maximam utilitatem hæc proportio trianguli rectanguli in omnem geometriam intulit, ut non modo Euthymetriæ commodissime deserviat, sed etiam tabulæ sinuum, & Logarithmorum juxta eam, tanquam fundamentum, sint calculatæ. Ut ut autem hæc propositio loco quadragesimo septimo libri I. *Euclidis* reperiatur; *Euclidem* tamen auctorem non habet, sed *Pythagoram*, qui facile 250 annis *Euclidem* vivendo antecessit, quique ante Christum natum 540 annis floruisse perhibetur; Ab hoc tanti inventum propositionis hujus suæ habitum fuit, ut Hecatomben seu holocaustum 100 boum Diis Largitoribus immolaret; Inde postea Euclides, quemadmodum aliorum præstantium Mathematicorum, suam ætatem præcedentium demonstrationes, ita & hanc in Elementa sua traduxit.

## SCHOLION II.

§. 97. Verum, cum hæc quidem quadrata, in trianguli lateribus 3. 4. 5 exarata, triangulum *rationale* constituant; omnia tamen alia triangula irrationalia esse censentur (§. 101. *Arith.*) veluti illud foret triangulum, cujus *basis* se habeat ut 6, *cathetus* ut 5, *hypothenusa* ut 7. Quadratum quippe *hypothenusæ* $7 = 49$, *catheti* vero & *baseos* $= 61$. ex quo habetur: quadratum hujus *hypothenusæ* esse inæquale, & incommensurabile quadratis *baseos*, & *catheti*. Nihilominus modus indagatoribus innotuit, quo triangula ejuscemodi, nec rectangula, multo to minus rationalia, cujuscunque baſeos, & catheti, beneficio arithmetices & rectangula, & rationalia reddi queant, quemadmodum illud Pythagoricum & rectangulum, & rationale eſt:

§. 98. Sit itaque trianguli *baſis* 7, *cathetus* 6, fiat ex 7, numerus quadratus 49, uti etiam ex 6 nempe 36, 49 + 36 = 85. Itaque 85 adſcribantur pro *hypothenuſa*. *Cathetus* porro, & *baſis* ſic reperitur: 36 ſubtrahantur a 49, & reſiduum, nempe 13 apponatur pro *catheto*. Rurſus numerus 6 duplicetur, ut ſit 12, & 12 × 7 = 84. 84 adſcribatur pro *baſi*; atque ita redditum eſt triangulum *rationale*. Fiat quippe ex hypothenuſa 85 quadratum = 7225; & ex 84 quadratum = 7056; ex 13 quadratum 169: Jam 7056 + 169 = 7225; quod argumento eſt, *rationale* eſſe triangulum, cujus nempe quadratum *hypothenuſæ* æquale ſit duobus quadratis *baſeos*, & *catheti*. Hac ratione plurima triangula *rationalia* redduntur.

§. 99. Jam vero neceſſum eſt ad ordinem reverti, & Propoſitionis Euclidicæ, (§. 95, & 96.) allatæ, demonſtrationem ordiri; nempe: *quadratum hypothenuſæ* AGFC *æquale eſſe duobus quadratis catheti, & baſeos, nimirum* CDBL, *&* AEKB. *Tab. III. Fig. 61.*

Nam triangulum GBA = triangulo ACE (§. 89.) quia nempe utrumque componitur ex duobus lateribus GA, & AE cum angulo recto GAC ſeu EAB, & addito angulo CAB. Jam parallelogrammum AMCE eſt æquale porallelogrammo ſeu quadrato AE × KB (§. 181.) Item parallelogrammum AMCE = parallelogrammo GOBA; quia nempe etiam ACE = GBA, & GOBA = GRSA (§. *eodem*.) Ergo etiam ABKE = GRSA. Hac eadem ratione diſcurritur de minori quadrato, ob allegatam nempe rationem triangulum DAC = FBC, & parallelogrammum NCDA = parallelogrammo BCDL (§. 181.) & idem parallelogrammum NCDA = parallelogrammo BOFC; quia nempe DAC = FBC. Denique

BOFC = SRFC. Ergo etiam BCDL = RSFC; ideoque quadratum ABKE + BCDL = quadrato AGFC. Q. E. D.

Tab. III. Fig. 62. §. 100. Ast, cum quidem in triangulo rectangulo ADB, quadratum lateris AB æquivaleat duobus quadratis AD + DB; *Quod si tamen ex* D *recta in* C *demittatur, atque triangula* ADB, ACD, *&* DCB *similia inter se constituantur* (§. 87.) *tum quadratum totius* AB, *nempe* AMNB *æquivalebit quadrato lineæ* AC, *nempe* GMHO, *&* *quadrato lineæ* CB, *nempe* COFB, *una cum duplici rectangulo* AC × CB *nempe* AGOC, *&* OHNF.

Sit linea AB 10 partium, erit quadratum AMNB, 10 × 10 = 100. Linea AC sit 7 partium, hujus quadratum GMHO 7 × 7 = 49. Linea CB sit 3 partium, erit quoque hujus quadratum COFB 3 × 3 = 9. Rectangulum unum ex 7 × 3 nempe AGOC = 21; alterum quoque rectangulum æquale 7 × 3 nempe OHNF = 21. At vero hæc omnia 21 + 21 + 9 + 49 = 100. Extrahatur itaque ex 100 radix quadrata (§. 147. *Arith.*) radix illa nempe 10 = lateri AB. Q. E D.

## PROPOSITIO XIII.

Tab. III. Fig. 63. §. 101. *In triangulo obtusangulo* DEF, *quadratum lateris* DF, *quod obtusum angulum subtendit, æquivalet quadratis duorum aliorum laterum* DE, *&* EF, *cum rectangulo* DE × EG bis sumpto.

Nam quadratum lateris DF æquivalet quadratis laterum DG + FG (§. 99.) atqui quadratum lateris DG æquivalet quadratis DE + EG, & insuper rectangulo DE × EG bis sumpto, ut patet ex propositione mox præcedente. Quadratum quoque lateris EF æquivalet quadratis EG + FG (§. 99.) ergo etiam quadratum DF erit æquale quadratis DE + FE + rectangulo DE × EG bis sumpto. Q. E. D.

§. 102.

§. 102. LUbet modo quædam problemata de triangulis subnectere; per practicas quippe ejuscemodi propositiones Theoremata non raro illustrantur.

## PROPOSITIO XIV.

§. 103. *TRiangulum æquilaterum super basi* CE *describere.* Eucl. I. 1. *Tab. II. Fig.* 48.

Aperi primum circinum apertura CE, & uno pede circini posito in E fac arcum versus D; rursus eadem circini apertura servata, pone circini pedem in C, & fac arcum versus D, ubi se duo arcus secuerint, ibi erit punctum, quo lineæ ex C & E duci debeant, ut triangulum æquilaterum enascatur.

## PROPOSITIO XV.

§. 104. *DAtis duabus lineis* MN, *&* OP, *quarum* MN *debeat esse basis, construere Isoscelem.* *Tab. III. Fig.* 59.

Fiat AB = MN, tum aperiatur circinus apertura lineæ OP, positoque circini pede in B fiat arcus versus C, iterum posito pede in A fiat arcus in C, ad punctum intersectionis arcuum C ducantur lineæ, habebiturque Isosceles.

## PROPOSITIO XVI.

§. 105. *DAtis tribus lineis* FG, HI, KL *triangulum scalenum* ABC *delineare.* *Tab. II. Fig.* 50.

Ducatur linea AC = HI, & accepta longitudine lineæ FG fiat ex C versus B arcus; Rursus ex puncto A longitudine KL fiat arcus versus B, ad punctum intersectionis B ducantur rectæ ex A, & C, habebiturque triangulum scalenum ABC.

## PROPOSITIO XVII.

Tab. III. §. 106. *Datis duabus* EF, *&* GH *basi nimirum, & hypothenusa delineare triangulum rectangulum.*
Fig. 54.

Delineetur angulus rectus (§. 24, & 25.) fiatque basis AD = ipsi EF. Tum apertura circini GH fiat arcus versus perpendicularem, atque ad punctum intersectionis B ducantur rectæ ex A, & D, habebiturque triangulum rectangulum ABD.

§. 107. Quod si lineæ GF, & IK datæ sint, nimirum basis & hypothenusa, tum in formato angulo recto abscindatur AD = ipsi EF, & DB = IK, atque extremitates harum linearum conjungantur recta AB, prodibitque rursus triangulum rectangulum ABD.

# CAPUT V.

## Instrumenta præcipua Geometrica referuntur, methodusque exponitur, Geodæsiam practice exercendi.

## DEFINITIONES.

§. 108. *Instrumentum Transportatorium* est semicirculus, in 180. gradus divisus. Solet hoc instrumentum passim ex aurichalco, tres circiter digitos in diametro continens, parari, in quo tamen ob parvitatem minuta non exprimuntur; Tab. III. Licebit tamen majori forma tale instrumentum conficere, illi-
Fig. 64. que regulam indere, quæ ad omnes circuli gradus ex centro A moveri queat, & juxta gradus, & minuta angulos ostendat.

§. 109. Quoniam vero etiam chordæ arcuum in notitiam magnitudinis angulorum nos queunt adducere; hinc aliud *Transportatorium rectilineum* habetur, super quo magnitudo

nitudo chordarum omnium graduum, & minutorum in ſemicirculo exiſtentium eſt deſignata. Hoc inſtrumentum deſcribit *Leupold in Theatro Arithmetico-Geometrico* §. 348.

§. 110. *ASTrolabium* eſt ſemicirculus, in ſuos gradus, & minuta diviſus, habens diametro adjunctas utrinque dioptras AC, & mobilem præterea ex centro B regulam, ſuis quoque dioptris ſeu pinnicidiis ED inſtructam, per quarum dioptrarum fiſſuras oculis aſpectus in objecta pateat. Mos eſt diametro aſtrolabii affigere *libellam* MN vulgo Waſſer-Wage, ſuis dioptris inſtructam, quæ nos certos reddat de ſitu aſtrolabii horizontali. Alia præterea ſunt aſtrolabia, quæ integrum circulum, gradibus ſuis, & minutis inſcriptum, exhibent. *Tab. III. Fig. 65.*

§. 111. *QUadrans* eſt quarta circuli pars in 90 gradus, quorum quilibet in 60 minuta diſpeſcitur, diſtributus. Quo major *quadrans* ejusmodi fuerit, eo quoque erit utilior. Solet non raro ejus lateri radius cum dioptris affigi AB, aut ſaltem filum cum pendulo plumbeo C. Hoc quoque inſtrumentum ad explorandos altitudinum angulos a multis adhibetur. *Tab. III. Fig. 66.*

§. 112. *ACus magnetica* lineali, dioptrisque inſtructa atque ſuper ſtativo Verticali poſita, vulgo *Bouſſole* ad praxin geodæticam a multis adhibetur, præſertim in diſtantiis brevioribus; aſt in longioribus intervallis plerumque utentes ludificat, tum quod in modico circulo exacta nequeat graduum deſignatio deprehendi, tum quod inconſtanti directione excurrat, & borealem limitem falſo ſitu plerumque aberret.

§. 113. *MEnſula Prætoriana.* Sic dicta ab inventore ſuo *Joanne Prætorio*, uſitatiſſimum geometrarum inſtrumentum, & aliis fortaſſe omnibus non immerito in geodætica praxi anteponendum. Primo quidem, ut rerum omnium initia anguſtiora eſſe conſueverunt, inſtrumentum hoc tabula conſtabat,

bat, ſuper fulcro innixa, atque lineali dioptris inſtructo; recentiſſimis vero curis illud acceſſionibus tantis eſt locupletatum, ut tum ob fulcri, in tripodem deſinentis, firmiorem conſiſtentiam, tum ob omnigenam in omnes directiones mobilitatem, tum etiam ob ipſum, quem prius ſolum habebat, motum circularem, ope epiſtylii denticulati atque tympani faciliorem redditum, novum hodie atque a veteri omnino diverſum cenſeri debeat. Emendatæ hujus menſulæ omnem deſcriptionem, & uſum in eximio opere, nuper typis evulgato, *de Re Ichnographica* perſecutus eſt *Jacobus Marinonius* Mathematicus Cæſareus, adeo luculente, ut ex mente Magni *Wolffii*, plena jam utiliſſimo inſtrumento conſtet dignitas, nihilque in eo pro Geometricæ praxeos emolumento porro deſiderari videatur. Quare ſat fuerit, digitum plura ſcire cupientibus ad limpidiſſimum hunc fontem intendiſſe, cum alioquin mihi compendiis ſtudenti non liceat præclariſſimi auctoris juſta veſtigia relegere; minus, abſolutam doctrinam mutilare. Qui inſtrumento hoc bene uti norunt, ex tot aſſumptis in tabula centris, quot ſtationes in territorio elegerunt, intuentur tandem in charta expanſa omnem territorii figuram, quam deinde oporteat ſcalæ beneficio menſurare.

In muſæo noſtro academico ejuſcemodi menſula præclare elaborata exiſtit, quæ pluribus operationibus Gæodæticis accuratiſſime deſervit.

§. 114. MEnſulæ huic Geometricæ neceſſarii porro accedere debent *bacilli*, 3 aut 4 pedes longi, ferreaque cuſpide muniti, quo facilius queant in terram adigi; item *vexilla* bacillis interponenda, & *catena ferrea*, cujus articuli unum pedem ſint longi; funes quippe pro camporum dimenſione ſine errorum diſcrimine non adhibentur, tum quod elaſtici vehementer ſint, & tendantur: tum quod humoribus imbuti contrahantur; niſi forte prius oleo, & cera valide impraegnentur; quamvis ne tum quidem catenæ adæquent apud Geometras uſum.

§. 115.

§. 115. *Viatorium* est instrumentum, tabula circulari multifariam divisa, & pluribus rotis dentatis constans. Cum hoc instrumentum rotæ curruli, aut pedi hominis vel equi proficiscentis beneficio fili illigatur, monstrabit repetitis tensionibus numerum circumvolutionum rotæ, aut passuum factorum, ita ut, habita ratione peripheriæ in rotis, aut longitudinis in passibus, liceat scire, quotnam milliaria quispiam in curru concluso considens sit emensus. Hoc instrumentum fuse describit *Levinus Hulsius* in tractatu *de mechanicis instrumentis*.

§. 116. HUc quoque referri debet *Circinus Proportionalis*, qui est circinus planus, triplici linea sic distinctus in utroque crure, ut lineæ illæ in centro D concurrant; Extima linea D A est *Arithmetica*, media D B est *Geometrica*, intima D C est Polygonalis. Et hæ quidem tres lineæ, *Arithmetica* nimirum, *Geometrica*, & *Polygonalis* in uno plano *circini proportionalis* latere describuntur; in altero latere aliæ tres describuntur lineæ ad alios, & alios in Geometria usus: nempe linea *chordarum*; linea *cuborum* seu *solidorum*; & linea *metallica*. Hac posteriori linea frequenter Pyrotechnæ utuntur, ut globorum æneorum aut ferreorum gravitatem metiantur. Hic quoque circinus multiplicem usum in Geometria præstat, ut in sequentibus patescet. *Tab. III. Fig. 67.*

§. 117. ALiis Geodæticis instrumentis enumerandis veluti *Pantometro*, *Gromæ* &c. non immorabor, tum quod vix usitata sint, tum quod utentium scopo non sat accurate respondeant. Igitur ad *Problemata Geodætica* est transeundum. Triplicis autem ordinis *Problemata* occurrent, ea nimirum, quæ *Planimetriam* seu mensionem locorum planorum spectant: tum quæ *altimetriam*, ac denique quæ *bathymetriam* seu profunditatum dimensiones respiciunt.

## PROPOSITIO I.

§. 118. *ANgulum seu in charta, seu in campo metiri.*

Tab. III. Fig. 64. Si angulum in charta metiri velis, pone centrum A *Transportatorii* ad verticem anguli, quem metiri cupis: tum lateri ejusdem anguli applica diametrum *Transportatorii* CA, & numera gradus interceptos v. g. ad B.

Tab. III. Fig. 65. In campo autem pone *Astrolabium*, super fulcro hujus centrum B collocetur perpendiculariter super vertice anguli mensurandi, ita ut BC examussim correspondeat uni lateri illius anguli, quod fit ope dioptrarum A C; tum regula mobilis E D ea ratione versus alterum crus anguli dirigitur, ut per dioptras baculum defixum valeas intueri. Atque inde gradus anguli in peripheria astrolabii numerantur.

## PROPOSITIO II.

§. 119. *INvenire distantiam duorum locorum* AB *ab invicem, si transitus per medium sit aliquo flumine, aut monte interclusus.*

Tab. III. Fig. 68. In puncto arbitrario, ex quo utrumque locum accedere liceat, collocetur mensula Prætoriana, & defixo in ea puncto D dirigitur lineale dioptrarum beneficio, ex D in A, ducitur que in charta super mensulam extensa juxta hanc directionem linea DM. Mox, converso circa punctum lineali, fit directio per dioptras ex D in B, fitque altera linea DN in charta; quæ utraque linea concurrens exhibet accurate angulum AD B. Jam mensuretur utraque linea DA, & DB, sitque prior DA $1\overset{o}{3}\overset{\prime}{7}5$, altera DB $1\overset{o}{4}\overset{\prime}{6}2$ longa; hæ longitudines juxta scalam transferantur in chartam DM, & DN, atque ex M ducatur recta in N, hæc recta per scalam priorem mensurata dabit longitudinem tertiæ lineæ, seu distantiam locorum AB. $1\overset{o}{8}\overset{\prime}{7}5$.

Nam MDN. MN : : ADB. AB.

§. 120. OPe astrolabii distantia inaccessa AB sic reperitur: in delecto puncto D astrolabium constituitur sic,

ut

ut centrum aſtrolabii cum puncto D examuſſim concordet; tum dioptræ in linea immobili ſeu diametro aſtrolabii poſitæ dirigantur in B; linea autem mobilis in A; Gradus itaque aſtrolabii magnitudinem anguli ADB notabunt v. g. $83^{\circ}\,18'$. Porro ſpatium ex D in B menſuretur, ſitque $146^{\circ}\,2'$; ſpatium autem ex D in A $137^{\circ}\,5'$. Inde poſtea Geometra domum reverſus angulum $ADB = 83^{\circ}\,18'$ in charta deſcribit ope tranſportatorii, uti & ſpatia DB, & DA juxta ſcalam protenſa. Denique ex A in B linea recta ducta, atque juxta ſcalam eandem menſurata, notat longitudinem ſpatii inter A, & B interjacentis, nempe $187^{\circ}\,5'$.

§. 121. ALio præterea modo invenitur diſtantia AB, bacillos adhibendo. Defigatur baculus in arbitrario puncto D in terram: tum adhibita catena menſurentur lineæ DA, & DB; $DA = 137^{\circ}\,5'$, & $DB = 146^{\circ}\,2'$. Quarta pars lineæ $DA = 34^{\circ}\,3'$ ducatur ex D in G; uti & quarta pars lineæ $DB = 36^{\circ}\,5'$ ducatur ex D in H. Ex G ducatur recta in H, hæc menſurata continebit $61^{\circ}\,8'$. Rurſus $61^{\circ}\,8' \times 4 = 187^{\circ}\,5'$. Erit itaque linea AB $187^{\circ}\,5'$.

§. 122. QUod ſi lineam GH, ob exundantem aquam aut aliquem alterum obicem, ducere non liceat, continuetur recta AD beneficio bacillorum verſus E (§. 12.) & recta DB verſus F. Quarta pars lineæ $DA = 34^{\circ}\,3'$ transfertur ex D in E, & quarta pars lineæ $DB = 36^{\circ}\,5'$ ex D in F. linea FE menſurata, & per 4 multiplicata exhibebit 187 perticas 5 pedes, diſtantiam nimirum AB.

§. 123. NIſi quis forte malit totam lineam AD recto ordine ex D in T continuare; lineam vero BD in S. menſuretur ſpatium ST, & erit æquale ſpatio in acceſſo AB.

## PROPOSITIO III.

Tab. IV. Fig. 69. §. 124. *Invenire diſtantiam duorum locorum* AB, *quorum unus tantummodo nempe* A *adiri poſſit.*

Triplici modo potiſſimum fit. Primo ope menſulæ: colloca hanc in arbitrario loco nempe in C. & dioptrarum adminiculo delineatur angulus ACB in charta, ſuper menſulam extenſa; Mox adhibita catena menſuretur linea CA v. g. $27^{\circ}\,2'$, & juxta ſcalam in chartam menſura hujus lineæ transferatur. Tum collocetur menſula in A, concilieturque examuſſim linea AC ſuper chartam deſcripta cum linea territorii AC. ac tandem convertatur lineale in B, & notetur ſuper chartam angulus BAC. Denique ubi lineam ex B in C duxeris, & linea AB cum CB in B concurrerit, ibi punctum defige. Menſuretur itaque per ſcalam ſpatium AB in charta delineatum juxta ſcalam, & prodibunt 33 perticæ.

§. 125. COnſimilis fere eſt operatio, dum menſulæ loco aſtrolabium adhibetur; Explorantur ſiquidem per aſtrolabium tum in C tum in A poſitum anguli BCA, & CAB, angulus BCA $= 92^{\circ}\,20'$, angulus BAC $= 32^{\circ}\,26'$. Interponiturque linea CA $= 27^{\circ}\,2'$, juxta ſcalam menſurata. Ubi demum, & lineam AB in charta reſultantem beneficio ſcalæ menſuraveris, deprehendes longitudinem AB $33^{\circ}$.

§. 126.

§. 126 ALia paulisper est operatio, cum sine mensula, & astrolabio bacilli duntaxat ad resolvendum hoc problema adhibentur: Defige itaque bacillum in loco arbitrario C; alterum bacillum D etiam in loco arbitrario defige, hac tamen ratione, ut cum C, & B lineam rectam continuet: Tum adhibita catena mensura distantiam AD, hancque ubi cognoveris, defige in medio illius nempe in G tertium bacillum. Rursus mensura intercapedinem inter G, & C, hancque ipsam intercapedinem inter C, & G transfer recto ordine ex G in E. Porro procede in F, & inquire locum, qui non tantum cum E A, sed etiam cum G B lineam rectam efformet, atque in hoc loco F ultimum bacillum defige. Linea FD = AB, eamque ubi mensuraveris, reperies locum A 33 perticis esse sejunctum a B. Hæc operandi ratio eo jucundior est, quod sola catena, & bacillis peragatur. Quæ quidem omnia in quantitatum proportione fundantur; sicut enim AB ad triangulum AGB; ita FD ad simile, & æquale triangulum FGD.

## PROPOSITIO IV.

§. 127. *DIstantiam duorum locorum AB metiri, quorum neutrum accedere possis.* *Tab. IV. Fig. 70.*

Triplici potissimum modo hoc similiaque problemata resolvuntur; aut nempe per mensulam, aut per astrolabium, aut per solos bacillos.

Mensulam igitur adhibiturus, e regione duorum locorum inaccessorum A, & B duo puncta deligat arbitraria v. g. C, D. constitutaque perpendiculariter mensula super puncto C, ope linealis angulos ACB, & ACD in charta describat super mensulam expansa; inde adhibita catena mensuret lineam CD v. g. 4°8'8, eamque juxta scalæ proportionem in charta exprimat. Tum mensulam ex C in D transferat, rursusque in eadem charta angulos CDA, & CDB delineet. Denique cum mensurata fuerit per scalam linea AB, deprehendetur distantia duorum locorum inaccessorum esse 70 perticarum.

§. 128. **E**Adem fere est operatio assumenti astrolabium; Nam in arbitrario puncto C angulorum ACD, & BCD gradus metitur, quorum prior nempe ACD $= 107^{\circ}$; alter BCD $= 40^{\circ}$. Ex puncto D quoque metiatur gradus anguli CDB $= 97^{\circ}$, & anguli CDA $= 34^{\circ}$, tandem lineam CD mensuret $48^{\circ} 8'$. Domum reversus Geometra primum lineam CD juxta scalam in charta describat; tum ex C ope, transportatorii describat angulum $40^{\circ}$ nempe BCD, itemque angulum $107^{\circ}$ nempe ACD. Ex puncto D describat pariter angulum $34^{\circ}$ CDA, itemque angulum $97^{\circ}$ CDA. Puncta, in quibus DB, & CB itemque CA, & DA convenient, id est A, & B notet, atque interjectum inter A, & B spatium, ducta linea, juxta scalam mensuret; deprehendetque distantiam 70 perticarum.

Tab. IV. Fig. 71. §. 129. **D**Enique duo hæc inaccessa loca A, & B certa quapiam mensura a se invicem distare deprehenduntur usu solorum bacillorum, & catenæ mensoriæ. Itaque bacillis, & catena instructus progredere in Campum, & delige punctum C, quod cum duobus locis inaccessis ferme angulum rectum efficiat, in C bacillum defige; alterum bacillum defige in arbitrario puncto D, quod tamen cum A, & C rectam continuet. Tum assume arbitrarium punctum E, quod ferme perpendiculare sit ipsi C. Ex C duc rectam in E, eamque eadem longitudine continuabis in G, itemque ex D per E prosequere rectam in F, ita ut EF $=$ DE: Quomodo autem rectæ lineæ bacillorum ope formentur, dictum est (§. 12.) Porro procede versus M ad illud nempe punctum, ex quo

recta

recta linea tum per E in A, tum per per G in F proſpectare queas, atque in hoc puncto M pariter hacillum fige. Tranſi deinde verſus H, atque in eo rurſus loco arbitrario bacillum fige, qui cum G, & B rectam conſtituat; Ex H per G protende lineam rectam K, ita ut HE = EK. Denique in L progredere ad illud punctum, ex quo per C in K, & ſimul per E in B recta linea excurrat. Defixo i aque in hoc puncto L bacillo menſura diſtantiam LM, & habebis ſimul diſtantiam locorum inacceſſorum AB; Nam Trapezium ACGB = Trapezio MGCL, & triangulum EMF = EAD; item KLE = HBE: Igitur etiam LEM = BEA, adeoque LM = AB.

## SCHOLIUM.

§. 130. Cum quidem & acus magnetica inſtrumentum goniometricum ſit (§. 112); omiſimus tamen Problemata mox præcedentia illius ope reſolvere, propterea quod in majoribus diſtantiis citra erroris offenſam non adhibeatur; ſecurior aliquanto illius uſus eſſe poteſt in diſtantiis minoribus menſurandis, velut ſequens problema oſtendit.

## PROPOSITIO V.

§. 131. *Ope acus magneticæ prati cujuſpiam, aut agri peripheriam delineare.* Tab. IV. Fig. 72.

Sit peripheria prati A, B, C, D, E, F, G, H. delineanda; Pone itaque acum magneticam, lineali, & dioptris inſtructam, atque ſuper ſtativo collocatam in A, mox converte lineale dioptrarum beneficio in B, ac adſcribe in charta: quotumnam acus magnetica gradum indicaverit v. g. 101. tum ope catenæ menſuretur linea AB, quæ contineat v. g. $27^{\circ}\ 3'$. Tranſi ad locum B, directoque lineali in C deprehendes acum ad gradum 12 collimare, hunc gradum adſcribe, rurſusque

lineam

lineam B C catena metire v. g. $14^{\circ}\,3'$. In loco C deprehendes acum, cum lineale in D directum fuerit, v. g. ad 101 g adum consistere, lineam vero $CD = 16^{\circ}$. Ex D in E prospicienti declinabit acus v. g. ad 35 gradum, linea autem DE $= 9^{\circ}$. Ex E in F, monstrabit acus v. g. 301 gradum, & linea $EF = 34^{\circ}\,5'$. Ex F in G notabitur ab acu v. g. gradus 285; ipsa vero linea $FG = 13^{\circ}\,9'$. Ex G in H notabitur ab acu gradus 234, & linea ipsa $GH = 16^{\circ}\,5'$. Denique ex H in A prospectans deprehendes ab acu notari gradum 165, longam vero esse lineam $HA\ 24^{\circ}\,3'$. His adeo peractis, cum domum reversus fueris, chartam expande, atque juxta priores in campo declinationes acus magneticæ angulos describe, interposita cuivis angulo laterum longitudine juxta scalæ proportionem. Et sic habebis delineatam in charta spatii desiderati figuram.

## SCHOLIUM. I.

§. 132. Mox dictum problema etiam adhibitione mensulæ Prætorianæ resolvi potest: Mensula quippe in singulis punctis A, B, C, D, E, F, G. H successive ponitur, & ope linealis atque dioptrarum anguli ABC, BCD, CDE &c. delineantur, quibus suarum semper linearum longitudines, juxta scalam digestæ, interferuntur.

## SCHOLIUM II.

§. 133. Alia adhucdum ratione area hæc prati irregularis delineari potest, quin externa latera AB, BC &c. mensurentur: Mensula in loco arbitrario intra ipsam aream v. g. in O constituitur, postquam nimirum in singulis prati

prati

prati angulis A, B, C, D &c. bacilli defixi fuerunt; in medium chartæ supra mensulam extensæ acus O infigitur; atque ex hoc centro O beneficio linealis anguli AOB, BOC, COD, DOE, EOF &c. in charta delineantur. Mox mensurentur catena singula horum triangulorum latera in prato, nempe OA, OB, OC &c. hæque mensuræ juxta scalam in lineas super charta descriptas transferantur. Ubi extremitates harum linearum nempe A, B, C &c. lineis rectis copulaveris, prodibit desiderata areæ figura. Idem ipsum impetrabitur ab eo, qui loco mensulæ assumens astrolabium, ex centro O angulos AOB, BOC &c. determinaverit, deinde in chartam ope transportatorii deferendos cum interpositis juxta scalam lateribus OA, OB &c.

## SCHOLIUM III.

§. 134. Quod si cui libitum sit loco catenæ in mensurando campos adhibere regulam ligneam v. g. perticam, aut hexapedam, seu orgyam, is adcurare debet, ut ne perticam elevatam teneat, & extremitatibus A, & B duntaxat solum contingat; hoc quippe errore admisso pertica multo brevior redditur, & quæ alioquin longa est AE, sic mensurando tantum extenditur ab A in D. *Tab. IV. Fig. 73.*

## PROPOSITIO VI.

§. 135. *Latitudinem fluvii, aut piscinæ invenire.* *Tab. IV. Fig. 74.*

E regione objecti A trans flumen positi defigatur baculus in ripa E, continueturque hæc linea recta usque in B. Puncto E ope astrolabii, aut alterius instrumenti goniometrici adjunge perpendicularem lineam ad arbitrariam distantiam v. g. usque in C. Lineam hanc perpendicularem CE continua usque in D recto ordine; ita ut CE = ED. Porro ope mensulæ, aut astrolabii desume angulum ECA, ac hunc eundem angulum transfer in D, ut ECA = EDB. Itaque ubi lineæ EB, & DB concurrent, nempe in B, ibi baculum defige, menfura diftantiam EB, & habebis latitudinem fluvii AE. Nam uterque angulus CEA, & DEB eft rectus, angulus autem ECA = angulo EDB *per hypothefim*, & latus etiam CE = lateri ED. Igitur etiam EB = AE.

## PROPOSITIO VII.

*Tab. IV. Fig. 75.* §. 136. *Torrentem, aut fluvium finuofo alveo natantem, in charta delineare.* Et breviffime, & commodiffime in confimilibus delineationibus præ aliis inftrumentis menfula adhibetur; propterea, quod in menfula multiplices, variantesque anguli ac ductus ftatim ipfo objectorum intuitu delineentur; quos angulos plurimos vix fine perturbatione in aftrolabio, aut acu magnetica juxta gradus Geometra notaret, ac tandem domum reverfus ope transportatorii, aut acus magneticæ delinearet in charta. Itaque cum dicta menfula accede ad A, & lineam AB in charta exprime; menfura deinde per catenam fpatium AB, uti & transverfales lineas, usque ad ripam fluminis excurrentes, easque ad fcalam exactas in chartam transfer. Defigna deinde lineam BK, eamque pariter cum fuis transverfalibus juxta fcalam in charta exprime. Ex K delineabis KL, quam lineam etiam menfurabis, & fcalæ beneficio in chartam transferes. Ex eodem puncto K duc lineas in charta verfus objecta arbitraria v. g. O, M, N, atque ubi in menfula ex puncto L in eadem objecta M, N, O lineas duxeris, patefcet diftantia horum objectorum, aut bacillorum in M, N, O infixorum. (§. 124). fic porro progredieris ad arbitrariam fluminis protenfionem. Tandem ad aliud fluminis latus menfurandum tranfiturus, delinea angulum LDE in charta, juxta fcalam menfuratum. Tum pofita menfula in E defigna lineas EP, PQ &c. cum fuis transverfalibus; quæ omnes lineæ examuffim menfuratæ, atque ad fcalam exactæ, finuofum fluvii decurfum in charta exhibebunt.

COR-

## COROLLARIUM I.

§. 137. NEmo jam usque adeo inops consilii fuerit, qui ex allatis problematis non deducatur in cognitionem, ac praxim, ope præsertim mensulæ Prætorianæ, territoria integra, & pagos mensurandi, delineandique; quamvis mensoribus, & illis præcipue, qui nullo usu condocefacti fuerint, nonnunquam σφάλματα obrepant: quas aberrationes cautissime discavere docet *Clariss. Marinonius de Re Ichnographica* Cap. V. Quem pro accuranda praxi Geometrica utilissime consulueris.

## COROLLARIUM II.

§. 138. VErum quoniam in Geodæticis descriptionibus non plana ubique superficies, sed etiam collosa, & ab horizonte vel in ascensum, vel in descensum declinans reperitur; Hinc necessum quoque est, modum suppeditare ejuscemodi superficies mensurandi. Cum elevatio, aut depressio non excedit 5 pedes ad distantiam 5 perticarum, tunc idonee adhibetur semicatena, cujus altera extremitas alligatur culmini B perticæ AB verticaliter fixæ, altera vero extremitas attinetur in puncto C; itaque, ubi adhibita libella D deprehenderis, a catena horizontalem situm teneri, scies, collem AC spatio AB in ascensum declinare. Quod si collis ex C porro ascendat, pone in C perticam, & adhibita catena ulteriorem hunc ascensum metire modo mox insinuato. *Tab. IV. Fig. 76.*

§. 139. QUod si autem collis in præcipitium divergat, tum duæ perticæ adhibeantur, quarum AB in terram verticaliter figatur; altera CD horizontaliter juxta libellam Wasser-Wage directa sit, sitque 18 etiam vel 20 pedes longa. Pertica CD normali loculamento MN conjuncta est ad angulum rectum perticæ AB per quod loculamentum MN pertica AB vel versus A deorsum, vel versus B sursum pro ascendentis montis exigentia extrahi possit, ac tandem *Tab. IV. Fig. 77.*

 cuspi-

cuſpide ferrea in terram defigi, ut nempe pro magnitudine ſpatii AM altitudo montis ST deprehendatur.

§. 140. HUc quoque pertinet commemorare *Nivellationem* vulgo Waſſer-Wägen, quæ ars eſt determinandi: quantonam diſcrimine aquæ fluentes per diverſa continuo territoria jam terræ centro propiores ſint, jam remotiores. Sit itaque

## PROPOSITIO VIII.

§. 141. *FLuvium* A B *nivellare.*

Tab. IV. Fig. 78. Aſſumatur libella vulgo Waſſer-Wage C, hæcque in ripa A in pertica quadam conſtituatur horizontaliter; Sit autem libella illa dioptris ſuis inſtructa. Jam ad arbitrariam diſtantiam v. g. in D altera pertica perpendicularis conſtituatur, cui ſuperne in E affixum ſit album folium chartæ, & deorſum, & ſurſum mobile. Itaque ubi in libella C per dioptras verſus D proſpexeris, atque ſummitatem albi folii E deprehenderis, ſubſiſte; menſura altitudinem AC, uti & altitudinem DE, atque quo ſpatio altitudo DE altitudinem AC ſuperaverit, illud erit diſcrimen fluvii AB, verſus terræ centrum deſcendentis. Rurſus eadem ratione libellam ponendo in D collima in F, tum ſucceſſive in G. H. &c.

## SCHOLIUM I.

§. 142. UT *nivellatio*, qua licet, exactiſſime peragatur, juverit eandem repetere, & poſtquam aquæ deſcenſus ex A in B deprehenſus eſt, iterum NIVELLATIONEM aquæ ex B in A aſcendentis ordiri; Itaque, ex correſpondente aquæ tum aſcendentis, tum deſcendentis calculo, rite factam fuiſſe *nivellationem* innoteſcet. Neque vero neglectim aut obiter *nivellationes* exerceri debent, utpote quarum beneficio altitudines locorum innoteſcant; innoteſcat etiam: quænam aquæ, aut torrentes, aut ſcaturigines ad impellendas diverſorum opificiorum moles dirigi queant, quarum denique ſubſidio agri paludinoſi abactis aquis in fertile poſſint ſolum commutari. Quæ certo non mediocria Reipublicæ ſunt emolumenta.

SCHO-

## SCHOLIUM II.

§. 143. Linea horizontalis, quæ in *nivellatione* beneficio libellæ, & dioptrarum reperitur, non eſt mathematice horizontalis, cum terra ſphæricæ, aut ellipticæ ſit figuræ, a cujus ſuperficie linea recta eo magis abſcedit, in altum declinando, quo recta illa linea fuerit longior; Imo ſi talis horizontalis linea recta AB longiſſime continuaretur, v. g. ad diſtantiam 900 milliarium, atque ex B perpendicularis dimitteretur in C, illa perpendicularis BC ne quidem ſuperficiem terræ D contingeret, cum terræ ſemidiametrus ED ultra 900 milliaria non protendatur, quamvis ad minorem diſtantiam declinatio horizontalis lineæ inſenſibilis ſit. Igitur vera horizontalis linea eſt ACFG, quæ circa tellurem ducta, æqualem ſemper diſtantiam a centro ſervat, quæ certe ex infinitis rectis lineis conſtitui debet (§340). Ut vero Nivellatoribus definiamus, ad quamnam diſtantiam linea horizontalis ſenſibiliter declinet, accipe ſequentem tabulam. *Tab. IV. Fig. 79.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | digiti | perticæ | | digiti | |
| Ad diſtantiam perticarum | 197 | — | 1 | | | |
| | 280 | — | 2 | 835 | — | 18 |
| | 341 | — | 3 | 858½ | — | 19 |
| | 394 | — | 4 | 880 | — | 20 |
| | 440 | — | 5 | 901 | — | 21 |
| | 482 | — | 6 | 922 | — | 22 |
| | 521 | — | 7 | 943½ | — | 23 |
| | 557 | — | 8 | 964 | — | 24 |
| | 590 | — | 9 | 984 | — | 25 |
| | 621 | — | 10 | 1003 | — | 26 |
| | 652 | — | 11 | 1022 | — | 27 |
| | 681½ | — | 12 | 1041 | — | 28 |
| | 709 | — | 13 | 1059 | — | 29 |
| | 736 | — | 14 | 1077½ | — | 30 |
| | 762 | — | 15 | 1095 | — | 31 |
| | 787 | — | 16 | 1113 | — | 32 |
| | 811 | — | 17 | 1130 | — | 33. |

## SCHOLIUM III.

§. 144. NUnc causam reddere oportet: quarenam omnes delineationes, & mensuræ Geodæticæ etiam in locis montosis fieri debeant secundum planam territorii superficiem, non vero juxta superficiem montium? cum tamen spatium, quod ascendentium collium superficiebus concluditur, majus sit, quam spatium illud, quod plana montium complectitur basis; Quia nimirum majora corpora, quæ etiam sub terræ superficiem descendunt veluti arbores, & ædificia, non plura possunt in colle, quam in collis basi constitui. Quod quidem facile persuadebitur illi, qui attenderit, ejuscemodi corpora non se habere ut radios e superficie collis tanquam e suo centro undequaque prodeuntes, sed omnes arbores, omnia ædificia perpendiculariter versus terræ centrum propendere; Itaque si basis alicujus montis nequit plures quam 20 arbores aut domos in se recipere, neque plures poterunt in montis illius superficie collocari, eo quod omnes situm teneant versus terræ centrum perpendicularem: quamvis minora corpora, & quæ non semper perpendiculariter insistunt basi, veluti gramina, in majori copia possint per collis superficiem excrescere, quam in angustiori baseos spatio excrevissent.

Jam ad altimetriæ problemata procedamus.

## PROPOSITIO IX.

*Tab. IV. Fig. 80.* §. 145. *Altitudinem turris, cujus basim accedere liceat, metiri.*

Sit altitudo turris CA mensuranda; Itaque ex arbitrario loco D ope astrolabii, vel etiam mensulæ desume angulum BEA: tum adhibita catena mensura lineam DC parallelam ipsi EB; transfer longitudinem lineæ CB juxta scalam in chartam; ex B duc perpendicularem sursum in A (§. 24.) turris quippe supponitur esse perpendicularis solo; Ipsi puncto E adjunge inventum angulum BEA, & ad illius exigentiam duc pariter lineam versus A. Ex puncto A, in quod nem-

nempe B A, & E A concurrerunt, metire juxta ſcalam usque in B, & adjecta altitudine C B ſeu D E habebis petitam turris altitudinem.

## SCHOLIUM.

§. 146. QUoniam vertex turris A medium eſt turris M N, non ſat fuerit ex D in S duntaxat menſurare, ſed uſque in C; alias quippe S, & A non formarent lineam perpendicularem nec angulum rectum D C A.

§. 147. *ALio modo, ope ſpeculi, dictam altitudinem* C A *metiri.* Speculum horizontali ſitu repone in R, ut nempe recta conſiſtens apicem turris A in eo intuearis; Tum menſura ſpatium inter punctum R, & plantas L interpoſitum, item altitudinem ex L ad oculum K, denique etiam ſpatium R C. Porro has lineas C R, R L, itemque perpendicularem L K juxta ſcalam transfer in chartam. Ex K duc rectam in R; hæc recta dabit angulum reflexionis L R K: Quia vero angulus reflexionis eſt æqualis angulo incidentiæ (§. 64.) Ideo adhibito tranſportatorio fac angulum incidentiæ C R A, æqualem ipſi L R K. Ubi linea R A lineam rectam perpendicularem C A ſecuerit in puncto A, ibi punctum defige, ac metire juxta ſcalam lineam C A, habebisque deſideratam turris altitudinem. *Tab. IV. Fig. 81.*

## PROPOSITIO X.

§. 148. *MEtiri ædificii altitudinem* B A *ope bacilli infixi* D C. Bacillo C D perpendiculariter in terram defixo, eo ſitu te humi proſterne, ut ſupinus oculo E per verticem baculi C ſummitatem ædificii A conſpicere queas. Tum metire lineas E D, & D B, itemque perpendicularem D C, easque juxta ſcalam in charta deſcribe. Ex E per verticem C duc rectam E C A, ac ubi hæc recta perpendicularem B A ſecuerit in puncto A, ibi punctum infige. Menſurato deinde juxta ſcalam ſpatio B A, habebitur altitudo quæſita A B ædificii. *Tab. IV. Fig. 82.*

§. 149.

§. 14. NAm BA est quarta proportionalis (§. 40.) Nam sicut ED. DC : : EB. BA. Ideoque hoc problema etiam resolvi potest per regulam proportionis (§. 79. *Arith.*) dicendo v. g. spatium ED = 4 dat altitudinem DC = 3, quantam altitudinem dabit spatium EB = 12 ?

## PROPOSITIO XI.

Tab. V. Fig. 83. §. 150. *ALtitudinem arboris* AB *ex sola umbra solis invenire.*

Defige primum bacillum DE perpendiculariter in E, tum mensura BC, & EF, quæ duæ sunt longitudines umbræ sparsæ; mensura item longitudinem bacilli ED, hasque lineas, ad scalam exactas, transfer in chartam; deinde duc rectam DF, formabit hæc angulum EFD umbræ cadentis; quia autem angulus umbræ a bacillo protensæ æqualis est angulo umbræ ab arbore procedentis (§. 86.) igitur adhibito transportatorio ex puncto C forma angulum BCA = ipsi EFD. atque ex puncto A, in quo linea CA, & perpendicularis BA concurrunt, metire lineam AB juxta scalam, habebisque quæsitam arboris ex umbra altitudinem.

Nihil quoque hic aliud intercedit, quam proportio. Nam EF. ED : : CB. BA, sub eadem nimirum anguli extensione.

## PROPOSITIO XII.

Tab. V. Fig. 84. §. 151. *ALtitudinem ædificii inaccessi* BA, *cujus tamen pedem horizontaliter situm videre possis, metiri.*

Fige duos bacillos in C, & D; atque ex C primo ope astrolabii gradus anguli NMA designa; tum, & gradus anguli BCD. Mox translato astrolabio in D metire gradus anguli BDC. Mensura deinde ope catenæ lineam DC, eamque juxta scalam geometricam chartæ inscriptam ita ordina, ut ope transportatorii ex utroque angulo C, & D, juxta gradus invenventos, lineæ extendantur in B: ſecabunt hæ ſe invicem in B, atque linea B C per ſcalam menſurata exhibebit diſtantiam C B (§. 125.) Habita hac diſtantia C B, duc perpendicularem ex B in A, ex M vero juxta exigentiam anguli inventi N M A duc rectam in A; ſecabunt ſe hæ lineæ rectæ in A, & A B per ſcalam menſurata (adjecta nimirum altitudine ſtantis aſtrolabii C M (§. 145.) dabit ædificii B A altitudinem.

## PROPOSITIO XIII.

§. 152. *Altitudinem turris* M A *invenire, cujus perpendicularem lineam in horizontalem deſcendere, ob jugorum obſtacula, ne videre quidem poſſis.* *Tab. V. Fig. 85.*

Pone primum in G aſtrolabium E, & metire angulum horizontalem D E A, tum in propiore ad turrim diſtantia F pone aſtrolabium, & deſume denuo horizontalem angulum D C A. Porro metire diſtantiam G F, eamque juxta ſcalam menſuratam in charta depone, ut E C. Puncto E adjunge ope tranſportatorii inventum angulum D E A; puncto autem C angulum D C A; lineas C A, & E A eousque continua, donec in A concurrant. Ex A demitte perpendicularem A D in horizontalem D C. Menſura itaque lineam perpendicularem A D, & adjuncta aſtrolabii altitudine G E vel M D habebis integram altitudinem M A turris inacceſſæ.

## PROPOSITIO XIV.

§. 153. *Ex feneſtra* A *ædificii aut turris altitudinem* D B *invenire, cujus tam pes, quam ſummitas aſpectui ſit expoſita.* *Tab. V. Fig. 86.*

Ex feneſtra A ope aſtrolabii deſume angulum C A B. Mox inverſo aſtrolabio deſume angulum D A C, deinde funiculo ex feneſtra dimiſſo menſura profunditatem A E. Hanc lineam A E juxta ſcalam delineabis in charta, eique tanquam perpendiculari alteram lineam horizontalem E D ſubſternes. Jam ex puncto A describe angulum inventum DAC ope transportatorii; ex altera superiori parte describe alterum inventum angulum CAB. Quia AC parallela ipsi ED *per hypothesim*, & AE parallela ipsi CD, igitur AD erit diagonalis. Igitur ex puncto D, ubi nempe AD secat horizontalem ED, erige perpendicularem DB, quæ lineam AB in puncto B secet: Quod si itaque lineam DB per scalam mensuraveris, habebis quæsitam arboris DB altitudinem.

## COROLLARIUM.

§. 154. Consimili ratione deprehendere licet latitudinem platearum ex fenestra. Sit v. g. latitudo plateæ ED. Igitur habito angulo EAD, & angulo recto AED cum longitudine lineæ AE, habebitur etiam longitudo lineæ ED (§. 124.) id est latitudo plateæ ED.

Tandem juvabit nonnihil de Bathymetria seu profunditatum dimensione afferre.

## PROPOSITIO XV.

Tab. V. Fig. 87. §. 155. *Profunditatem putei AB, aqua carentis, invenire.* Metire primum putei diametrum CD; tum astrolabio in D constituto, quære gradus anguli EDB. Longitudinem lineæ CD juxta scalam in charta delinea, atque ex utroque puncto C, & D demitte perpendicularem CB, & DE; Ex D porro demitte angulum EDB prius inventum; Quod si a puncto B, in quo linea DB perpendicularem BA scindit, juxta scalam mensuraveris lineam BC, habebis desideratam putei profunditatem.

## SCHOLIUM.

§. 156. *Geometria* quoque *subterranea*, quæ est ars metiendi fodinas, Germanice Mark-Scheid-Kunst, huc pertinet;

tinet; cujus præcipua instrumenta, & methodum vel a limine necessum est salutare; Instrumenta igitur, quibus in praxi Geometriæ subterraneæ passim utimur, præcipue sunt sequentia: Compassus, libella, & goniodictes.

§. 157. *Compassus*, seu acus magnetica, passim est pensilis, cujus capsula ultra duos, & medium, vel tres digitos in diametro non complectitur; quamvis & non raro compassum horizontaliter jacentem operationibus adhibeant. Circulo hujus compassi inscriptæ sunt 24 horæ, horæ autem singulæ rursus in 8 partes dividuntur; ita ut quadrans 48, semicirculus 96, & totus circulus 192 partes comprehendat. Quod autem fossores, rejecta usitatissima circuli in 360 partes divisione, hanc assumpserint, causa eos induxisse videtur, quod in angustæ circuli 3 digitorum peripheria distinctius 192 partes, quam 360 ad lumen præcipue lampadum in cryptis subterraneis dispici queant. Cum hoc compasso, ex uncis C D suspenso solent plagas mundi infra terram explorare; nisi forte fodina ferri acus magneticæ directionem interturbet; tunc quippe fossores adhibent alium circulum horarium, cujus descriptionem vide apud *Voigtelium*, & *Weidlerum*. *Tab. V. Fig. 88.*

§. 158. *Libella* fossorum est semicirculus, ex tenui lamella paratus, cujus uterque quadrans, usitato more in 90 gradus dispescitur, pondus ex centro S appensum habet: atque hoc instrumento, in uncis A, & B appenso, exploratur linea horizontalis a fossoribus, aut obliquitas ad horizontem pro ratione cryptarum aut ascendentium, aut cadentium. *Tab. V. Fig. 89.*

§. 159. *Goniodictes* est regula lignea, unius circiter pedis, dioptris instructa, quæ imposita bacillo, & vel acu magnetica, vel libella instructa, inclinationes ad horizontem, aut directionem ad mundi plagas definit. Itaque Ichnographiam ferri fodinarum paraturus, profunditatem, & abscessum cryptæ ab ingressu funiculo metiatur, variam procedentis cryptæ inclinationem horizontalem exploret libella, variam denique declinationem ad plagas mundi compassus exhibebit. Habita jam ejuscemodi fodinarum dimensione, licebit in externa superficie loca cryptæ, sub terra procedentis determinare, ut nempe juxta ichnographiam directionum anguli ope instrumenti goniodictici determinentur, una cum lineis horizontalibus, quemadmodum intra cryptam subterraneam sunt inventæ. Plura qui de Geometria subterranea, arte pulchra, & principum æraria suffulciente, scire desiderat, adeat *Augustum Beyer*, & *Voigtelium*, qui eam solide juxta ac copiose pertractarunt.

§. 160. QUamvis vero non omnia allegatorum Problematum veluti (§. 148, & 153.) sic comparata sint, ut mathematicum rigorem sustineant; malui ea tamen in exercitio Gæodætico exhibere; quod, & ejuscemodi propositiones in tyronum mentibus excitent quasdam proportiones ac combinationes, non omnino inutiles, quæ certo præcipuus mathematicarum disciplinarum sunt scopus.

# CAPUT VI.

## De Superficie, Quadrangulo, aliisque Polygonis.

### DEFINITIONES.

§. 161. *SUperficies* (§. 6.) definita, alia est *recta*, cujus terminos jungunt lineæ rectæ, in longum, & latum protensæ; Alia est *curva*, quam lineæ curvæ, seu tortuosæ constituunt. Alia *convexa* A quæ est exterior a centro respectus; alia *concava* B quæ est respectus ad centrum interior; atque pro diversa superficierum dispositione variæ enascuntur figuræ.

*Tab. V. Fig. 90.*

*Tab. V. Fig. 91.* §. 162. *QUadratum* est superficies plana, quæ angulos quatuor rectos habet, & totidem æqualia latera.

§. 163.

§. 163. QUadratum oblongum, vel rectangulum est, quod habet quidem omnes angulos rectos, latera autem solummodo duo æqualia; ea nempe, quæ sibi opponuntur. Atque in hoc distinguitur a quadrato. Tab. V. Fig. 92.

§. 164. RHombus est superficies quadrata habens omnia latera æqualia, & angulos oppositos etiam æquales, non tamen rectos; sed duos eorum rectos, duos obtusos. Tab. V. Fig. 93.

§. 165. RHomboides habet latera opposita duntaxat æqualia; uti & oppositos angulos æquales, non quidem rectos; sed duos acutos, duos item obtusos. Quatuor hæ enumeratæ figuræ quadrilateræ *parallelogramma* dici consueverunt, & speciatim *rectangulum*. Tab. V. Fig. 94.

§. 166. TRapezium est superficies quadrilatera, cujus nec anguli æquales sunt, neque latera æqualia. Quod si duo latera æqualia habeat, & cætera inæqualia, vocatur *Trapezoides*. Tab. V. Fig. 95.

§. 167. PEntagonum est superficies quinque habens latera totidemque angulos: *Hexagonum* horum sex numerat. *Heptagonum* septem. *Octogonum* octo &c. Hæc vero omnia alia rursus *regularia* sunt, alia *irregularia*.

## PROPOSITIO I.

§. 168. *QUæcunque figura quadrilatera* ABCD *valet quatuor angulos rectos.* Tab. V. Fig. 95.

Nam omne quadrilaterum valet duo triangula; per diagonalem quippe CB dividitur quadrilaterum ABCD in duo triangula ACB, & CDB (§. 169.) Atqui omne triangulum æquale est duobus angulis rectis (§. 77.) ergo & quadrilaterum ABCD æquale est quatuor rectis Q. E. D.

## PROPOSITIO II.

Tab. V. Fig. 96. §. 169. *Omne parallelogrammum* CABD *per lineam diagonalem* CB *in duo triangula prorsus æqualia* ABC, *&* DCB *dividitur.*

Linea diagonalis CB in duas parallelas AB, & CD incidens facit angulos ABC, & DCB æquales (§. 66.) & quoniam etiam AC, & BD sunt parallelæ, erit quoque angulus ACB=CBD (§. 66.) Porro anguli CAB, & CDB sunt anguli recti, & linea diagonalis CB est communis utrique triangulo; Igitur triangulum ABC=DCB (§. 89.) Q. E. D.

## COROLLARIUM.

§. 170. Similiter de diagonali Rhombi, & Rhomboidis est ratiocinandum.

## PROPOSITIO III.

Tab. V. Fig. 97. §. 171. *Si in linea diagonali* CB *parallelogrammi* ABDC *punctum* E *deligatur, atque per* E *parallelæ ducantur* FG, *&* HI; *erunt parallelogramma* FEIC, HBGE, ABCD *inter se similia.*

Propter parallelas AC, HE, & CD, EG, sic se habet AB ad HB, & DB ad GB, uti CB ad EB: ergo etiam AB ad HB, & FG ad EG sicut DB ad BG, & IH ad EH. Sicque de aliis lateribus discurrendum. Adeoque parallelogrammum ABDC erit simile parallelogrammo FEIC, & HBGE. Q. E. D.

## COROLLARIUM I.

Tab. V. Fig. 96. §. 172. Si a parallelogrammo ABDC parallelogrammum MONC ablatum sit, & similiter positum communem cum eo habens angulum C, hoc MONC circa eandem cum toto ABDC diametrum consistit. *Eucl.* VI. 26.

CO-

## COROLLARIUM II.

§. 173. EX quo discimus motuum compositionem æstimare. Sit corpus positum in C, hoc impellatur directione CA, vi se habente ut CA; altero vero impetu moveatur simul directione CD, vi se habente ut CD; hoc corpus ob impulsuum inæqualitatem eo temporis intervallo, quo aream CA percurreret, percurret CD; quia vero ambæ impetuum directiones conservantur, eodem tempore, quo describeret uno impetu spatium CD, aut CA, ex virium conjunctione describet spatium CB, ut post datum tempus emensum nec in A sit, nec in D, sed per diagonalem in B. De quo in *Physica*. *Fig. ead.*

## PROPOSITIO IV.

§. 174. *SI quatuor rectæ* AB, CD, DF, BH *fuerint proportionales, id est: si* AB *se habeat ad* CD; *sicut* DF *ad* BH, *rectangulum* M *ex linearum harum extremis nempe* AB, *&* BH *conflatum erit æquale rectangulo* N, *ex lineis mediis* CD, *&* DF *composito.* *Tab. V. Fig. 98.*

Tanto quippe BH est minor ipso DF in rectangulis M, & N; quanto AB est major ipso CD; Igitur rectangula M, & N æqualia sunt.

## SCHOLIUM I.

§. 175. IN hoc theoremate fundatur regula arithmetica proportionis, seu trium v. g. 2. 5 : : 4. 10. 2 $\times$ 10 $=$ 20; & rursus 5 $\times$ 4 $=$ 20.

## SCHOLIUM II.

§. 176. IN tribus lineis continuo Geometrice proportionalibus, cum media harum trium linearum se habeat ad duas extremas, sicut in quatuor proportionalibus duæ mediæ; sequetur, quod quadratum, ex media inter tres

pro-

proportionales factum, æquale sit rectangulo facto ex prima, & tertia proportionali.

## SCHOLIUM III.

Tab. V. Fig. 99. §. 177. Lignarii, vitriarii aliique artifices areas rectangulas minores facili hac praxi metiuntur. Scire necessum sit: quot pedes quadratos areæ vitreæ X, & Z contineant? applicant mensuram pedis unius B E lateri B C; ab angulo A tendunt filum, aut regulam, usque ad summitatem pedis B E, & ultra; quæ regula occurrens lateri D C in F, ostendit rectangula X & Z tot pedes quadratos, vel pedis partes continere, quot pedes quadratos, vel pedis partes continet recta D F; nam propter angulos rectos D & B; item propter angulos B A E, D F A alternos inter parallelas A B, D F, nec non propter angulos B E A, D A F alternos inter parallelas B E, A D, erunt similia triangula E B A, A D F, & recta E B habebit eandem proportionem ad B A, quam habet recta A D ad D F. Igitur rectangulum X, & Z ex lineis A B, & A D compositum erit æquale rectangulo composito ex lineis E B, D F, & utrumque triangulum X & Z tot continebit pedes cubicos, quot-pedes linea D F in longitudine continet; nam linea E B, quæ interim supponitur esse pes cubicus, multiplicata per lineam D F exhibet pedes cubicos rectanguli E B, Tab. V. Fig. 100. D F, quod æquale est rectangulo A B, A D *juxta theorema* (§. 174.) Imo si area sit A B C D, cujus utrumque latus majus sit pede E B, scire tamen cupias: quot pedes quadratos tota area contineat; applica pedem E B ad latus B, & duc rectam ex angulo A, vel ex angulo C; hæc recta ubi concurrerit cum producta D C, vel D A in F, dabit quartam proportionalem D F, ad construendum rectangulum E B × D F, quod æquivalet rectangulo A B × B C: ita ut quanto majus est latus E B ipso latere A B: tanto majus sit latus D F ipso latere A D.

PRO-

## PROPOSITIO V.

§. 178. *SI ex puncto quodam, v. g. ex E lineæ diagonalis CB ducantur duæ lineæ FG, & HI, lateribus parallelogrammi AB, BD parallelæ, tunc duo parallelogramma, quæ non secantur a diagonali nempe AHFE, & EGDI sunt æqualia.* Tab. V. Fig. 97.

Nam triangulum BAC = BDC. Item BHE = BGE. Itemque EFC = EIC (§. 169). Diagonalis quippe omne parallelogrammum in duo triangula æqualia dividit; ergo quia parallelogramma AHEF, EGDI cum æqualibus adjunctis magnitudinibus æqualem magnitudinem, nempe triangula BAC, BDC constituunt, erunt hæc duo parallelogramma AHEF, & EGDI inter se æqualia. Q. E D.

## PROPOSITIO VI.

§. 179. *DIagonalis AD incommensurabilis est lateri quadrati ACDB.* Tab. V. Fig. 101.
Nam sic se habet pars aliquota cujusdam lineæ ad ipsam lineam, sicut se habet unitas ad numerum v. g. 1 ad 6. Et rursum sic se habet quadratum lineæ ad ipsam lineam, sicut se habet numerus quadratus v. g. 36. ad suam radicem v. g. 6. (§. 140 *Arithm.*) Et ideo cognoscimus, hunc numerum v. g. 36. esse quadratum lineæ, quia illius lineæ partes sunt 6; sequentes autem numeros 37, 38, 39, 40, 41 &c. numeros quadratos esse non posse, quia radix nulla datur his correspondens. 49 denique rursus esse numerum quadratum cujusdam lineæ, quia illius lineæ supponuntur esse 7 partes aliquotæ perfectæ; ideoque quia 36 & 49 numeri quadrati sunt linearum, habebunt se lineæ illæ, seu radices ad invicem, ut 6 & 7. Jam dicamus diagonalem esse hypothenusam, & alterum quidem quadrati latus AB esse basim, alterum BD esse cathetum. Certum est per (§. 96 & 99.) *quadratum hypothenusæ esse æquale duobus quadratis catheti, & baseos*; ideoque cum in quadrato ACDB sit AB = BD, erit quadratum AD duplum AB, vel BD. Porro si quadratum AB,

vel B D duplicatum adæquat quadratum A D, partes A B, vel B D nunquam poterunt conciliari cum partibus A D; quia nempe nullus exſtat numerus quadratus, qui eſſet dimidium alterius numeri quadrati. Et quamvis verum ſit, ex A B, vel B D quadratum fieri poſſe, poſſe etiam fieri quadratum ex A D; quia tamen hoc quadratum A D habet talem numerum, ut reſpectu hujus non poſſit eſſe numerus quadratus quadrati A B, vel B D; partes A B, vel B D cum partibus A D erunt omnino incommenſurabiles; ſi igitur latus A B, vel B D non poteſt eſſe quadratum reſpectu diagonalis A D, neque poterit linea hæc A B, vel B D partibus aliquotis, ſeu radice perfecta exprimi; atque ſic latera quadrati erunt incommenſurabilia cum diagonali. Q. E. D.

§. 180. HOc theorema innititur Propoſitioni 47 libri I. *Euclidis*, allatæ (§. 96 & 99).

## PROPOSITIO VII.

Tab. V. Fig. 102. §. 181. *PArallelogramma, ſuper eadem baſi, atque in iisdem rectis parallelis conſtituta, ſunt æqualia, ut* ABDC = CEFD.

Nam AB = CD, & EF = CD; & etiam AE = BF; atqui etiam AC = BD, & EC = FD; igitur etiam triangulum AEC = BFD (§. 89). Jam vero dematur ab utroque triangulo triangulum commune BOE, remanebunt duo trapezia æqualia ABOC, & DOEF. Quorum ſingulis ſi addatur commune triangulum COD, prodibunt duo parallelogramma æqualia, nempe ABDC, & CEFD. Q. E. D.

## PROPOSITIO VIII.

Fig. ead. §. 182. *PArallelogramma æqualia ſunt duobus triangulis ejusdem baſeos, ejusdemque altitudinis.*

Nam parallelogramma ABCD, CBFD, uti & triangulum CFD cum inter meras parallelas contineantur AF, & CS:

CS : item AC, & FS, habent eandem basim CD, & eandem altitudinem AC = FS; atqui diagonalis dividit parallelogramma in duo triangula æqualia (§. 169). Igitur parallelogramma CEFD. & CABD æqualia sunt duobus triangulis CFD; quoniam CABD = CEFD (§. 181).

## COROLLARIUM I.

§. 183. SI igitur pratum aliquod, figuram habens parallelogrammi CABD in duas sit partes æquales dividendum, ducatur diagonalis CB. Si habeat figuram trianguli CAB, ex medietate X baseos ducatur recta in A, eritque in duas partes æquales divisum; Denique basis trianguli, aut parallelogrammi in tot partes dividatur, manente eadem altitudine, in quot æquales partes ea dividere animus fuerit. *Fig. ead.*

## COROLLARIUM II.

§. 184. OB eandem rationem ABC + CDE + EFG sunt æqualia triangulo AHG; quia nempe triangula ABC + CDE + EFG æqualia sunt medio parallelogrammo ABHG (§. 183.) atqui AHG est medium parallelogrammi ABHG (§. 169). Igitur ABC + CDE + EFG = AHG. Q. E. D. *Tab. V. Fig. 103,*

## PROPOSITIO IX.

§. 185. *PArallelogramma similia, quorum nempe latera* AB. EF : : BD. FH. *habent se in duplicata ratione baseos, & altitudinis.* *Tab. V. Fig. 104.*

Nam cum duæ quidem rationes hic reperiantur, nempe altitudinis BA ad altitudinem FE, & baseos BD ad basim FH, componuntur tamen hæ duæ rationes in unam compositam, multiplicando terminos antecedentes inter se, nempe BA, & FE, uti etiam BD, & FH (§. 32 *Arithm.*) atqui duæ rationes BA. FE : : BD. FH hic supponuntur esse æquales;

 igi-

igitur ratio composita ex his est duplicata rationis unius, aut alterius rationum componentium. Et hæc ratio duplicata laterum proportionalium reddit eadem latera quadrata, id est, secundum altitudinem, & basim proportionaliter multiplicata. Sit enim altitudo FE dupla altitudinis BA, & latus baseos FH duplum lateris BD; habebit se AB. EF : : 1. 2. & pariter BD. FH : : 1. 2. Jam multiplicetur duplicata hæc ratio, nempe antecedentes ducantur in antecedentes, & consequentes in consequentes $1 \times 1$. & $2 \times 2$. Ex antecedentibus remanebit 1. ex consequentibus autem 4. ut duplicata ratio se habeat necessario ut 1 ad 4. ergo parallelogramma similia habent se in duplicata ratione baseos, & altitudinis.

## COROLLARIUM.

§. 186. HAc eadem ratione triangula omnia, omnes regulares figuræ circulo inscriptæ, circuli etiam ipsi, inter se sunt in duplicata ratione baseos, & altitudinis, aut suorum radiorum, ut examinanti patet.

## PROPOSITIO X.

Tab. V. Fig. 105. §. 187. *Figura quæcunque quadrilatera, circulo inscripta,* ECDF. *habet angulos oppositos* CEF, *&* CDF *æquales duobus rectis.*

Nam duo anguli CEF, & CDF ad circumferentiam vergentes, cum super tota circuli peripheria fundentur, mensurantur medio circulo (§. 246); sed semicirculus est æqualis duobus rectis (§. 234); ergo etiam duo anguli CEF, & CDF æquales sunt duobus rectis. Q. E. D.

§. 188. EAdem ratione prorsus discurrendum est de aliis duobus angulis ECD, & EFD.

## PROPOSITIO XI.

Tab. V. Fig. 106. §. 189. *Triangula* DCG, HEF, *&* IBA, *quæ inter quadrata, super trianguli lateribus adscripta, formantur, sunt æqualia ipsi triangulo* BEC, *& etiam æqualia inter se.*

Pri-

Primo quidem, quod triangulum DCG, & CBE attinet: latera DC, & CG ſunt æqualia lateribus CB, & CE; Circulus autem circa centrum C æquivalet quatuor angulis rectis, quorum duo ſunt BCD, & ECG; igitur reliqui duo anguli nempe DCG, & BCE, intra duo æqualia latera comprehenſi, etiam æquivalebunt duobus angulis rectis, & angulus acutus BCE erit complementum anguli obtuſi DCG pro conſtituendo ſemicirculo, ſeu duobus angulis rectis. Igitur cum duo triangula, quorum ſingula habeant duo latera æqualia, & angulus intra duo æqualia latera unius trianguli interceptus ſit complementum alterius anguli intra æqualia duo latera intercepti; cum, inquam, duo ejuscemodi triangula æqualia ſint (§. 192), erit etiam angulus DCG = ipſi BCE. Q. E. D.

## SCHOLION I.

§. 190. EAdem ſemita tenetur in demonſtrando: angulos quoque HEF, ABI, eſſe æquales angulo BCE; Quod ſi autem ſingula tria triangula DCG, HEF, ABI æqualia ſint angulo BCE, erunt etiam neceſſario æqualia inter ſe *per axioma IV*. §. 2.

## SCHOLION II.

§. 191, EAdem quoque in theoria fundatur illud theorema, quo demonſtratur: quatuor triangula BDK, IEH, GFL, MAC, quæ inter quadrata, ſuper Trapezii CFED lateribus deſcripta conſtituuntur, eſſe æqualia Trapezio CFED duplicato; Etenim IEH = DFE, & ACM = CDF (§. 189). Igitur triangulum IEH + ACM = ipſi trapezio CDEF: atqui eandem ob cauſam triangulum LFG = triangulo CEF, & triangulum BDK = triangulo CED; ergo BDK + IEH + GFL + MAC = CFED duplicato. *Tab. V. Fig. 107.*

## SCHOLION III.

Tab. V. Fig. 108. §. 192. QUod autem (§. 189.) dictum est: duo triangula v.g. ABC, & BCD, quorum singula habent duo latera æqualia AB seu BD, & BC; angulus autem CBD inter hæc duo æqualia latera in uno triangulo interceptus, est complementum alterius anguli ABC, inter æqualia illa duo latera intercepti; hoc certo ex illa theoria deducitur, quæ (§. 90, & 91.) allata est; quod nempe triangula sint æqualia, quæ super eadem basi intra duas parallelas constituuntur.

## PROPOSITIO XII.

Tab. V. Fig. 109. §. 193. *SI latus* AB *quadrati* ABCD *duplicetur, ut sit* AK, *tunc ex duplicato latere* AK *constructum quadratum* AKGE *non erit duplum prioris quadrati* ABCD, *sed quadruplum.*

Fiat diagonalis EK; hæc diagonalis duo parallelogramma secat nempe BCHK, & DCFE, duo autem non secat, nempe ABCD, & CHGF; sed DCFE = ABCD, propter æqualia latera, ut est *hypothesis*; Iterum BKHC = ABCD, habent quippe latus BC commune. Denique CHGF = ABCD *per theorema* (§. 178.) ergo AKHE = ABCD quadruplo.

## SCHOLION.

§. 194. HInc quoque demonstratur, quod, si ex linea unius pedis quadratum fiat, & ex divisa hac linea in duas partes æquales, nempe in semipedes, etiam duo quadrata fiant; quadratum ex linea tota erit duplum quadrati ex duabus semilineis constructi.

## PROPOSITIO XIII.

Tab. V. Fig. 110. §. 195. *OMnes anguli simul sumpti in quocunque polygono totidem angulos*

*los rectos duplicatos continent, quot habent latera; minus tamen quatuor angulis rectis.*

Polygonum ACEDB reduci poteſt ad mera triangula (§. 131.) nempe AOC, COE, EOD &c. quorum triangulorum ſingula æqualia ſunt duobus angulis rectis (§. 77.) igitur hæc 5 triangula æqualia ſunt decem angulis rectis: atqui polygonum ACE DB exprimit omnes angulos horum quinque triangulorum, exceptis angulis circa centrum O conſtitutis; hi vero anguli, circa centrum O conſtituti, æquales ſunt quatuor angulis rectis (§. 234.) ergo hujus polygoni omnes anguli ſimul ſumpti juxta laterum multitudinem æquales ſunt 10 angulis rectis, demptis quatuor, id eſt: æquales ſunt 6 angulis rectis. Q.E.D.

## SCHOLION.

§. 196. PRaxis facillima inveniendi valorem angulorum in polygonis quibusque eſt iſta: denominator figuræ, qui v.g. in heptagono eſt 7, duplicatur, prodibunt 14. Ex his 14 detrahantur 4, reſtabunt 10 anguli recti, quos anguli interni alicujus heptagoni conficiunt; ut proportio anguli recti ſit ad angulum heptagoni ut 7 ad 10.

Igitur ſi in polygono ſex laterum SROXQP ex angulo ad angulum recta ducatur linea, tot triangula polygonum illud referet, quot habet latera minus duobus; id eſt: polygonum hoc 6 latera habet, & 4 triangula complectitur; quodvis triangulum æquivalet duobus angulis rectis: igitur, & hexagonum SROXQP. æquivalet 8 angulis rectis. Atque exinde patet, quod omnes quæque figuræ rectilineæ ejusdem ſpeciei æquales habeant ſummas angulorum. *Tab. VI. Fig. 111.*

Itaque inibis computum graduum, quem anguli figurarum regularium continent, nempe

An-

| | | Grad. |
|---|---|---|
| Angulus | Trianguli æquilateri - - - - - - - - | 60 |
| | Quadrati - - - - - - - - - - - - - | 90 |
| | Pentagoni - - - - - - - - - - - | 108 |
| | Hexagoni - - - - - - - - - - - | 120 |
| | Heptagoni - - - - - - - - - - - | $128\frac{4}{7}$ |
| | Octogoni - - - - - - - - - - - - | 135 |
| | Enneagoni - - - - - - - - - - - | 140 |
| | Decagoni - - - - - - - - - - - - | 144 |
| | Hendecagoni - - - - - - - - - - - | $147\frac{3}{11}$ |
| | Dodecagoni - - - - - - - - - - - | 150 |
| | Icoſagoni - - - - - - - - - - - - | 162 &c. |

Nam Icoſagonum ſeu figura regularis 20 laterum $=$ 40 angulis rectis $-$ 4 id eſt 36. Dividantur 36 per 20, quotus erit $1\frac{16}{20}$ ſeu $1\frac{4}{5}$ anguli recti, id eſt 162 gradus &c. Hac ratione licebit figuram quamvis regularem delineare: ſuper dato latere conſtituantur gradus certi illius polygoni regularis ope tranſportatorii, eademque ſemper lateris magnitudo ope circini manualis interponatur angulis. Sed de his plura §. 277. & ſeqq.

Præmiſſis hiſce theorematibus, quibus quadrangulorum, polygonorumque natura atque proprietates illuſtrantur, jam ad ſelectiora quædam problemata procedamus.

## PROPOSITIO XIV.

*Tab. V. Fig. 91.* §. 197. S*uper data recta* AB *quadratum conſtruere.* Sit AB, linea data, ex B erigatur perpendicularis in C (§. 24.) quæ tam longa ſit ac AB: eadem circini apertura ſervata ex C duc arcum in D, atque ex puncto A pariter duc arcum in D; ſi ex puncto D, in quo ſe arcus ſecuerint, lineas duxeris in A, & C, erit quadratum ADCB conſtructum.

CO-

## COROLLARIUM I.

§. 198. EAdem prope ratione fit parallelogrammum; Nisi, quod super data recta AB minor erigatur linea BC; ex C vero, intervallo AB, arcus fiat in D, atque ex A, intervallo BC, arcus in D. Quod deinde punctum D cum A & C lineis copulatur. *Tab. V. Fig. 92.*

## COROLLARIUM II.

§. 199. SI jam circulus quadrato inscribi intelligatur, cujus circuli diametrus, per centrum ducta, tangat duo latera quadrati in medio; hæc ipsa diametrus, in quadratum reducta, seu in longum, & latum ducta constituet æquale quadratum illi, cui circulus inscriptus fuerat.

## PROPOSITIO XV.

§. 200. *SUper data recta* AB *Rhombum construere.*

Ex B ducatur linea ad arbitrium in C, æqualis ipsi lineæ AB; tum eodem intervallo servato ducantur arcus ex C in D, & ex A in D. In loco sectionis erit quartus angulus Rhombi. *Tab. V. Fig. 93.*

## COROLLARIUM.

§. 201. RHomboides eadem prope ratione describitur, nisi quod intervallo AB ex C ducatur arcus in D, ex A autem intervallo BC ducatur arcus in D.

## PROPOSITIO XVI.

§. 202. *SUper latere dato* AB *polygonum regulare, veluti pentagonum* ACEDB *describere.* *Tab. VI. Fig. 112.*

Pro resolutione hujus problematis primo notum esse debet centrum pentagoni O (§. 205.) tum angulus centri O, qui

qui lateri AB opponitur. Cum igitur circulus 360 gradus contineat (§. 235.) gradus hi juxta numerum angulorum dividuntur, id est per 5. quotus erit 72. Itaque super latere AB constituatur versus centrum angulus AOB = 72 graduum. Rursus triangulum AOB = duobus rectis angulis (§. 77.) Igitur demptis 72 gradibus a 180 gradibus seu duobus rectis, remanebunt 108 gradus pro reliquis duobus angulis OBA, & OAB; atqui duo anguli OBA, & OAB sunt æquales (§. 93.) Igitur quilibet eorum 54 gradus continebit. Jam e puncto B duc lineam in D æqualem ipsi AB, quæ angulum OBD = 54 grad. intercipiat. Ex O ducatur recta in D, atque ex D rursus ducatur linea in E, quæ angulum 54 graduum, nempe ODE subtendat. Post formata quinque ejuscemodi æqualia pentagonum super lineam AB descriptum esse deprehendes.

## SCHOLION I.

§. 203. SI super dato latere hexagonum vel heptagonum, vel octogonum vel enneagonum aut dodecagonum describendum sit, dividantur 360 gradus vel per 6, 7, 8, 9, 12 &c. quot nempe latera illius sunt polygoni; Tum angulus ad centrum tot gradus contineat, quot numerus *quotus*, per divisionem elicitus. Subtrahatur quotus a 180 gradibus, & residuum in duas æquales partes, pro aliis duobus angulis dividatur, productisque circa centrum æqualibus lateribus fiat operatio conformis (§. 202.)

## SCHOLION II.

§. 204. OPe circini proportionalis polygonum quodcunque expedite formatur: sit v. g. formandum octogonum; itaque apprehenso manuali circino, pone ejusdem unum pedem in linea polygonali circini proportionalis numero octavo, ac tantum aperi vel constringe dictum proportionalem circinum, donec altero pede manualis circini numerum octavum in polygonali linea alterius cruris contingas;

tum

tum ex proportionali circino ſic coordinato deſume per manualem circinum diſtantiam numeri 6 in lineis polygonalibus, atque juxta hanc diſtantiam ceu radium formetur circulus. In hoc circulo latus octogoni, ex diſtantia numerorum 8 in linea polygonali deſumptum, octies deſcribitur, habeturque octogonum.

## SCHOLION III.

§. 205. Centrum autem alicujus dati polygoni ſic invenitur. Primo ex centris A & B beneficio arcuum F & G quæratur perpendicularis ipſi AB (§. 27.) tum etiam ex B & D per arcus H & I quæratur altera perpendicularis ipſi BD. Continuentur hæ duæ perpendiculares, & punctum O, in quo ſe continuatæ perpendiculares ſecabunt, erit centrum polygoni. Hoc centrum polygoni neceſſum eſt ſemper reperire, quotieſcunque dato polygono conſimile polygonum formari debet, quod ex ſequenti theoremate elucet. *Tab. VI. Fig. 113.*

## PROPOSITIO XVII.

§. 206. *Circuitus duorum polygonorum regularium ſimilium habet ſe ut radius ad radium.* *Tab. VI. Fig. ead.*

Sint duo polygona regularia ſimilia ABDEC, FGHIK tanto major erit circuitus polygoni ABDEC, quam FGHIK, quanto major erit radius OB radio DG. Nam ſic ſe habet polygonum ABDEC ad latus AB, ſicut ſe habet FGHIK ad latus FG, cum ex *hypotheſi* ſimilia polygona ſint; Et ſic ſe habet AB ad OB, ſicut ſe habet FG ad DG, quia etiam triangula ſunt ſimilia: Igitur etiam ſe habebit polygonum ABDEC ad FGHIK ſicut radius OB ad radium DG. Q. E. D.

## PROPOSITIO XVIII.

§. 207. *Figuram regularem quamcunque ſuper data recta deſcribere.* *Tab. VI.*
Velis ſuper data recta AB figuram ordinatam v. g. *Fig. 114.*

 hepta-

heptagonum describere: circini pede altero in B posito, forma circulum AMN radio AB. Ab hoc circulo abscinde quadrantem ABM; hunc rursus quadrantem divide in 7 partes æquales, & post quadrantem ab M in N adjice 3 partes æquales prioribus 7. Tum denique ex centro S per puncta ABN circulum describe ABNK (§. 232.) & recta AB erit latus heptagoni, circulo ABNK inscribendi.

## SCHOLION.

§. 208. Ratio, quod post M adhuc 3 partes usque in N adjicere oporteat, est hæc: quia nempe angulus rectus ABM habet se ad angulum heptagoni ABN ut 7 ad 10. differentia vero inter 7 & 10 sunt 3. Igitur hæ tres partes pro angulo heptagoni constituendo adjiciendæ sunt.

§. 209. Consimili modo figuræ aliæ quælibet ordinatæ super recta describi poterunt; antequam vero hoc fiat, necessum est proportionem anguli recti scire ad angulos aliarum figurarum; itemque differentias angulorum aliorum ab angulo recto, quæ quidem omnia sequentibus exprimuntur.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Angulus rectus est | Ad angulum pentagoni ut | 5 ad | 6 | diff. 1. |
| | Ad angulum hexagoni ut | 3 ad | 4 | diff. 1. |
| | Ad angulum heptagoni ut | 7 ad | 10 | diff. 3. |
| | Ad angulum octogoni ut | 2 ad | 3 | diff. 1. |
| | Ad angulum enneagoni ut | 9 ad | 14 | diff. 5. |
| | Ad angulum decagoni ut | 5 ad | 8 | diff. 3. |
| | Ad angul. hendecagoni ut | 11 ad | 18 | diff. 7. |
| | Ad angulum dodecagoni ut | 3 ad | 5 | diff. 2. |

## PROPOSITIO XIX.

Tab. VI. Fig. 115. §. 210 *Juxta datum polygonum irregulare* AEDCB *aliud consimile, & æquale* FGHIK *describere.*

Pri-

Primum deſcribatur linea FK = AB; tum circini pede poſito in K, intervallo BC ducatur arcus in I, iterum poſito circini pede in F intervallo AC ducatur arcus in I. Ex puncto interſectionis I verſus H duc arcum intervallo CD, itemque ex F, intervallo AD, duc pariter arcum verſus H. Denique ex H intervallo DE, & ex F intervallo AE cum arcus ducti fuerint in G, & puncta interſectionum I, H, G lineis copulata, habebitur FGHIK ſimile & æquale ipſi AEDCB.

## COROLLARIUM.

§. 211. RAtio autem præ cæteris expedita delineandi figuras quascunque irregulares obtinetur beneficio circini tripedalis, v. g. cum ſimile polygonum irregulare delineandum foret ipſi polygono mox præcedenti AEDCB, defigantur tres pedes circini in A, B, C, & transferantur in F, K, I, mox menſurentur eo circino latera, & anguli B, C, D & transferantur in K, I, H; denique C, D, E transferantur in I, H, G eritque petitum polygonum deſcriptum. *Tab. VI. Fig. 116.*

## PROPOSITIO XX.

§. 212. *Ream quadrati* AB *metiri.*

Scire cupias, quotnam perticas quadratas campus quadratus contineat, cujus unum latus eſt 10 perticarum; Igitur baſim AB = 10 pert. multiplica cum altitudine AC pariter 10 perticarum, & habebis areæ ſeu campi 100 perticas quadratas. *Tab. VI. Fig. 117.*

## SCHOLION I.

§. 213. QUemadmodum numerus in ſe ductus v. g. 8 × 8 quadratum efficit numerum 64 (§. 140. *Arithm.*) ita etiam apud Geometras ſpatia in ſe ducta efficiunt quadrata ſpatia; ſic una pertica, quæ 10 pedes complectitur, in ſe ducta efficiet quadratum 100 pedum. 5 perticæ quadratæ continent 2500 pedes quadratos.

## SCHOLION II.

§. 214. QUod si campi latus contineret v. g. 16 perticas, & 5 pedes, uteris arithmetica decimali, quadrando numerum $1\overset{\circ}{6}\overset{\prime}{5}$ (§. 162. *Arithm.*) Etenim 16 perticæ, & 5 pedes sunt 165 pedes hac ratione

$$\begin{array}{r} 165 \\ \underline{165} \\ 825 \\ 990 \\ \underline{165\phantom{00}} \\ 27225 \end{array}$$

Id est: campi quadrati superficies continebit $27\overset{\circ}{2}2\overset{\prime}{5}$. Neque enim numerus quadratus 27225 dividi debet per 10, ut rursus in perticas redigatur, sed per 100, eo quod pertica una quadrata non 10 pedes, sed 100 contineat (§. 213.)

## COROLLARIUM.

§. 215. QUemadmodum quadrati area mensuratur, cum latus unum quadrati multiplicatur per aliud, ita & in parallelogrammis evenire solet; nam latus brevius multiplicatum cum latere longiori præbet aream Parallelogrammi.

## PROPOSITIO XXI.

Tab. VI. Fig. 118. §. 216. *RHombi* ACFB *aream metiri.*

Neglectis Rhombi angulis demitte ex C & F perpendiculares in D & E; tum vero DE × DC dabit aream Rhombi; Etenim ACFB = DCFE (§. 181.)

§. 217. AReæ Rhomboidum hac prorsus methodo mensurantur; demissis namque perpendicularibus ex Rhomboide fit parallelogrammum, cujus longius latus cum breviori multiplicatum dat Rhomboidis aream.

PRO-

## PROPOSITIO XXII.

§. 218. *TRapezii cujusque aream metiri.* *Tab. VI. Fig. 119.*

Sit trapezii DABC mensuranda superficies; duc diagonalem AC; ex D autem & B dimitte perpendiculares in dictam diagonalem, nempe DE, & BF. Porro dimidium duarum perpendicularium DE & BF multiplica cum perticis vel pedibus lineæ diagonalis AC, habebisque productum, nempe pedes, vel perticas cubicas hujus areæ.

Nam AFB + BFC = ACG; & AED + DEC = HAC: ergo etiam DABC = HAGC. Q.E.D.

## COROLLARIUM I.

§. 219. UT autem area trianguli ACG vel CAH inveniatur, debet vel CG cum media linea AC, vel tota linea AC cum media linea CG multiplicari; Si enim AC × CG prodit parallelogrammum, cujus triangulum ACG est dimidium. (§. 182.) *Fig. ead.*

## COROLLARIUM II.

§. 220. QUoniam omne polygonum in mera potest triangula resolvi (§. 131.) cognito valore & superficie triangulorum, innotescet etiam valor ac superficies polygonorum.

## PROPOSITIO XXIII.

§. 221. *DAtum quadratum sæpius multiplicare.* *Tab. VI. Fig. 120.*

Sit quadratum ACDB duplicandum. Primum lineæ rectæ laterales AB & AC protrahantur. Tum duc diagonalem CB, hocque servato intervallo, extende circinum utrinque ex A in 2. A2 erit latus quadrati duplicati (§. 95.) Quod si rursus duxeris rectam B3, eamque pro latere quadrati constitueris, erit quadratum ACDB triplicatum. Latus

tus B 2 = A 4 dabit quadratum A C D B quadruplicatum &c.

## COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 121. §. 222. Alio modo datis duobus quadratis tertium, ambobus æquale, ſic conſtruitur: ſit quadratum, cujus unum latus MN, alterius quadrati latus ſit NO. Hæc duo latera conjungantur ad angulum rectum MNO, & hypothenuſa deſuper ducta MO dabit latus quadrati, æqualis duobus datis nempe MN × MN & NO × NO. (§. 96.) Quod ſi tribus datis quadratis quartum æquale conſtruere ſit animus; erigatur latus tertii quadrati MX perpendiculariter ſuper MO, & ducatur hypothenuſa XO, hæc dabit latus quadrati æqualis tribus datis, ita ut XO × XO = XM × XM + MN × MN + NO × NO. Nam latus MO dat quadratum æquale duobus quadratis ex lateribus MN & NO; & hypothenuſa XO dat æquale quadratum duobus quadratis ex lateribus MO & MX; Igitur XO dat quadratum æquale tribus XM, MN & NO. Quod ſi quatuor quadratis datis ex lateribus SX, XM, MN, NO quintum quadratum æquale conſtruere velis, erigatur latus quarti quadrati XS perpendiculariter ſupra latus XO, & ducatur hypothenuſa SO, hæc erit latus quinti quadrati æqualis quatuor datis prioribus; ſeu: SO × SO = SX × SX + XM × XM + MN × MN + NO × NO. Et ſic porro.

## COROLLARIUM II.

§. 223. Triangula duplicantur, cum ſervata baſi, altitudo duplicatur; aut viciſſim, cum, ſervata altitudine, duplicatur baſis (§. 90.) triplicantur, cum, ſervata aut baſi aut altitudine, alterutrum duplicatur (§. 90.) quadrantur vero cum & baſis & altitudo duplicatur (§. 92.)

## PROPOSITIO XXIV.

§. 224. *Datum polygonum regulare qualecunque, aut etiam circulum, quotieſcunque lubet, multiplicare.*

Fit

Fit hoc beneficio circini proportionalis (§. 116). qui tanto intervallo aperitur, ut longitudo unius lateris in polygono multiplicando, vel etiam diametrus circuli multiplicandi, circino manuali menſurata, in characterem 1 & 1 lineæ geometricæ transferri poſſit. Si itaque ter v. g. polygonum, vel circulum ampliare petas, deſume circini proportionalis diſtantiam 3, & 3 in linea geometrica, & habebis latus, aut diametrum polygoni, aut circuli multiplicandi; & ſic in aliis multiplicationibus agendum.

## PROPOSITIO XXV.

§. 225. *SUper data recta* AB *deſcribere ſimile, non tamen æquale polygonum* M *ipſi polygono dato* N. Tab. VI. Fig. 122.

Datum polygonum N reſolvatur in triangula, & ſuper data recta AB fiant, ope transportatorii, anguli CAB, & CBA æquales angulis GEF, GFE, quorum latera jungantur in puncto interſectionis C. Porro ipſi C, & B adjungantur anguli BCD, & CBD æquales angulis GFH, FGH. Hi duo anguli BCD, CBD coibunt in D, facientque polygonum M ſimile, & tanto majus polygono N, quanto data recta AB major eſt linea EF (§. 92).

Nam anguli BAC, ACB, BCD, CDB, DBC, CBA ex hypotheſi ſunt æquales angulis FEG, EGF, FGH, GHF, HFG, GFE; ergo & ipſa polygona M, & N æquiangula ſunt (§. 88). Porro AB. BC : : EF. FG. Et BC. BD : : FG. FH. ergo polygona M, & N prorſus ſimilia ſunt.

## COROLLARIUM I.

§. 226. HÆc eadem eſt methodus vaſtas figuras ad minora ſpatia redigendi, ut non immerito in delineandis mappis ichnographicis fundorum, atque ædificiorum optime hac methodo utaris, etiamſi figuræ forent 100 angulorum.

## COROLLARIUM II.

Tab. VI. Fig. 123. §. 227. INstrumentum ichnographicum celebre est, quod parallelogrammum graphicum nuncupatur, & cujus ope facillime majores figuræ minori forma exprimuntur. Constat hoc parallelogrammum graphicum 4 potissimum regulis, per vertebras copulatis AB, BC, DE, EF. Mensæ stilus ferreus infigitur, atque in eum extremitas A beneficio foraminis immissa circumrotatur. Extremitati E imponitur cerussa; extremitati C autem imponitur stilus acutus, quem stilum si duxeris per lineamenta subjacentis in charta figuræ, depinget cerussa E in charta subjacente munda figuram prorsus similem, sed quadruplo minorem, in hac nempe linealis dispositione: quia cum triangulum ABC latera habeat duplo majora, quam triangulum ADE, vel EFC, erit ABC quadratum ipsius ADE. triangula se quippe habent in duplicata ratione laterum homologorum (§. 92.). Celeb. *Marinonius* triplicem præcipue modum, ope parallelogrammi graphici mappas ad modulos cujuscunque formæ minoris reducendi, complexus est ubertim juxta ac eruditissime cum vario Tabellarum apparatu Cap. VII. *de Re ichnographica*, auctorque tibi sum, ut in accurando hujus instrumenti usu, ejus manuductione utaris. Quod si vertebras DF ad alia foramina MM, & NN applicaveris, variabis continuo pro foraminum proportione figuram.

## COROLLARIUM III.

Tab. VI. Fig. 124. §. 228. ALia præterea ratio est ampliandi, vel minuendi figuras, quando assumpto medio puncto A figuræ ampliandæ ad omnes angulos rectæ lineæ ducuntur v. g AB, AC, AD, AE &c. tum si latus figuræ ampliandæ AX duplicatur in AB, & AZ in AC, AO in AD, AS in AE &c. resultabit figura quadruplo major; cum enim hæc duo triangula AXZ, & ABC habeant se in duplicata ratione (§. 92). Etiam tota figura, quæ meris triangulis constat, se habebit in in duplicata ratione, id est, ut quadrupla. Si figura sit quadruplo minuenda, demitur in radio medietas versus centrum.

## COROLLARIUM IV.

§. 229. ALiter figuræ ampliantur, vel minuuntur, cum ex aliquo angulo A rectæ continuantur per omnes alios angulos v. g. AB, AC, AD &c. tum si latus AG duplicatum fuerit in AB, & AH in AC, & AK in AD, sicque porro cum aliis lineis angulorum, fiet figura quadruplo major, ob rationes mox (§. 228) insinuatas, quia nempe triangula habent se ad invicem in duplicata ratione laterum (§. 92). Si figura foret quadruplo minuenda, tum lineæ ad angulos ductæ medietate minuuntur. *Euclides* Lib. VI. *Proposit.* 20. *Tab. VI. Fig.* 125.

## COROLLARIUM V.

§. 230. DEnique alia adhuc ratione ampliantur figuræ, cum punctum aliquod extraneum assumitur B, atque ex hoc puncto B per angulos figuræ A, S &c. continuæ rectæ ducuntur, tum si his rectis aliæ lineæ addantur, quæ lineis, seu lateribus figuræ ampliandæ sint parallelæ v. g. AO, CX, item DS, GK. Item SF, KH &c. prodibit figura eo major, vel minor, quo fuerit distantia BA, item distantia BD &c. vel major, vel minor. Hujus problematis est usus in Physica, ubi agitur de viribus gravitatis pro ratione distantiæ a centro telluris *Tab. VI. Fig.* 126.

## COROLLARIUM VI.

§. 231. EX omnibus hisce commemoratis figuris, planis, regularibus, triangulo nimirum, quadrato, pentagogono, hexagono, heptagono, octogono, enneagono &c tres tantummodo sunt species, quæ conjunctæ planam superficiem continuam efficiant, nempe triangula, quadrata, & hexagona. Quod si enim sex triangula æquilatera, aut 4 quadrata, aut 3 hexagona componas, utrobique superficies plana continua consurget ; quia nempe ad hoc, ut ex angulis pluribus conjunctis superficies plana continua habeatur, debent illi anguli conjuncti omnes insimul efficere 4 angulos rectos ; at hos quatuor rectos tantum efficiunt figuræ triplices mox memoratæ ; nam trianguli æquilateri angulus est graduum 60. Igitur 6 similia triangula efficiunt gradus 360, cum angulus quadrati rectus sit, nempe 90 graduum. Denique angulus hexagoni cum sit 120 graduum, constituent pariter tria hexagona conjuncta 360 gradus, id est quatuor rectos. Aliæ autem figuræ conjunctæ vel pauciores, vel plures angulorum gradus complectuntur : igitur dictæ triplices figuræ regulatæ tantum valent superficiem continuam planam constituere.

# CAPUT VII.

## De Circulo, aliisque Figuris curvilineis.

### DEFINITIONES.

Tab. VI. Fig. 127. §. 232. Circulus est *figura plana ex infinitis triangulis composita, quæ una curva linea comprehenditur, & cujus omnia puncta a centro æquidistant.* Partes circuli sunt : *Peripheria*, seu circumferentia, *centrum*, *segmentum*, *chorda*, *diametrus*, *radius*, *intervallum*, *area*.

§. 233. *Peripheria* est circuli ambitus ABCF. *Centrum* dicitur illud punctum, a quo omnia peripheriæ puncta æquidistant, nempe D. *Diametrus* est linea recta AC, per centrum D incedens, & utrinque in peripheriam terminata. *Radius* est linea a centro D ad peripheriam ducta *v.g.* DB, alias etiam dicitur *semidiametrus*. *Intervallum* est spatium, inter centrum, & peripheriam interceptum. *Area* est tota plana circuli superficies. *Chorda* est linea recta GH, ab uno puncto circuli ad alterum ducta, quin centrum D contingat. Hæc chorda duos arcus subtendit, majorem alterum GBH, alte-

alterum minorem GFH : dum autem chorda ſimpliciter dicitur arcum ſubtendere, intelligitur paſſim arcus minor. *Segmentum* circuli, eſt certa circuli pars arcum, & chordam comprehendens, v. g. GBH eſt ſegmentum majus, quia majus eſt ſemicirculo, GFH vero eſt ſegmentum minus, quia minus ſemicirculo. *Sector* circuli, eſt certa circuli pars, inter duos radios comprehenſa v. g. BE.

§. 234. PEripheria circuli dividitur communiter in 360 *gradus*, *gradus* quilibet in 60 *minuta*, *minutum* in 60 *ſecunda*, *ſecundum* in 60 *tertia* &c. Hinc habetur menſura angulorum ad centrum conſtitutorum ; tot quippe graduum dicetur angulus, quot graduum erit arcus angulo oppoſitus. Itaque cum circulus in 4 angulos rectos per centrum dividatur nempe ACBF, ſequetur, quod quemvis angulum rectum v. g. ADB ſubtendant 90 gradus, obtuſum ADE plures gradus, acutum EDC pauciores.

## PROPOSITIO I.

§. 235. *Circulus quisque minor* BFGC *totidem gradus complectitur, quot circulus quicunque maximus* DIHE. *Tab. VI. Fig. 128.*

Nam quisque circulus dividitur in 360 gradus, ergo minor tot gradus complectitur, quot major ; minoris tamen circuli ſunt quoque minores gradus. Item in circulis concentricis gradus majoris circuli correſpondent gradibus circuli minoris. Denique duorum circulorum concentricorum BFGC, & DIHE arcus BC, & DE, inter duos radios AD, & AE comprehenſi, eandem rationem habent ad ſui quisque circuli peripheriam ; atque iidem arcus BC, & DE complectentes eundem numerum graduum ſunt ſimiles inter ſe.

## DEFINITIONES.

§. 236. CIrculi alii ſunt *concentrici*, quorum idem eſt centrum. Alii *excentrici*, quorum diverſa ſunt centra. Alii ſunt

ſunt circuli *verticales*, qui ducuntur per peripheriæ ſuæ ſummum, & infimum, uti eſt meridianus ductus per *Zenith*, & *Nadir*, de quo in *Aſtronomia*.

## PROPOSITIO II.

Tab. VI. Fig. 129. §. 237. *Duo circuli* A, *&* B *non ſe contingunt ab extrinſeco, niſi in unico puncto* D. *Neque poſſunt ſe in alio puncto v. g. in* C *contingere ſimul.*

Nam ſi duo circuli ſe poſſent ſimul in C contingere, tunc lineæ duæ BC, & CG eſſent æquales duabus lineis BD, & DG, quod eſt impoſſibile (§. 12). Igitur hi duo circuli extra punctum D in alio ſimul puncto ſe contingere nequeunt.

§. 238. Sic pariter duo circuli A, & G ita ſe ad intra in unico puncto H contingunt, ut ſe in alio quopiam puncto v. g. M ſimul contingere prorſus nequeant.

Nam ſi ſimul in his duobus punctis H, & M ſe contingerent, tunc radius EH foret æqualis lineæ EM; igitur GEH eſſet æqualis ipſi GEM; cum eadem quantitas GE addita æqualibus EH, & EM faceret æquale (§. 2 *axiomate* 2). ergo etiam GM eſſet æqualis ipſi GEM, quod eſt impoſſibile (§. 12). Q. E. D.

## PROPOSITIO III.

Tab. VI. Fig. 130. §. 239. *Chorda, quæ fuerit centro propinquior, etiam erit major.* Nam ſint duæ chordæ BC, & DE, tunc arcus $BD + DO + OE + EC > DO + OE$: igitur chorda BC majorem arcum ſubtendit, quam chorda DE. Et ſic $BC > DE$. Q. E. D.

## PROPOSITIO IV.

Fig. ead. §. 240. *Si ex certo aliquo puncto extra circulum v. g. ex* F *plures lineæ ad peripheriam circuli ducantur v. g.* FH, FG; *illa lineæ erit brevior, quæ magis centro* A *appropinquabit.*

Nam

Nam AH + HF < AG + GF (§. 12); sed AH = AG (§. 232) : ergo etiam HF < GF. Q. E. D.

## PROPOSITIO V.

§. 241. *SI in semicirculo* AC *describatur angulus* ABC, *sive* ADC, *sive quicunque alius, semper ille erit rectus, adeoque anguli recti segmentum est semicirculus. Quod si vero angulus in majori segmento describatur v. g.* EBF, *erit angulus acutus. Si demum in minori segmento quomodocunque describatur v. g.* GDC. *erit angulus obtusus. Eucl. III.* 31. *Tab. VI. Fig.* 131.

Nam *primo*, quod angulum rectum in semicirculo attinet, ducatur recta KD, quia AK = KD (§. 232.) Etiam anguli KAD, KDA æquales erunt (§. 80.) Ergo duo anguli DAK + DCK sunt æquales duobus angulis ADK + KDC seu toti ADC: atqui qualescunque anguli triangulorum simul sumpti constituunt duos rectos; igitur angulus ADK + KDC constituent semissem duorum rectorum angulorum, seu unum angulum rectum.

*Secundo*, quod angulum spectat acutum EBF majoris segmenti: ducatur diametrus ED; juxta mox dicta EFD est angulus rectus; angulus vero FDE angulus acutus, utpote qui unacum angulo FED angulum rectum componat (§. 77.) sed anguli in eodem circuli segmento sunt æquales (§. 247.) *Eucl.* III. 21. ergo angulus FDE minor est recto.

*Tertio*, angulus ADC est rectus, ergo angulus GDC = GDA + ADC major erit recto, seu obtusus. Q. E. D.

## PROPOSITIO VI.

§. 242. *ANgulus majoris segmenti* FNH *mensuratur medio arcu majoris segmenti* NEF, *nempe* NE. *Tab. VI. Fig.* 132.

Duca-

Ducatur primo altera diametrus DE, quæ parallelas NF, & BC perpendiculariter per medium secet; Tum ducatur radius AN, qui tangentem GH pariter secet ad perpendiculum. Jam angulus FNH = FNA + ANH: ideoque cum anguli FNA, & NAB sint alterni, erunt etiam æquales (§. 66.) & ANH = BAE (§. 59.) Igitur FNH = NAB + BAE; atqui anguli NAB + BAE mensurantur arcu NE; ergo etiam angulus FNH mensurabitur medio arcu majoris segmenti NEF, seu NE. *Quod erat demonstrandum.*

## PROPOSITIO VII.

*Fig. ead.* §. 243. *Angulus minoris segmenti*, FNG *mensuratur medio arcu minoris segmenti* NDF, *nempe* ND.

Nam anguli GNA, & BAD sunt recti (§. 54.) & angulus FNA = BAN (§. 66.) demantur jam ex duobus rectis GNA, & BAD duo æquales anguli FNA, & BAN, remanebunt æquales anguli GNF, & NAD (§. 2. *Axiomate* 2.) Atqui angulus NAD mensuratur arcu ND; ergo etiam angulus minoris segmenti FNG mensurabitur medio arcu minoris segmenti NDF, nempe ND. Q.E.D.

## PROPOSITIO VIII.

*Tab. VI. Fig. 133.* §. 244. *Si super eadem peripheria* AC, *tanquam basi, ducatur angulus ad centrum* B, *nempe* ABC, *erit duplus anguli* AEC, ADC, ~~AEF~~, *& cujusque alterius anguli ad peripheriam ducti; nempe cum eadem peripheria* AC *fuerit basis angulorum.* *Eucl.* III. 20.

AFC

Nam *primo* angulus externus ABC est æqualis duobus internis BCE + BEC (§. 76.); sed angulus BCE = BEC (§. 94.) ergo etiam angulus ABC duplus est anguli AEC.

*Secundo* ducatur ex D per centrum B diametrus DBK. Jam externus angulus ABK æqualis est duobus internis BDA +

A + BAD (§. 76.) atqui BAD = BDA (§. 94.) ergo ABK est angulus duplus ipsius ADK; Angulus autem ABC est duplus anguli ABK, & ADC est duplus ipsius ADB (§. 57.) ergo etiam angulus ABC est duplus anguli ADC.

*Tertio* ex F ducatur per centrum B diametrus FBG, erit angulus ABG duplus anguli AFG, & ablatus angulus CBG duplus ablati anguli CFG. Igitur etiam angulus ABC erit duplus ipsius anguli AFC. *Quod erat demonstrandum.*

## COROLLARIUM.

§. 245. Eadem ratione angulus rectus ABC ad peripheriam semicirculi descriptus, erit ut dimidium semicirculi AIC; si nempe angulus rectus versus centrum K ductus fuerit; perpendicularis quippe IK, in rectam AC demissa, facit duos angulos rectos. *Tab. VI. Fig. 131.*

## PROPOSITIO IX.

§. 246. *Angulus ad peripheriam* ADC *mensuratur medietate arcus* AFGC, *super quo descriptus est.* *Tab. VI. Fig. 133.*

Nam tres anguli ADM, ADC, CDN mensurantur valore medii circuli (§. 60 & 234;) atqui ADM mensuratur medio arcu AD (§. 242.) & CDN medio arcu CD: Igitur ADC mensuratur medio arcu AFGC. Et tres hæ arcuum medietates constituunt medium circulum.

## PROPOSITIO X.

§. 247. *Anguli super eodem circuli segmento, quorum vertex ad quodlibet peripheriæ punctum pertingit. v.g.* AFC, ADC, AEC *sunt inter se æquales.* *Fig. ead.*

Nam ſinguli hi anguli AFC, ADC, AEC ſunt dimidium anguli ABC (§. 244.) ergo ſunt æquales inter ſe (§. 2. *Axiom.* 4.)

## PROPOSITIO XI.

Tab. VI. Fig. 134. §. 248. *SI in Circulo linea recta, per centrum ducta*, AB, *aliam rectam* EF *non per centrum* C *ductam ad angulos rectos in* D *ſecuerit, ſecabit eam perpendiculariter & bifariam. Eucl.* III. 3.

Nam ob æqualem menſuram CE & CF; Item ED & FD linea CB eſt perpendicularis lineæ EF (§. 24.) ſi vero eſt perpendicularis, etiam facit CDE & CDF angulos rectos (§. 54.)

Fig. ead. §. 249. ITaque etiam, ſi ex puncto A, in quo recta MN Circulum tangit, ducatur ad centrum radius AC, ſeu diameter AB; hic radius AC erit etiam perpendicularis ad tangentem MN: & e converſo, ſi ex puncto A tangentis MN recta perpendiculariter erigatur, hæc per centrum C tranſibit; Nam lineæ EF & MN ſunt parallelæ. (§. 18.)

## PROPOSITIO XII.

Tab. VI. Fig. 128. §. 250. *ARcus* BC *&* DE *circulorum concentricorum, iisdem a centro* A *radiis, nempe* ABD *&* ACE *comprehenſi, ſunt ſimiles inter ſe.*

Nam uterque circulus IDEH, & FBCG continent æqualem numerum graduum nempe 360 (§. 235.) Atqui ſicut ſe habet arcus DE ad IDEH, ita ſe habet arcus CB ad FBCG; Nam ſicut arcus DE + ID + EH = 180 gradibus, ſeu medio Circulo, ita etiam Arcus BC + FB + CG = 180 gradibus: ergo arcus BC & DE circulorum concentricorum, iisdem radiis comprehenſi, ſunt ſimiles inter ſe.

CO-

## COROLLARIUM.

§. 251. DIametri quoque circulorum, sunt ad invicem, ut peripheriæ; sic quemadmodum se habet radius A C ad peripheriam F G C B; ita se habet radius A E ad peripheriam I H E D. atqui A C, A E sunt semidiametri; Igitur etiam diametri se habent ut peripheriæ. *Fig. ead.*

## PROPOSITIO XIII.

§. 252. *DIametrus circuli ad peripheriam est incommensurabilis.* Communiter tamen proportio adsertur diametri ad peripheriam ut 7 ad 22; hæc autem proportio non est omnino suis numeris absoluta: numerus enim peripheriæ 22 est major aliquantulum, quam ferat proportio ad diametrum 7. Alii posuere proportionem ut 71 ad 223: sed neque hæc est omnino accurata. Alii hanc proportionem expresserunt ut 100 ad 314; ast & iste numerus peripheriæ 314 minor est, quam sit proportionalis numerus diametri 100. *Adrianus Metius* ut 113 ad 355. Quæ proportio in parvis Numeris est accuratior cæteris. Alii proportionem posuerunt inter diametrum, & peripheriam ut 2437782 ad 7660719. Cl. *Wolffius* assignat rationem prope veram diametri ad peripheriam, ut 10,000,000,000,000,000 ad 31415926535897932. *Elem. Geom.* §. 425.

§. 253. *ARchimedes* docet, cujuslibet circuli peripheriam triplam esse diametri, & adhuc superare parte, quæ quidem minor sit decem septuagesimis, hoc est septima parte diametri; major vero decem septuagesimis primis.

*Demonstratur*: ad semidiametrum AB dati circuli ducatur perpendicularis EF. Ex B abscindatur arcus 30 graduum in C, & D. Ex A protendatur secans per C in E, & per D in F, eruntque duo triangula ABE, ABF. Totum vero triangulum AEF æquiangulum, & æquilaterum, (§. 94.) AB *Tab. VII. Fig. 135.*

vero erit perpendicularis EF, & EB $=$ FB; denique EF dupla ipsius EB (§. 24.) & etiam AE dupla ipsius EB.

Ponatur itaqua BE esse partium 153, erit AE $=$ ipsi EF partium 306. Quadratum ipsius BE $=$ 23409 subtrahatur a quadrato ipsius AE $=$ 93636. Residuum manet 70227 quadratum nempe ipsius AB (§. 99.) Cujus 70227 radix est paulo major, quam 265 (est enim radix, licet non vera, proxima tamen $265\frac{2}{531}$ vel $\frac{1}{265}$ (§. 148. *Arithm.*) ideoque AB majorem habet proportionem ad BE, quam 265 ad 153, & vicissim EB habet minorem proportionem ad BA, quam 153 ad 265.

Secto jam angulo EAB bisariam per rectam AG (§. 57.) Quoniam linea recta AG dividens angulum EAB facit duas partes divisæ baseos, nempe EG, & GB proportionales, sicut EA, & AB sunt inter se proportionales: seu EA. AB : : EG. GB (§. 261.) *Eucl. lib. VI. prop. 3.* & componendo EA $+$ AB. AB : : EG $+$ GB $=$ EB. GB. Et permutando EA $+$ AB. EB : : AB. BG; & quia EA $+$ AB majores sunt quam 571 (quippe EA $=$ 306, & AB $=$ circiter $265\frac{2}{531}$) & EB posita est 153; habebunt EA $+$ AB ad EB majorem proportionem, quam 571 ad 153: ideoque, & proportio AB ad BG major erit, quam 571 ad 153; ac proinde si BG ponatur 153, erit AB paulo major quam 571. Ergo quadratum ipsius AB paulo majus erit, quam 326041; ideoque cum quadratum ipsius BG sit 23409, erit quadratum ipsius AG, quod est æquale quadratis rectarum AB, & BG (§. 96 & 99.) paulo majus, quam 349450, ejusque radix major, quam $591\frac{1}{8}$. Ergo AG ad GB majorem habet proportionem, quam $591\frac{1}{8}$ ad 153.

Rursus secto angulo GAB bisariam, per rectam AM, erit iterum GA ad AB sicut GM ad MB *Eucl.* lib. VI. prop. 3. & componendo GA $+$ AB. AB : : GB. MB, & permutando
AB GA $+$ AB. GB : : ~~GB~~ MB. & quia GA $+$ AB majores sunt, quam $1162\frac{1}{8}$ (nam AG major est, quam $591\frac{1}{8}$, & AB est

major

major quam 571) GB autem posita est 153; habebunt GA + AB ad GB majorem proportionem, quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153: ac proinde si BM ponatur 153, erit AB major, quam $1162\frac{1}{8}$. Igitur quadratum ipsius AB majus erit, quam $1350534\frac{33}{64}$ vel $\frac{1}{2}$; cui si addatur quadratum 23409 ipsius BM, erit quadratum ipsius AM, quod quadratis rectarum AB, & BM æquale est, majus, quam $1373943\frac{33}{64}$ seu $\frac{1}{2}$; & propterea etiam ejus radix, id est recta AM paulo major, quam $1172\frac{1}{8}$; Ergo AM habebit majorem proportionem ad MB, quam $1172\frac{1}{8}$ ad 153.

Porro secetur angulus MAB bifariam per rectam AN; erunt componendo, & permutando MA + AB ad MB, ut AB ad BN; & quia MA major est, quam $1172\frac{1}{8}$, & AB major, quam $1162\frac{1}{8}$, erunt MA + AB majores quam $2334\frac{2}{8}$ vel $\frac{1}{4}$. Cum ergo BM posita sit 153, habebunt MA + AB majorem proportionem ad BM, quam $2334\frac{1}{4}$ ad 153; ideoque, & AB ad BN majorem habebit proportionem, quam $2334\frac{1}{4}$ ad 153; ac proinde si BN assumatur æqualis 153, erit AB major, quam $2334\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius AB majus erit, quam $5448723\frac{1}{16}$; cui si addatur quadratum 23409 ipsius BN, erit quadratum ipsius AN, quod quadratis rectarum AB, & BN æquale est, majus, quam $5472132\frac{1}{16}$, ejusque radix major quam $2339\frac{1}{4}$: Ergo AN ad BN majorem habet proportionem, quam $2339\frac{1}{4}$ ad 153.

Denique secto angulo NAB bifariam, per rectam AH, erit, ut antea componendo, & permutando, NA + AB ad NB, ut AB ad BH; & quia NA major est, quam $2339\frac{1}{4}$, & & AB major, quam $2334\frac{1}{4}$, erunt NA + AB majores, quam $4673\frac{1}{2}$. Cum ergo BN posita sit 153, habebit NA + AB ad BN, hoc est AB ad BH majorem proportionem quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153; ac propterea si ponatur BH 153, erit AB major, quam $4673\frac{1}{2}$.

His itaque præmissis demonstrationibus concludere pergit *Archimedes*: Peripheriam circuli ter in ſe complecti diametrum, & adhuc ſuperare partem, quæ minor ſit, quam $\frac{1}{7}$: major vero, quam $\frac{10}{71}$. Seu, ſi pro diametro aſſumatur 1, habebit peripheria circuli, ad Unitatem diametri, minorem proportionem, quam $3\frac{1}{7}$ ſeu $3\frac{10}{70}$: majorem vero, quam $3\frac{10}{71}$. Qua quidem determinatione *Archimedes* differentiæ, inter diametrum circuli ejusdemque peripheriam intercedentis, limites nempe $3\frac{10}{70}$, & $3\frac{10}{71}$ ad tantam parvitatem redegit, ut alter limes ab altero, non niſi $\frac{1}{497}$ differret; Nam ſubtractis $\frac{10}{71}$ a $\frac{10}{70}$ remanet differentia $\frac{1}{497}$ (§. 71. *Arithm.*)

Itaque angulus E A B eſt $\frac{1}{3}$ recti anguli: ergo ejus ſemiſſis G A B eſt $\frac{1}{6}$ recti; & hujus anguli ſemiſſis M A B eſt $\frac{1}{12}$ recti: & hujus ſemiſſis N A B eſt $\frac{1}{24}$ recti: denique hujus ſemiſſis H A B eſt $\frac{1}{48}$ recti. Qualium ergo partium 48 eſt quadrans circuli, talium una eſt arcus B H; atque idcirco B H eſt totius peripheriæ circuli, ſeu quatuor rectorum $\frac{1}{192}$.

Fiat jam angulus O A B, æqualis angulo H A B, eritque totus angulus H A O $\frac{1}{96}$ totius peripheriæ circuli; ideoque & arcus H O erit $\frac{1}{96}$ totius peripheriæ. Recta ergo H O erit latus polygoni nonaginta ſex angulorum, circulo circumſcripti.

Et quoniam oſtenſum eſt, ſemidiametrum A B ad B H habere majorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153; ideo etiam diameter I B, dupla ipſius A B, habebit ad H O, duplam ipſius H B, majorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Si ergo H O, latus polygoni, ponatur 153, erit diameter I B major, quam $4673\frac{1}{2}$. Multiplicentur jam ambitus polygoni nonaginta ſex laterum, cum uno latere nempe $153 \times 96 = 14688$, habebitque ambitus polygoni ad diametrum I B majorem proportionem, quam 14688 ad $4673\frac{1}{2}$.

Eſt autem proportio 14688 ad $4673\frac{1}{2}$ minor, quam $3\frac{10}{70}$ ad 1; eo quod 14688 ad $4673\frac{5}{11}$ (qui numerus utique minor

eſt,

est, quam $4673\frac{1}{2}$) habeat proportionem ut $3\frac{10}{70}$ ad 1. Igitur, & ambitus polygoni ad diametrum IB proportionem habet minorem, quam $3\frac{10}{70}$ ad 1. Ergo multo magis circumferentia circuli, quæ minor est ambitu polygoni, minorem proportionem habet ad diametrum, quam $3\frac{10}{70}$ ad 1.

Atque ex his quidem demonstratur: peripheriam habere ad diametrum minorem proportionem, quam $3\frac{10}{70}$ ad 1. Nunc altera restat demonstranda propositionis pars; quod proportio tamen major sit, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. idque ex mente *Archimedis*.

Triangulum BAC est $\frac{1}{3}$ anguli recti (§. 244.) & AC dupla ipsius BC; ideoque si quadratum fiat ex AC = 1560, & subtrahatur ab eo quadratum ipsius BC = 780, remanebit quadratum ipsius AB, cujus radix est paulo minor, quam 1351 (§. 95 & 96.) & si AC. BC : : 1560. 780, habebit se AB ad BC paulo minus, quam 1351 ad 780. *Tab. VII. Fig. 136.*

Dividatur angulus BAC in duos æquales per rectam AG (§. 57.) erit arcus BG = GC *Eucl.* III. 26, & angulus GCB = GAC vel GAB (§. 247.) item angulus communis utrique triangulo AGC, & FGC: igitur & anguli ACG, & GFC æquales (§. 87.) & triangulum totum AGC simile triangulo CGF. Jam AG. GC : : GC. GF. & iterum AG. GC : : AC. CF (§. 94.) atqui AB. AC : : BF. FC, & componendo: AB + AC. AC : ; BF + FC = BC. CF. & iterum permutando: AB + AC. BC : : AC. CF *Eucl.* VI. 3. (§. 261.) Ergo etiam AB + AC. BC : : AG. GC. Verum AB est paulo minor, quam 1351; igitur etiam AB + AC ad BC, item AG ad GC minorem habet porportionem, quam 1351 + 1560 = 2911 ad 780; & per consequens, quadratum ipsius AB paulo minus, quam 8473921. Hoc quadratum 8473921 addatur quadrato GC nempe 608400, erit factum 9082321 pariter majus, quam quadratum AC: ideoque recta AC paulo minor est radice $3013\frac{3}{4}$, & AC ad GC paulo minorem habet proportionem, quam $3013\frac{3}{4}$ ad 780.

Di-

Dividatur rursus angulus GAC in duos æquales per rectam AH (§. 57.) Jam sicut AG + AC ad GC; ita se habebit AH ad HC; cum autem AG paulo minor sit, quam 2911, & AC paulo minor, quam $3013\frac{3}{4}$, etiam AG + AC ad GC, seu AH ad HC minorem habebit proportionem, quam 2911 + $3013\frac{3}{4}$, = $5924\frac{3}{4}$ ad 780; Etenim AH ad HC minorem proportionem habebit, quam $\frac{1}{13}$ numeri $5924\frac{3}{4} = 455\frac{3}{4}$, ad $\frac{1}{13}$ hujus numeri 780 = 60. seu quam $455\frac{3}{4} \times 4 = 1823$ ad $60 \times 4 = 240$. Ponatur itaque HC = 240, erit AH paulo minor, quam 1823, & consequenter etiam quadratum ipsius AH paulo minus, quam 3323329; Item quadratum ipsius AC paulo minus, quam 3380929, qui numerus ex quadratis numerorum 1823, & 240 componitur; ac tandem recta AC minor, quam sit ipsius quadrati 3380929 radix $1838\frac{9}{11}$. Itaque AC ad CH minorem habet proportionem, quam $1838\frac{9}{11}$ ad 240.

Porro dividatur angulus HAC, per rectam AK in duos æquales angulos (§. 57.) habebit se AK ad CK, sicut AH + AC ad HC. Quoniam vero AH minor est, quam 1823: & AC minor, quam $1838\frac{9}{11}$: HC autem = 240; habebit AH + AC ad HC, seu AK ad CK, minorem pariter proportionem, quam $1823 + 1838\frac{9}{11} = 3661\frac{9}{11}$ ad 240; aut quam $\frac{40}{11}$ illius numeri $3661\frac{9}{11} = 1007$, ad $\frac{40}{11}$ hujus numeri 240 = 66. Dum itaque KC assumitur esse partium 66, debet AK necessario minor esse, quam 1007; nec non quadratum ipsius AK minus, quam sit numerus 1014049; itemque quadratum ipsius AC minus numero 1018405, qui ex additione quadratorum numeri 1007, & 66 resultat; tandem etiam linea AC minor erit radice $1009\frac{1}{6}$, ipsius quadrati 1018405. Ergo AC ad KC minorem utique proportionem habet, quam $1009\frac{1}{6}$ ad 66.

Denique dividatur angulus KAC in duos æquales per rectam AL (§. 57.) erit AK + AC. KC :: AL. LC; & quoniam ex mox demonstratis AK minor est, quam 1007; & AC minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$; KC vero æqualis 66: habebit & AK + AC ad KC, seu AL ad LC minorem proportionem, quam $1007 + 1009\frac{1}{6} = 2016\frac{1}{6}$

ad

ad 66. Posita itaque recta LC $=$ 66, erit AL minor, quam $2016\frac{1}{8}$; & quadratum pariter AL minus, quam $4064928\frac{1}{16}$; quadratum etiam AC minus quadratis numerorum $2016\frac{1}{8}$, & 66 nempe $4069284\frac{1}{16}$; atque tandem linea AC minor radice hujus numeri, nempe $2017\frac{1}{4}$. Ergo pariter linea AC ad LC minorem habet proportionem, quam $2017\frac{1}{4}$ ad 66; & inverse: LC ad AC majorem habet proportionem, quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$.

Cum itaque BC sit $\frac{1}{6}$ peripheriæ (§. 286); erit GC $\frac{1}{12}$ peripheriæ, HC $\frac{1}{24}$, KC $\frac{1}{48}$, & LC $\frac{1}{96}$ ejusdem peripheriæ; atque linea LC erit simul latus polygoni nonaginta sex laterum, circulo inscripti: ideoque cum LC ad AC majorem habeat proportionem, quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$, habebunt & omnia polygoni latera, seu totus ambitus polygoni nonaginta sex laterum, majorem proportionem ad diametrum AC, quam $96 \times 66 = 6336$ ad $2017\frac{1}{4}$.

Jam vero numerus 6336 ter in se complectitur numerum $2017\frac{1}{4}$, & adhuc superest numerus $284\frac{1}{4}$, quod residuum sane plus est, quam $\frac{10}{71}$ numeri $2017\frac{1}{4}$; Etenim $\frac{1}{71}$ hujus numeri $2017\frac{1}{4}$ est $28\frac{1}{2}\frac{17}{84}$, & per consequens $\frac{10}{71}$ exprimunt numerum duntaxat $284\frac{17}{142}$, qui utique minor est numero $284\frac{1}{4}$. Ergo totus ambitus polygoni 96 laterum, & multo magis peripheria circuli ter in se complectitur diametrum AC, & præterea partem, quæ adhuc major est, quam $\frac{10}{71}$. *Quod erat alterum demonstrandum.*

§. 254. Ex Archimedæi hujus Theorematis fusiori deductione pronum est tyronibus intelligere, qua methodo *Archimedes* sit usus, ut incommensurabilitatem peripheriæ cum diametro demonstraret, & ad quam parvam differentiam limites utriusque incommensurabilitatis ingeniosissime restrinxerit, nempe ad $\frac{1}{497}$, ut ex inspectione theorematis elucet. Neque vero mathematicis inferioris ævi felicioribus esse licuit, in theorematis hujus tractatione, quam fuerit *Archimedes*;

Quamvis enim differentiam hanc extenuaverint varii (§. 252.) nemo tamen hactenus veram proportionem peripheriæ ad diametrum adinvenit, ut non immerito vera hæc peripheriæ circuli ad diametrum proportio hodiedum votum ſit eruditorum. Mea quidem ſententia, perdent & illi oleum ſuum atque operam, qui proportioni huic impoſſibili reperiundæ induſtriam impoſterum elocabunt. Quid igitur opus eſt provinciam incaſſum pertentare, quam alii quidem, & nuperrime Leuſtnerus ſe abſolviſſe, reclamantibus ſummis mathematicis, arroganti ſupercilio, ſed temere jactitavit? præſertim cum minutiſſima differentia inſenſibilis ſit, & inoffenſam eſſe omnem praxim patiatur.

## COROLLARIUM.

§. 255. Ex hac diametri cum peripheria circuli incommenſurabilitate deducitur, quod, ubicunque propoſitio aliqua ex coæquatione, aut proportione diametri cum peripheria dependet, illa ſuſtineri poſſit in phyſico, non item in mathematico rigore.

## PROPOSITIO XIV.

Tab. VII. Fig. 137. §. 256. *Circuli area* ALAX *æqualis eſt triangulo rectangulo* OXZ, *cujus baſis ſit peripheria, & altitudo radius circuli* OX.

Sint areæ circulorum AA, BB, CC, DD, ducatur radius ex O in X; ex X extendatur peripheria circuli ALAX usque in Z ad angulum rectum; Ex P in Q, ex S in T, ex M in N. Jam vero ſic ſe habet PQ ad XZ, ſicut ſe habet OP ad OX, cum triangula ſint ſimilia (§. 87.) Et ſic ſe habet peripheria BB ad peripheriam AA, ſicut ſe habet radius OP ad radium OX; circumferentiæ quippe ſunt ut radii (§. 206.) igitur ſic ſe etiam habebit PQ ad XZ, ſicut ſe habet peripheria BB, ad peripheriam AA, & linea PQ ſe habebit ad peripheriam BB, ſicut linea ſeu baſis XZ ad peripheriam

pheriam AA. Linea autem XZ ex *hypothesi* est æqualis peripheriæ AA, & PQ æqualis BB, ST æqualis CC, MN æqualis DD. Igitur etiam area circuli AA erit æqualis triangulo OXZ. Q. E. D.

## PROPOSITIO XV.

§. 257. *Area circuli se habet quam proxime ad quadratum diametri ut 11 ad 14; vel ut Clariss. Wolffius asserit: ut 7850 ad 10000.* Tab. VII. Fig. 138.

Sit circulus ALAX, cujus diameter sit AA, hujus autem diametri quadratum EFHG sit circulo circumscriptum, habebit se area circuli ALAX ad quadratum diametri EFHG ut 11 ad 14. Atque hoc ab *Archimede* sic demonstratur: latus duplum GH continuetur in K, adjiciatur, & $\frac{1}{7}$ diametri = KZ, ita ut GZ ad AA vel GH se proxime habeat, ut $3\frac{1}{7}$ ad 1. Jam vero triangulum AZG est proxime æquale circulo ALAX (§. 256.) & recta GZ sic se habet ad GH, sicut triangulum AZG ad triangulum ejusdem altitudinis AHG (§. 90.) atqui trianguli AHG, quæ est quarta pars quadrati EFHG, basis GH est æqualis 7; & trianguli AZG basis GZ est proxime æqualis 22: Igitur triangulum AHG quadruplicatum, seu quadratum EFHG habet se ad triangulum AZG, & per consequens, etiam ad aream circuli ALAX proxime, ut 28 ad 22, seu ut 14 ad 11. Q. E. D.

## SCHOLION I.

§. 258. Quod si latus GH ponatur esse æquale 71, & GK triplo majus, adjuncto KZ proxime æquali $\frac{10}{71}$; habebit se GZ ad GH, seu triangulum AZG ad triangulum AHG proxime, ut 223 ad 71; atque idem triangulum AZG, quod est proxime æquale circulo ALAX (§. 256.) habebit se ad quadratum GH proxime, ut 223 ad 71 × 4 = 284. Ex quo tamen elucet, proportionem circuli ad diametri quadratum in hac secunda positione esse paulo majorem, quam

 223

223 ad 284, quemadmodum in prima positione erat proportio paulo minor, quam 11 ad 14. Quod si $\frac{223}{284}$ subtrahatur ab $\frac{11}{14}$, deprehendetur minutissima differentia, inter aberrantem utramque proportionem intercedens, nempe $\frac{2}{3976}$. seu $\frac{1}{1988}$.

## SCHOLION II.

§. 259. Ope solius arithmeticæ demonstratio præcedentis theorematis fit hoc modo: diameter AA vel latus GH ponatur esse æquale 7; semidiameter vero AO $=3\frac{1}{2}$, & latus GZ $=22$. Quadratum lateris GH $7\times7=49$ & basis GZ multiplicata per altitudinem AG, id est $22\times3\frac{1}{2}=77$; cujus numeri 77 medietas $38\frac{1}{2}$ dat aream trianguli AZG (§. 169.) vel aream circuli ALAX (§. 256.) Igitur circulus ALAX se habet ad quadratum diametri EFHG, sicut $38\frac{1}{2}$ ad 49; id est, cum uterque numerus per 7 dividitur, ut $5\frac{1}{2}$ ad 7; seu ut 11 ad 14.

Porro ponatur diameter AA, vel latus GH $=71$; semidiameter autem AO $=35\frac{1}{2}$, & latus GZ $=223$: igitur quadratum lateris GH $71\times71=5041$; & basis GZ multiplicata per altitudinem AG, id est $223\times35\frac{1}{2}=7916\frac{1}{2}$, cujus medietas nempe $3958\frac{1}{4}$ dat aream trianguli AZG (§. 169.) vel aream circuli ALAX (§. 256): Ergo circuli area ALAX habet proportionem ad quadratum diametri EFHG, sicut $3958\frac{1}{4}$ ad 5041; seu, utrumque per 4 multiplicando, ut 15833 ad 20164, id est, dividendo utrumque per 71, ut 223 ad 284. *Quod erat demonstrandum.*

## PROPOSITIO XVI.

§. 260. *In æqualibus circulis, æquales anguli, æqualibus peripheriis insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant. Eucl. III. 26.*

Nam anguli ſuper eodem circuli ſegmento ſunt inter ſe æquales, quorum vertex ad quodlibet peripheriæ punctum pertingit (§. 247); atqui angulus ſuper eodem circuli ſegmento ductus ad centrum, duplus eſt anguli ſuper eodem ſegmento ducti ad peripheriam (§. 244.) ergo etiam æquales anguli, ſeu ad centrum ſeu ad peripheriam ducti, æqualibus ſegmentis ſeu peripheriis inſiſtunt. Q. E. D.

## SCHOLION.

§. 261. QUamvis itaque arcus AF, & FD, qui æquales angulos ABF, & FBD ſubtendunt, inter ſe æquales ſint; pars tamen chordæ AC non eſt æqualis parti chordæ CD æqualem angulum ſubtendenti: ſed hæ duæ partes chordæ AC, & CD ſunt lateribus AB, & DB proportionales, id eſt: AB. DB : : AC. CD. Nam protendatur recta DB in E, fiatque BE = AB. Jam DB, DC, BE, CA ſunt quatuor proportionales (§. 40). atqui A B = BE: ergo etiam BA. AC : : DB. CD. vel: AB. DB : : AC. CD. Hoc theorema omnibus omnino triangulis applicatur; ita, ut ſi angulus trianguli biſariam ſecetur, ſecans autem recta linea ſecet quoque baſim, habebunt baſeos ſegmenta eandem omnino inter ſe rationem, quam habent reliqua ipſius trianguli latera. *Eucl.* VI. 3. *Tab. VII. Fig. 139.*

## PROPOSITIO XVII.

§. 262. *AReam circularem* DEFG, *cujus diameter* DF *ſit* = 4 *ped.*, *ſternere oporteat quadris lapidibus, quorum ſinguli unum pedem quadratum contineant. Quæritur: quot lapides pro hoc lythoſtroto ſint neceſſarii?* *Tab. VII. Fig. 140.*

Fiat proportio: ſicut quadratum diametri = 14 ad aream circuli = 11 (§. 257). ita quadratum diametri DF 4 ped. = 16, ad aream circuli DEFG. Jam 16 × 11 = 176. hæc 176 dividantur per 14, factum prodibit $12\frac{8}{14}$, vel $\frac{4}{7}$. tot quippe quadrati lapides unius pedis erunt neceſſarii pro area illa circulari ſternenda.

§. 263. QUam veritatem ipſis oculis in figura intueri licet; quatuor enim integri lapides medium circuli occupant, qui una cum aliis 8 mediis lapidibus conſtituunt 8 integros lapides, & internam majorem explent quadraturam. Reſtant igitur adhucdum $4\frac{4}{7}$ lapides quadri pro cæteris circumpatentibus circuli explementis. Pro ſegmento comprehendente tres areolas ABC inſumatur $1\frac{1}{7}$ lapis; per conſequens quatuor ejuscemodi hiantia ſegmenta explebuntur $4\frac{4}{7}$ lapidibus quadris. Qua autem ratione ex $1\frac{1}{7}$ lapide reſecentur tres areolæ ABC, exhibet minor figura. Porro utne neceſſum ſit areolam B ex pluribus componi fragmentis, aſſumatur $1\frac{1}{2}$ lapidis loco $1\frac{1}{7}$ pro explendo uno ejuscemodi ſegmento trium areolarum, ita ut univerſim pro lythoſtroto hoc circulari 14 lapides unius quadrati pedis inſumantur; atque tum etiam areola B ex una integra lapidis conſtabit parte.

## PROPOSITIO XVIII.

Tab. VII. Fig. 141. §. 264. *CEntrum cujusvis arcus invenire.*

Sit arcus AB. cujus centrum quæratur; pone itaque circini pedem in A, fac arcus tam ſuperne quam inferne verſus C, mox transfer eandem circini aperturam in B, & duc arcus tam ſuperne, quam inferne in D. Rurſus eandem circini aperturam depone in G (eſt autem AG = BE) & ex G pariter duc arcus in C, & C, uti & ex E in D & D. Per puncta interſectionum C, & C, item D, & D ducantur rectæ; & punctum I, in quo rectæ concurrunt, erit centrum arcus AB.

## PROPOSITIO XIX.

§. 265. *CIrculi ſuperficiem invenire.*

Inveniatur primum circuli peripheria (§. 252). idque per regulam *Trium*: ſicut ſe habent 113 ad notam diametrum, ita ſe habent 355 ad ignotam peripheriam (§. 79 *Arith*). Cum inventa peripheria multiplicetur quarta diametri

tri pars; aut cum tota diametro multiplicetur quarta peripheriæ pars; aut denique cum media diametro multiplicetur media peripheria: Factum ex quacunque harum trium operationum proveniens dabit circuli superficiem proxime veram (§. 255).

Quod si neque diametrus, neque peripheria, aut in duo, aut etiam in quatuor posset dividi; multiplicetur diametrus tota cum tota peripheria, & factum proveniens dividatur per 4. Quotus e divisione proveniens pariter exprimet proxime veram circuli superficiem.

§. 266. Superficiem *segmenti* cujusdam circuli persæpe expedit indagari ab illis, qui agros alluentibus fluminibus conterminos metiuntur; (§. 136). Neque enim ejuscemodi superficies negligitur sine jactura; ut autem & brevissime, & qua licet, securissime superficies segmenti circuli inquiratur, visum est sequentem tabellam adjicere, qua gradus circuli in partes lineæ rectæ commutantur. Sit circuli diametrus partium 100000

| Secunda | Partes Peripheriæ |
|---|---|
| 2 | - - - $\frac{1}{2}$. |
| 3 | - - - $\frac{1}{2}$. |
| 4 | - - - 1. |
| 5 | - - - 1. |
| 6 | - - - 1. |
| 7 | - - - $1\frac{1}{2}$. |
| 8 | - - - $1\frac{1}{2}$. |
| 9 | - - - 2. |
| 10 | - - - 2. |
| 20 | - - - 4. |
| 30 | - - - 7. |
| 40 | - - - 9. |
| 50 | - - - 12. |

| Minuta | |
|---|---|
| 1 | - - - 14. |
| 2 | - - - 29. |
| 3 | - - - 43. |
| 4 | - - - 58. |
| 5 | - - - 72. |
| 6 | - - - 87. |
| 7 | - - - 101. |
| 8 | - - - 116. |
| 9 | - - - 130. |
| 10 | - - - 145. |
| 20 | - - - 290. |
| 30 | - - - 436. |
| 40 | - - - 581. |
| 50 | - - - 727. |

Gra-

| Gradus | Partes Peripheriæ | Gradus | Partes Peripheriæ |
|---|---|---|---|
| 1 | - - - 872. | 60 | - - - 52359. |
| 2 | - - - 1745. | 70 | - - - 61086. |
| 3 | - - - 2617. | 80 | - - - 69813. |
| 4 | - - - 3490. | 90 | - - - 78539. |
| 5 | - - - 4363. | 100 | - - - 87266. |
| 6 | - - - 5235. | 110 | - - - 95993. |
| 7 | - - - 6108. | 120 | - - - 104719. |
| 8 | - - - 6981. | 130 | - - - 113446. |
| 9 | - - - 7853. | 140 | - - - 122173. |
| 10 | - - - 8726. | 150 | - - - 130899. |
| 20 | - - - 17453. | 160 | - - - 139626. |
| 30 | - - - 26179. | 170 | - - - 148353. |
| 40 | - - - 34906. | 180 | - - - 157079. |
| 50 | - - - 43633. | 360 | - - - 314159. |

Cujus quidem tabulæ usus opportune dato in problemate elucebit.

*Tab. VI. Fig. 127.* Sit invenienda superficies segmenti HGF. Inveniatur primum hujus segmenti centrum D (§.264). atque ex hoc centro D describatur circulus BAGFH. cujus diametrus BF $=$ 264 ped. mox ope transportatorii mensurentur gradus segmenti GFH $= 88^{o}$. Quibus gradibus in tabula præmissa correspondet numerus 69813 + 6981 $=$ 76794. Jam fiat regula proportionis.

$$
\begin{array}{lcrcr}
100000 & \text{——} & 76794 & \text{——} & 264 \\
 & & 264 & & \\
\hline
 & & 307176 & & \\
 & & 460764\phantom{0} & & \\
 & & 153588\phantom{00} & & \\
\hline
 & & 20273616 & & 202\,\frac{73616}{100000}
\end{array}
$$

Cu-

Itaque 88 gradus $= 202 \frac{73616}{100000}$ ped. Jam quæratur tota ſuperficies circuli B A G F H (§. 265). ducanturque ex centro D rectæ in G & H; ac quæratur etiam ſuperficies ſectoris H D G F adhibita Regula proportionis: ſicut ſe habent $360^{\circ}$ ad totam ſuperficiem circuli, ita ſe habebunt $88^{\circ}$ ad ſuperficiem ſectoris H D G F. Porro inventa ſuperficies trianguli D G H ſubtrahatur ab inventa ſuperficie ſectoris H D G F, & reſiduum dabit ſuperficiem ſegmenti H G F. Q. E. F.

## PROPOSITIO XX.

§. 267. *Circuli inter ſe ſunt in ratione duplicata radiorum.*

Nam circuli ſunt polygona infinitorum laterum, ſeu continent infinita triangula (§. 340). atqui triangula habent ſe in duplicata ratione laterum homologorum, ſeu ut quadrata laterum (§. 92 & 88): igitur & circuli ſe habebunt ad invicem in duplicata ratione radiorum, ſeu ut radiorum quadrata. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

§. 268. Quoniam peripheriæ circulorum, ceu polygonorum regularium ſimilium, habent ſe ut radius ad radium (§. 206), radius ſe autem habet ad radium in duplicata ratione; igitur & peripheriæ ſe habebunt ad invicem in duplicata ratione. adeoque peripheriæ ſe habebunt ut radii; imo etiam arcus circulorum, qui ſunt peripheriæ partes, habebunt ſe ut radii circulorum.

## PROPOSITIO XXI.

§. 269. *Circulus* A G C, *habens pro diametro hypothenuſam* A C *trianguli rectanguli, æqualis eſt duobus aliis circulis* A D B, & B E C, *quorum alter cathetum* A B, *alter baſim* B C *ejusdem trianguli pro diametro habet.* *Tab. VII. Fig. 142.*

Etenim circuli ſe habent ad invicem ut quadrata radiorum (§. 267), ſeu etiam diametrorum; atqui quadratum hypothenuſæ AC eſt æquale quadratis catheti AB, & baſeos BC §. (96, & 99.) Igitur & circulus AGC = ADB + BEC. Q. E. D.

## PROPOSITIO XXII.

Tab. VII. Fig. 143. §. 270. *Chordæ* HL, *&* CF, *quæ ſimiles arcus ſubtendunt; Item ſinus* HO, *&* CD; *tangentes item* KG, *&* EB, *atque etiam ſecantes* IG, *&* AB (*§. 4. & ſeqq. Trigon.*) *habent ſe ad invicem ſicut arcus* HKL, *&* CEF.

*Primo.* Tot æque gradus intercipit angulus HIL, quot angulus CAF *per hypotheſim*; igitur hi duo anguli ſunt æquales: ſed cum latus AC = AF, & IH = IL, propter æqualem radium, erit utrumque triangulum CAF, & HIL Iſoſceles, & anguli C, F, H, L erunt æquales (§. 93). Igitur triangula CAF, & HIL erunt & æquiangula, & ſimilia (§. 88). & radius, ſeu latus IL, ſic ſe habebit ad triangulum HIL, ſicut AF ad triangulum CAF: atqui radius ſeu latus IL. AF : : HKL. CEF (§. 206). ergo etiam latus HL. CF : : HKL. CEF.

*Secundo.* Chorda HL ſe habet ad chordam CF, ut arcus HKL ad arcum CEF *juxta mox dicta*; ſed ſinus HO, & CD eſt chorda dimidia (§. 5. *Trigonom.*); item HK eſt medius arcus HKL, & CE eſt medius arcus CEF, cum angulum medium HIL, & CAF menſurent: ergo etiam HK. CE : : HO. CD. (§. 2. *Axiom.* 5.)

*Tertio*, Quoniam angulus HIK tot gradibus menſuratur, quot gradibus angulus CAE *per hypotheſim*, erit HIK = CAE; & quoniam angulus GKI, & BEA eſt rectus (§. 9. *Trigonom.*) erit etiam angulus KGI = EBA (§. 77.) igitur triangula GIK, & BAE ſunt ſimilia: igitur etiam KG. EB : : KI. EA; & KI. EA : KH. EC. (§. 206.) ergo etiam tangens KG. EB : : KH. EC.

*Quar-*

*Quarto* demum: in similibus triangnlis GIK, & BAE sicut GI ad BA, ita KI ad EA; atqui KI. EA : : KH. EC: ergo etiam secans GI. BA : : KH. EC. *Quod erat demonstrandum.*

## COROLLARIUM.

§. 271. QUamvis itaque chordæ sint ut arcus, id tamen solerter est advertendum: dum plures chordæ minores eundem arcum subtendunt, quem etiam una chorda major totum subtendit, tunc chordam illam majorem non se habere ad chordas minores, sicut arcus major ad arcus minores. Itaque chordæ quidem MN, ST se habent ut arcus MXN, & SZT; attamen chordæ MX + XN > MN: uti & chordæ SZ + ZT > ST (§. 12.) cum tamen arcus MX + XN = MXN, & arcus SZ + ZT = SZT; habent se quippe minores arcus tanquam medium majoris.

## PROPOSITIO XXIII.

§. 272. *POlygona regularia circulo inscripta, quo plura habuerint latera, eo quoque majorem habebunt circuitum majoremque superficiem.* Tab. VII. Fig. 144.

Sit Pentagonum ABCDE circulo inscriptum: sit & inscriptum decagonum AKBI &c. spatium arcus EFA est quinta circuli pars: linea recta EA est latus seu quinta pars Pentagoni; & duæ lineæ rectæ concurrentes EF, AF sunt quinta pars decagoni; sed quinta pars decagoni, nempe rectæ lineæ EF + FA, est majoris circuitus, quinta pars Pentagoni, nempe recta EA (§. 12): Igitur etiam totus circuitus decagoni major erit circuitu Pentagoni. Q. E. D.

## PROPOSITIO XXIV.

§. 273. *POlygona regularia, quæ fuerint circulo circum scripta, quo pauciora latera habuerint, eo majorem habebunt circuitum, & superficiem.* Tab. VII. Fig. 145.

Sit Pentagonum ABCDE circulo circumſcriptum, ſit & circumſcriptum eidem circulo decagonum EFK &c. EF + FK eſt quinta pars decagoni: & EF + FA + AK eſt itidem quinta pars Pentagoni; ſed quinta pars decagoni EF + FK < EF + FA + AK, quæ eſt quinta pars pentagoni; cum EF + FA + AK major circuitus ſit, quam EF + FK (§. 12.) Ergo etiam totum pentagonum circulo cum paucioribus lateribus circumſcriptum, majorem habet peripheriam, majoremque ſuperficiem, quam circumſcriptum decagonum cum pluribus lateribus. Q. E. D.

## PROPOSITIO XXV.

*Tab. VII. Fig. 146.* §. 274. *Linea diſpoſita pro circuli peripheria plus ſpatii complectitur, quam ſi eadem linea in quadrati fuiſſet figuram coordinata.*

Sit linea diſpoſita in circulum ABCD, & eadem linea coordinata in quadratum EFGH. Jam vero ſuperſicies circuli eſt proxime æqualis triangulo rectangulo, cujus baſis ſit peripheria ABCD, & altitudo radius KD (§. 256.) Quadratum vero EFGH æquivalet triangulo rectangulo, cujus baſis ſit EFHG = ABCD, & altitudo KM; ſed KD majus, quam KM: igitur etiam triangulum, quod ſupra eandem baſim habet altitudinem KD majus eſt, quam triangulum habens altitudinem KM (§. 89.) Igitur etiam linea diſpoſita in peripheriam plus ſpatii complectitur, quam eadem linea diſpoſita in quadratum. Q. E. D.

## SCHOLION.

I. 275. Quod de quadrato mox dictum eſt, intelligi etiam debet de omni altera figura polygona regulari. Atque ex hoc deducitur: circulum omnium figurarum Iſoperimetrarum maximum ſpatium complecti.

PRO-

## PROPOSITIO XXVI.

§. 276. *Circulum multiplicare.*

Assumatur diametrus circuli multiplicandi, atque ex hac diametro, tanquam uno latere constituatur quadratum. Rursus hujus quadrati diagonalis assumatur, atque constituatur pro diametro circuli, circulus iste erit duplus alterius.

Nam cum circuli sint in ratione duplicata radiorum, seu ut illorum quadrata (§.267.), quod tradit *Eucl.* Lib. XII. Prop. 2; radius autem, seu semidiametrus multiplicati circuli major sit $\frac{1}{4}$, quam semidiametrus circuli multiplicandi (§. 315.) erit & totus circulus multiplicatus duplo major circulo multiplicando. Quod si cupias circulum triplicare, aut quadruplicare, quære diametrum triplicandi vel quadruplicandi circuli in diagonalibus quadrangulorum multiplicandorum (§. 221.)

## PROPOSITIO XXVII.

§. 277. *Triangulum æquilaterum circulo inscribere.*

Ducta per circulum diametro BD, cape semidiametrum GD, hujusque intervallum primo transfer ex D in C; tum in E, inde in B; porro in F, & A. Itaque si ex C in B rectam duxeris, ex B in A, ex A in C, habebis triangulum æquilaterum: Quod si vero ex proximo puncto ad proximum rectam duxeris, veluti ex D in C, ex C in E, ex E in B &c. habebis hexagonum regulare; Namque latus hexagoni, circulo inscripti, est circuli radius. *Ta. VIII. Fig. 147.*

§. 278. Aut radium GD divide in duas partes æquales in R, per punctum R duc rectam lineam AC, cui diametrus BD sit perfecte perpendicularis: mensura lineam AC, eamque transfer ex C in B, ex B in A, & idem omnino triangulum confecisti.

## PROPOSITIO XXVIII.

Ta.VIII. Fig. 148. §. 279. *Circulo quadratum inscribere.*

Per centrum E duc diametrum CD; tum ex centro E erige perpendicularem EA, (§. 24.) eamque rectam ex centro E in B demitte; habebis itaque circulum quadrifariam divisum. Jam si ex puncto A in C, ex C in B, ex B in D, ex D demum in A rectas duxeris, habebis quadratum petitum circulo inscriptum.

§. 280. Quod si quadratum circulo circumscribere velis, per eadem reperta puncta A, D, B, C duc tangentes FG, GI, IH, HF, quæ tangentes diametris CD, & AC sint parallelæ: FG, & HI ipsi CD: & FH, GI ipsi AB. Eritque FGIH quadratum circulo circumscriptum.

## PROPOSITIO XXIX.

Ta.VIII. Fig. 149. §. 281. *Pentagonum æquilaterum inscribere circulo.*

Fiat circulus ABC. Cujus diametro radius DB rectus insistat, radius DC in duas partes dividatur, ita ut DF=FC. Ex F, radio FB ducatur circulus EBG, fiatque ex E recta in B, hæc recta EB erit latus Pentagoni circulo ABC inscribendi, quod Pentagonum exprimitur literis BLHKO.

Fig. ead. §. 282. Si forte Pentagonum regulare circulo circumscribere oporteat; inscribatur primum circulo pentagonum modo mox insinuato; tum per puncta BOKHL ducantur tangentes SM, MN, NR, RT, TS, in punctis SM, N &c. in quibus tangentes concurrunt, formabitur pentagonum circulo circumscriptum. Nam angulus LDX = XDB (§. 81.) & ob eandam rationem angulus XDB = BDP. Ergo etiam angulus LDB = XDP (§. 2. *Axiom. V.*) ergo pariter angulus SDM = LDB, & per consequens omnia alia latera trianguli circumscripti S, M, N, R, T habent æquales ad cen-

centrum D angulos ipsis angulis laterum pentagoni circulo inscripti: igitur pentagonum inscriptum, & circumscriptum sunt inter se similia (§. 88.) igitur, & regularia.

§. 283. AUt inscribatur primum pentagonum regulare BCDEF circulo; tum fiant lateribus inscriptis BC, CD, DE, EF, FB parallelæ KL, LM, MN &c. quæ parallelæ tangant circulum in unico puncto peripheriæ, dabuntque puncta concurrentium parallelarium KLMNO pentagonum circulo circumscriptum, simile ipsi pentagono inscripto BCDEF. Ta. VIII. Fig. 150.

§. 284. QUod si demum datum sit pentagonum BCDEF, cui circumscribi debeat circulus, cujus centrum sit ignotum; Quæratur primo centrum pentagoni hoc modo: posito circini pede in E fiant ad arbitrarium intervallum arcus in O, & Z; tum posito circini pede in D cum eadem apertura in O, & Z; item in G, & X. Sic pariter ex C arcus in G, & X conjungantur; per puncta intersectionum ZO, item XG ducantur rectæ, atque in puncto A concurrentium rectarum erit centrum pentagoni BCDEF. Itaque ex hoc centro A, radio AD, describatur circulus, hic pentagonum BCDEF examussim circumscribet. Fig. ead.

## SCHOLION.

§. 285. HAc eadem ratione centra aliarum quarumque figurarum regularium deteguntur v. g. trianguli ABC. Servata eadem semper circini apertura, ex centris A, B, C ducantur arcus versus N, & O, item versus S, & M. Per puncta intersectionum NO, item SM ducantur rectæ, atque in puncto G, in quo hæ rectæ concurrent, habebitur centrum quæsitum trianguli regularis ABC. Idemque fiat cum aliis figuris. Ta. VIII. Fig. 147.

PRO-

## PROPOSITIO XXX.

Ta.VIII. Fig. 151. §. 286. *Hexagonum circulo inscribere.*

Ducatur per circulum diameter A B, positoque circini pede in B, intervallo semidiametri GB, ducatur arcus CD. Servata eadem circini apertura describatur ex centro A arcus F GE: ubi puncta AEDBCF lineis rectis copulata fuerint, habebitur hexagonum circulo inscriptum, cujus unum latus æquale sit semidiametro illius circuli, cui hexagonum inscriptum est.

## SCHOLION I.

§. 287. Quod si hexagonum circulo circumscribere oporteat procedatur juxta doctrinam (§.282. vel §.283.)

## SCHOLION II.

Ta. VIII. Fig. 147. §. 288. Aliter hexagonum circulo inscribitur, si nempe latus unum trigoni inscripti v. g. A C ex centro G per punctum R in duas æquales partes dividatur; recta G D dividens in puncto D dabit latus hexagoni A D vel D C &c. Eadem prorsus ratione ex quadrato octogonum, ex pentagono decagonum, ex hexagono dodecagonum præparatur.

## PROPOSITIO XXXI.

§. 289. *Qualecunque polygonum regulare cuicunque circulo inscribere.*

Circuli totius 360 gradus dividantur per latera polygoni inscribendi (§. 41. *Arithm.*) veluti si inscribendum sit trigonum, dividantur 360 per 3, quotus erit 120; tot itaque gradus per chordam subtendantur ope *transportatorii* (§. 108.) Hæc chorda erit latus trigoni, cui si aliæ duæ intra peripheriam circuli adjungantur, habebitur Trigonum petitum. Hac prorsus ratione aliorum quorumque polygonorum v. g. pentagoni latera reperiuntur. 360 dividantur per 5, quotus erit

72.

72. igitur chorda, 72 gradus ſubtendens, erit latus pentagoni. &c

## SCHOLION.

§. 290. Aliter quodcunque polygonum circulo inſcribitur ope *circini proportionalis* (§. 116.) hoc modo: longitudo ſemidiametri illius circuli menſuratur circino communi manuali; hoc circini manualis intervallum transfertur in circinum proportionalem ita, ut utrumque crus manualis circini tangat in utroque crure circini proportionalis numerum 6 lineæ polygonalis. Circulo itaque proportionali in hac divaricatione conſtituto, ſi lubeat circulo aut heptagonum aut nonagonum aut quodcunque aliud inſcribere, adhibito circino manuali deſumatur diſtantia 7 & 7, vel 9 & 9 utriusque cruris circini proportionalis, hæcque diſtantia circulo tamquam latus inſcribatur, exhibebitque quodcunque poſtulatum polygonum.

## PROPOSITIO XXXII.

§. 291. *Tria data puncta, aut triangulum quodvis circulo inſcribere.* Ta. VIII. Fig. 152.

Sint data tria puncta, ſeu triangulum ABC circulo inſcribendum; erigantur ſuper latera AB, & BC perpendiculares GG, & FF, in puncto interſectionis L habebitur commune horum laterum AB, & BC centrum L (§. 284.) Ex hoc centro L, radio LA, deſcribatur circulus, eritque triangulum ABC ita circulo inſcriptum, ut ſingula puncta ABC circuli peripheriam contingant.

## PROPOSITIO XXXIII.

§. 292. *Majoris circuli arcum* AMBNC, *aut etiam totum circulum ſine ullo aſſumpto centro efformare.* Ta. VIII. Fig. 153.

Sint tria duntaxat puncta ABC cognita, quæ formandi circuli peripheriam contingant, neque etiam ſit poſſibile ex datis his tribus punctis juxta (§. 291.) centrum aut invenire, aut eo uti: igitur assumantur duæ regulæ ligneæ, hujusque alterius extremitas ad alterius extremitatem firmiter compingatur, ita, ut angulum obtusum proportionatum tribus punctis datis A B C exhibeant. In punctis A B C figantur aculei, quibus regulæ compositæ ita applicentur, ut ad punctum B obtusangulus constituatur. In extremitate B regularum compositarum infigatur cerussa, atque ad contactum A, & C fiant in regulis notæ. Quod si compositæ hæ regulæ primum ita collocentur, ut altera extremitas sit in X, obtusus angulus in A, altera vero extremitas in C, sique obtusus hic angulus ex A per B in C sic promoveatur, ut hæ duæ compositæ regulæ tandem figuram A C Z exhibeant, habebitur a cerussa in obtusangulo constituta descriptus arcus A M B N C. Eadem prorsus ratione ex C arcum licebit persequi, donec totus circuli ambitus consurgat.

Nam si circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli. Idem fiet, si tangens punctis A & C applicetur.

## PROPOSITIO XXXIV.

Ta. VIII, Fig. 154. §. 293. *Figuram ovalem* A C B F E *describere.*

Per formatum quemcunque circulum ducatur diametrus A B, uti & altera diametrus perpendicularis C D; ex puncto A per D protende lineam rectam in F; similiter etiam ex B in E. Tum posito circino in A, intervallo B A duc arcum ex B in F, & iterum, servata eadem apertura circini, posito uno pede in B, duc arcum A E; demum posito circini pede in D, duc arcum ex E in F, habebiturque figura ovalis petita.

## PROPOSITIO XXXV.

Ta. VIII. Fig. 155. §. 294. *Cochleam seu lineam volutam delineare.*

In

In puncto C rectæ lineæ A B ponatur circinus, fiatque semicirculus D E; tum posito circini pede in D, radio D E, continuetur alter semicirculus ex E in F. Rursum deponatur circulus in C, fiatque radio C F semicirculus ex F in G, & sic porro, habebiturque cochlea producta.

## PROPOSITIO XXXVI.

§. 295. *Volutam architectonicam formare.* Ta. VIII. Fig. 156.

Sit linea A B, super hanc demittatur perpendicularis Q O. Tum circini pede constituto in C describatur circulus D D D D. Hinc circulo inscribatur quadratum rectangulum (§. 279.) Singula hujus quadrati latera per duas rectas dividantur in duas æquales partes in 9, 10, 11, 12. Quælibet harum duarum transversalium linearum dividatur in 6 partes æquales, atque his partibus numeri, in orbita se consequentes, inscribantur, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Tum circini uno pede posito in 1, ducatur quadrans circuli, nempe arcus D E; iterum posito circino in 2 discribatur arcus, E F, rursus ex 3 describatur arcus F G &c. Quod si itaque per illos 12 numeros subsequentes ducantur continui quadrantes, habebitur descripta voluta architectonica.

## DEFINITIO.

§. 296. Cyclois est *linea curva, quæ ab assumpto peripheriæ circuli puncto describitur, cum circulus ille super recta linea volutatur.*

Talis curva describitur, cum circulus D C H lineam rectam D F contingit in puncto D, atque super hac recta D F revolvitur, donec punctum contactus D in sublime E extollatur, ac demum continuato motu punctum D usque in F perveniat. *Galileus* primus hanc curvam lineam, ut auctor est *Torricellius*, speculatus est circa annum 1599, eique cycloidis nomen imposuit. Ta. VIII. Fig. 157.

§. 297. CIrculus, ex cujus revolutione hæc curva linea fit, dicitur *circulus generator*. Linea recta emensa D F dicitur *basis*. Ex bissectæ lineæ D F puncto A linea perpendicularis erecta A E dicitur *axis* vel *altitudo cycloidis*. Punctum E dicitur *vertex*. Punctum D denique, quod curvam describit, *punctum lineans* vocatur.

§. 298. EX hac cycloidis definitione colligitur, quod basis D F integræ peripheriæ circuli A L E G æqualis sit; media vero linea D A mediæ peripheriæ A L E. Item quod arcus B C lineæ rectæ B D, quam delineavit, æqualis sit. Si media cycloidis pars D E basi D applicetur, & lineam curvam D X I constituat, atque pendulum circa I X D involutum versus E promoveatur, ut filum tendat, describetur cyclois D C E æqualis alteri D X I.

Ta. VIII. Fig. 158. §. 299. PRæcipuæ cycloidis proprietates sunt *prima*: quod, si inter basim A B & verticem cycloidis C circulus generator constituatur, atque e quovis cycloidis puncto v. g. ex E linea recta, axi C Z perpendicularis, basi autem A B parallela ducatur v. g. E G, N S &c. Tunc recta ordinata E D, circuli peripheriæ occurrens, æqualis sit arcui D C. Quod non eveniret in figura circulari tota O C P; ordinata quippe M S major est, quam sit arcus C H. Ex hoc quoque habetur, Ta. VIII. Fig. 157. quod recta ex puncto circuli genitoris B ad punctum C ducta, ubi nimirum circulus cycloidem secat, perpendicularis sit ad arcum cycloidis D C E, aut ad tangentem, quæ per idem cycloidis punctum duceretur; parallela autem sit recta I B C, ad rectam A L.

Fig. 158. *Secunda* proprietas est: quod tangens quæcunque cycloidis sit parallela chordæ, quæ ex vertice cycloidis ducitur ad intersecantem; sic U X parallela est chordæ D C; item tangens F K parallela est chordæ M C.

*Tertia* proprietas est, quod arcus quicunque cycloidis sit duplus

duplus chordæ, ex vertice cycloidis, ad ordinatam intra peripheriam circuli ductæ; sic arcus EC duplus est chordæ DC: imo media ipsa cyclois AC dupla est diametri ZC. Atque exinde *quarta* cycloidis proprietas scaturit: quod nempe linea curva cycloidalis ACB sit quadrupla diametri genitoris CZ; Tota vero cyclois ACB tripla sui circuli genitoris ZDC.

## ROPOSITIO XXXVII.

§. 300. *Cycloidem delineare.*

Linea recta quæcunque assumpta pro basi v. g. DF dividatur in 22 partes æquales, e cujus medio, centro A erigatur perpendiculariter diametrus circuli genitoris AE (§. 24); quæ, cum peripheria circuli genitoris nempe recta DF sit $=22$, debebit esse $=7$ (§. 253.) Perpendicularis AE continuetur in I, ita ut $AI = 6\frac{1}{2}$. Tum posito circini pede in E, intervallo 8 partium baseos DF, fiant sectiones in C &M; Ex puncto I, radio IE ducatur arcus CEM, atque ex C, &M ducantur rectæ in I nempe CI, MI. Rursus ex C, & M, intervallo $4\frac{1}{2}$ partium baseos, fiant intersectiones in S, & N. Porro assumatur ope circini manualis intervallum 10 partium baseos, atque hoc intervallum ex punctis S, &N transferatur in puncta X, &Z duarum rectarum CI, & MI. Quod si itaque ex punctis intersectionum O, &K, radio DO vel KF ducantur arcus DS, &NF; item ex punctis X, &Z, radio XS vel ZN ducantur arcus SC, &MN; Denique ex puncto I, radio CI, vel IM, vel IE ducatur arcus CEM, habebitur linea cycloidalis DEF. *Fig. 157.*

## SCHOLION.

§. 301. Vides, curvam lineam cycloidalem CEM esse sphæricam, ex centro enim I, stabili radio, efformatur; at vero ex C, &M continuatam eandem curvam versus D, & F continuo deficere, fierique contractiorem, quemadmodum & ipsi radii arcuum ex centris X, Z, &O, K conti- *Fig. 157.*

nuo redduntur breviores. Atque hanc de cycloide notitiam persequi, e re esse visum est; tum quod in civili architectura pro construendis depressis fornicibus deserviat; tum maxime, quod theoria cycloidis ad oscillationem pendulorum determinandam plurimum conducat. De quo in *Physica* disputatur.

§. 302. ALiæ præterea sunt curvæ lineæ, quæ variis coni sectionibus efformantur; de his infimo Geometriæ loco agetur.

# CAPUT VIII.

## De variis Epipedometriæ speciebus.

§. 303. PErpetua Quantitatis continuæ cum discreta, seu numerorum cum lineis, & superficiebus intercedit analogia; ut omnino, quemadmodum in Arithmetica quatuor vulgares numerorum species recurrunt, nempe *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *&* *Divisio*: ita, & in lineis ac superficiebus quatuor illæ species usurpentur. Quæ quidem omnia adductis Problematis illustrare convenit. Velim autem ejuscemodi praxes a Geometriæ Tyronibus sæpius adiri; Et quamvis nonnulla in eis oggerantur, quæ mathematicum rigorem non omnino sustineant, veluti illa circuli cum quadrato commensuratio, physice tamen vera sunt, atque intellectum in figurarum atque superficierum æstimatione magnopere excolunt.

## PROBLEMATA ADDITIONIS.

### PROBLEMA I.

§. 304. *DUo Triangula æquilatera ita sibi invicem addere, ut exinde tertium triangulum æquilaterum consurgat.*

Resolutionem, quadratis etiam, & circulis deservientem vide (§. 222.)

PRO-

## PROBLEMA II.

§. 305. *Triangulum scalenum* ACB, *cujus altitudo* CD *sit* 12 *digitorum*, & *alterum triangulum scalenum* EFG, *cujus altitudo* FO *sit* 9 *digitorum ita sibi addere, ut tertium triangulum, itidem scalenum* ALO *proveniat, cujus altitudo* LM *sit* 18 *digitorum.* Ta. VIII. Fig. 159.

Triangulum minus EFG reducatur ad altitudinem majoris trianguli ACB (§. 330), ita ut OCG=EFG; Tum basis AB, & OG redigantur in unam, habebiturque triangulum AFG=ACB+EFG. Porro latus AF protendatur in L, donec nempe altitudo LM sit 18 digitorum, & fiat triangulum ALO=AFG (§. 330), eritque scalenum ALO= duobus scalenis ACB, EFG. Q. E. F.

## PROBLEMA III.

§. 306. *Hexagonum regulare* X, & *Pentagonum regulare* Z *insimul addere, atque horum ex additione producere pentagonum regulare* R, *duobus præcedentibus æquale.* Ta. VIII. Fig. 160.

Ex hexagono regulari X fiat parallelogrammum ABLM (§. 334.) Ex pentagono pariter Z fiat alterum parallelogrammum EFWU (§. 335.) Tum parallelogrammum ABML reducatur ad altitudinem EU quærendo quartam proportionalem SE (§. 40, & 41.) ad quam sic se habeat BL, sicut se habet EU ad AB. Quartæ proportionali SE adjungatur EF; Et SF×FW fiat parallelogrammum SFWU, ita ut SFWU =ABML+EFWU. Tandem inter SE, & EF quæratur media proportionalis OP (§. 39.) quæ latus præbebit quæsito pentagono regulari R. Q.E.F.

## PROBLEMA IV.

§. 307. *Triangulum* ABC, & *Trapezium* HEFG *addere, ut alterum Trapezium* LMNO *simile priori producatur.* Tab. IX. Fig. 161.

Trian-

Triangulum ABC reducatur ad altitudinem trapezii HEFG (§. 330), ita ut AKL = ABC. Trapezium quoque HEFG reducatur ad æquale triangulum IFG (§. 329); addatur alterum triangulum AKL, & habebitur triangulum IFU æquale duobus additis; nam FGU = AKL (§. 91). Ex triangulo IFG fiat æquale parallelogrammum IMNG (§. 328), itemque ex triangulo IFU æquale parallelogrammum IMOU §. eodem. Parallelogrammum IMNG reducatur ad latitudinem baſeos HG, quærendo quartam proportionalem, ac dicendo: ſicut ſe habet HG ad IM; ita MN ad GP (§. 40 & 41) & habebitur parallelogrammum RHGP. Parallelogrammum quoque IMOU ad altitudinem GP reducatur, quærendo quartam proportionalem HQ; Etenim GP IM : : MO. HQ. Iterum HQ × GP = HR dat parallelogrammum QHRS. Inter QH, & HG quæratur media proportionalis HT (§. 39), quæ erit novi trapezii baſis LM. Linea MO novi trapezii eſt quarta proportionalis quæſita, & inventa, quæ ſic ſe habeat ad GF, ſicut ſe habet LM ad HG (§. 49). Rurſus latus LN eſt quarta proportionalis inventa; ſicut enim ſe habet HG ad LM = HT; ita ſe habere debet HE ad novum latus LN. Denique quartum latus NO eſt quarta proportionalis ad GH, LM, & EF; nam GH. LM : : EF. NO. Habebitur itaque novum Trapezium LNOM ex trianguli ABC, & alterius trapezii HEFG additione conflatum. Q. E. F.

## PROBLEMA V.

Tab. IX. Fig. 162. §. 308. *PEntagonum irregulare* X, *&* *ellipſim* Z *addere, & exinde ſimilem majorem ellipſim, utriusque ſuperficiei æqualem efformare.*

Pentagonum irregulare X redigatur in triangulum æquale ABC (§. 331. & 329). Hoc triangulum permutetur in æquale parallelogrammum ADEC (§. 328). Inter hujus parallelogrammi majus latus AC, & minus latus CE quæratur media pro-

proportionalis FG (§. 39). fiatque quadratum FGHI. Ex hoc quadrato fiat circulus æqualis, cujus diameter sit MN. (§. 338) hic circulus erit æqualis pentagono X. Iterum duarum diametrorum ellipseos OP, & QR quæratur media proportionalis ST (§. 39). ST erit diameter circuli æqualis ipsi ellipsi PQOR. Diametrus prioris circuli MN, & posterioris ST conjungantur ad angulum rectum, & erit NT, nempe hypothenusa trianguli SNT, diametrus circuli, duos priores circulos continentis (§. 269). Jam duæ diametri novæ ellipseos nempe MN, & UW sunt duæ quartæ proportionales, quæ sic reperiuntur: sicut se habet ST ad NT; ita se habet OP ad MN (§. 40). & iterum: sicut se habet ST ad NT; ita se habet QR ad UW. Itaque MN, & UW sunt duæ diametri novæ ellipseos, ex additione pentagoni X, & ellipseos Z consurgentis. Q. E. F.

## PROBLEMATA SUBTRACTIONIS.

QUoniam Subtractio proba est additionis bene peractæ, in ea tractanda, inverso ad additionem modo atque ordine proceditur.

### PROBLEMA VI.

§. 309. *TRiangulum æquilaterum subtrahere ab alio triangulo æquilatero majore, atque ex residuo rursus triangulum æquilaterum producere.*

Conformiter regulis (§. 222.) traditis, latus majoris trianguli constituatur pro hypothenusa; latus autem minoris trianguli subtrahendi ponatur vel pro basi, vel pro catheto trianguli rectanguli: Tertium residuum trianguli rectanguli latus, dabit tertio triangulo æquilatero latus (§. 269).

### PROBLEMA VII.

§. 310. *TRiangulum scalenum* ABC, *cujus perpendicularis* CN *sit 12 pedum, subtrahere ab altero triangulo scaleno* DEF, *cu-* Tab. IX. Fig. 163.

*jus altitudo* EM *sit 18 pedum; atque ex residuo rursus triangulum scalenum formare, cujus perpendicularis sit 9 pedum.*

Triangulum ABC reducatur ad altitudinem 18 pedum, ita tamen ut ACB = ROB (§. 330.) Basis RB subtrahatur a triangulo DEF, remanebitque triangulum DEG. Hoc triangulum residuum DEG reducatur ad altitudinem 9 pedum DHS (§. 330), & exhibebitur triangulum DHF æquale ipsi DEG. Q. E. F.

## PROBLEMA VIII.

Tab. IX. Fig. 164. §. 311. *PEntagonum* Z *subtrahere a pentagono majori* R, *ut ex residuo hexagonum regulare formetur.*

Super latere OP majoris pentagoni R constituatur semicirculus; tum latus EF minoris pentagoni Z transferatur ex O in L, eritque residuum latus LP trianguli rectanguli, super quo latere LP construatur pentagonum regulare K; hoc complectetur spatium ex majori pentagono R, residuum pro construendo hexagono. Ex hoc pentagono K fiat æquale parallelogrammum PCED (§. 335). Porro formetur magnitudinis arbitrariæ hexagonum regulare Q, hocque in æquale parallelogrammum LMTS redigatur (§. 334). Jam quæratur quarta proportionalis MV (§. 40), ad quam sic se habeat PC, sicut se habet MT ad CE. parallelogrammum MUXT = PCED, & per consequens MUXT erit etiam æquale residuo pentagono K. Tandem inter LM, & MU quæratur media proportionalis AB (§. 39). quæ erit latus quæsiti hexagoni regularis X, æqualis ipsi residuo pentagono K. Q. E. F.

## PROBLEMA IX.

Tab. IX. Fig. 161. §. 312. *TRapezium* HEFG *ab altero majori, & consimili Trapezio* LNOM *subtrahere, ita ut residuum referat figuram trianguli, altitudinis* BZ.

Am-

Ambo trapezia transformentur in æqualia triangula (§. 329). Duo rursus illa triangula reducantur ad altitudinem eandem, eam nempe, quæ est minoris trianguli. Basis minoris dematur a basi trianguli majoris, atque triangulum illud, quod post subtractionem remanebit, coordinetur in æquale parallelogrammum (§. 328). Habito hoc parallelogrammo quæratur quarta proportionalis, nempe basis trianguli AC, quæ sic se habeat ad basim inventi parallelogrammi, sicut se habet media altitudo determinata BZ trianguli ABC ad altitudinem mox dicti parallelogrammi. Itaque cognita basi AC, & altitudine BZ facilis operæ fuerit triangulum ABC construere.

## PROBLEMA X.

§. 313. *Pentagonum irregulare* X *ab ellipsi* Y *subtrahere, atque ex eo, quod remanet, rursus ellipsim* Z *formare, quæ similis sit majori ellipsi* Y. *Tab. IX. Fig. 162.*

Ellipsis Y commutetur in æqualem circulum, cujus diametrus sit TN. Fit hoc per inventam mediam proportionalem TN inter MN, & UW (§. 39). Iterum ex irregulari pentagono X fiat æquale triangulum ABC (§. 331, & 329). Ex æquali hoc triangulo ABC fiat rursus æquale parallelogrammum ADEC (§. 328), atque ex hoc tandem parallelogrammo ADEC æquale quadratum IHGF, (§. 337). hoc quadratum redigatur in æqualem circulum (§. 338), cujus diameter sit MN. Hæc diametrus MN = SN assumpta pro basi, reliquum faciet latus ST; ita ut circulus diametri ST, & circulus diametri SN sint æquales circulo diametri TN (§. 269). Quod si itaque duplex quarta proportionalis inveniatur, nempe OP; quæ sic se habeat ad MN, sicut se habet ST ad TN: & QR, quæ sic se habeat ad UW, sicut se habet ST ad TN, habetur utraque diametrus ellipseos inveniendæ Z, nempe OP, & QR, quæ ellipsis Z non tantum æqualis sit spatio residuo post subtractionem trapezii X ab ellipsi Y, sed insuper majori ellipsi Y sit similis. Q. E. F.

# PROBLEMATA MULTIPLICATIONIS.

## PROBLEMA XI.

Tab. IX. Fig. 165. §. 314. *Triangulum ABC, cujus altitudo BE, & distantia perpendicularis ab altero angulorum AE, quadruplo majus reddere, servata tamen similitudine cum triangulo minori.*

Basis AC in recta linea quater continuetur usque in 4; tum inter AC, & C4 quæratur media proportionalis CK (§. 39). quæ erit basis trianguli quadruplo majoris CFK. Novi hujus trianguli multiplicati linea perpendicularis FR est quarta proportionalis, quæ sic se habere debet ad perpendicularem BE, sicut se habet basis CK ad basim AC. Denique distantia perpendicularis lineæ ab altero angulorum, nempe CR est pariter quarta proportionalis, quæ sic se habet ad AE, sicut se habet CK ad AC. Quibus cognitis pronum est construere triangulum CFK, quadruplo majus, quam sit triangulum ABC, simile tamen minori ABC. Q. E. F.

## SCHOLION.

Tab. ead. §. 315. Quodsi circulum, aut quadratum multiplicare sit animus v. g. quater: valeat AC diametrum multiplicandi circuli, aut latus quadrati, erit media proportionalis CK diametrus circuli quater multiplicati, aut latus quadrati, itidem quater multiplicati. Quod si vero quadratum MOSN ita multiplicandum foret, ut sit bis, & duabus tertiis majus; tum media proportionalis inter MN, & N $\frac{2}{3}$ nempe XN dabit latus quadrato, toties multiplicato.

Fig. 166.

## PROBLEMA XII.

Tab. IX. Fig. 167. §. 316. *Triangulum HIK sic multiplicare, ut servata altitudine IL novum multiplicatum se habeat ad illud, ut 5 ad 3.*

Ponatur basis arbitraria ST in tres partes itidem arbitrarias, attamen æquales divisa; Item assumatur altera basis

MN,

MN, in 5 ejuscemodi æquales partes divisa: Tum quæratur quarta proportionalis XZ, quæ sic se habeat ad MN, sicut se habet HK ad ST (§. 40). Hæc quarta proportionalis XZ erit basis trianguli multiplicati XIZ, habentis se ad HIK, ut 5 ad 3; sic quippe se habent superficies triangulorum ejusdem altitudinis, ut bases (§. 90).

## PROBLEMA XIII.

§. 317. *IRregulare pentagonum A quinquies, & dimidio multiplicare, ut rursus simile pentagonum, nempe B prodeat.* Tab. IX. Fig. 168.

Basis CL continuetur quinquies, & $\frac{1}{2}$; tum inter CL, & L $\frac{1}{2}$ quæratur media proportionalis LK (§. 39). Hæc media proportionalis erit basis toties multiplicati pentagoni. Porro inquiratur in latus KS, & LS; primum erit quarta proportionalis, quæ sic se habeat ad LN minoris pentagoni, sicut se habet LK ad CL: alterum nempe LS erit pariter quarta proportionalis, quæ sic se habet ad CN, sicut se habet LK ad CL. Habitis itaque tribus lateribus LK, KS, & LS fiat primum pentagoni majoris triangulum LSK (§. 105). Hac eadem ratione inveniuntur cæteræ lineæ pentagoni B, quæ nihil aliud sunt, quam meræ quartæ proportionales.

## PROBLEMA XIV.

§. 318. *HEptagonum irregulare X $1\frac{2}{3}$ multiplicare, ut tamen heptagonum majus Z proveniens sit simile heptagono X.* Tab. IX. Fig. 169.

Inter basim AG, & G $\frac{2}{3}$ quæratur media proportionalis GL (§. 39). Reliquæ lineæ veluti LP, PO &c. nihil aliud sunt, quam quartæ proportionales v. g. AG. GL : : GF. LP. iterum AG. GL : : GE. LO &c.

## COROLLARIUM.

§. 319. DE multiplicatione quarumcunque figurarum regularium beneficio circini proportionalis vide (§. 224)

## PROBLEMATA DIVISIONIS.

SEquentes Propositiones fiunt inverso ad multiplicationem ordine; Divisio quippe proba est, seu reductio factæ multiplicationis.

## PROBLEMA XV.

Tab. IX. Fig. 165. §. 320. *TRiangulum* CFK *per* 4. *sic dividere, ut quarta illius superficiei pars rursus consimile triangulum* ABC *exhibeat.*

Trianguli dividundi CFK basis CK in quatuor æquales partes dividatur; Inter has quatuor partes, & unam ejuscemodi partem quæratur media proportionalis AC (§. 39.) Hæc media proportionalis AC. erit basis novi trianguli ABC. Quarta proportionalis ad CK, AC, FR erit BE, nova nempe perpendicularis. Tandem quarta itidem proportionalis ad CK, AC, CR erit AE nova distantia perpendicularis lineæ ab alterutro angulorum. Itaque si ex A in B, ex B in C rectæ ducantur, habebitur triangulum ABG, ceu *quotum*, ex divisione trianguli similis majoris CFK. Q.E.F.

## SCHOLION.

§. 321. COnsimili methodo dividuntur circuli, aut quadrata; sit enim circulus, aut quadratum per 3 aut $4\frac{1}{2}$ dividendum, quæratur inter 1 & 3 vel $4\frac{1}{2}$ media proportionalis (§. 39); hæc inventa dabit diametrum circuli, aut quadrati latus, habetque se permodum numeri *quoti*.

## PROBLEMA XVI.

Tab. IX. Fig. 168. §. 322. *PEntagonum irregulare* B *per* $5\frac{1}{2}$ *ita dividere, ut ex quoto rursus consimile pentagonum* A *consurgat.*

Juxta numerum divisoris dividatur basis LK in $5\frac{1}{2}$ partes æquales, atque inter 1, & $5\frac{1}{2}$ quæratur media proportionalis CL (§. 39.) hæc erit basis novi pentagoni A. Tum quærantur duo latera NL, & NC, quæ sunt duæ quartæ propor-

proportionales, habetque se NL ad SK, & NC ad SL sicut se habet CL ad LK. Aliæ lineæ, ceu quartæ proportionales inventæ, dabunt pentagonum quæsitum A.

## PROBLEMA XVII.

§. 323. *HEptagonum irregulare Z per $1\frac{2}{3}$ dividere, ut figura quota X prorsus similis sit figuræ divisæ, nempe pentagono. Z.* *Tab. IX. Fig. 169.*

Heptagoni irregularis Z basis GL juxta exigentiam numeri divisoris $1\frac{2}{3}$, in quinque æquales partes redigatur. Tum inter 1, & $1\frac{2}{3}$, seu inter 3, & 5 quæratur media proportionalis AG, tanquam basis heptagoni novi X ex divisione enascentis. Aliæ lineæ minoris heptagoni X sunt perpetuæ quartæ proportionales, veluti GL. AG : : LP. GF : iterum GL. AG : : LO. GE &c.

§. 324. REgulæ quoque *Proportionis* usus non inidoneus in Epipedometria esse potest, quod sequenti propositione fit palam.

## PROBLEMA XVIII.

§. 325. *Sit datum triangulum, & paulisper minus datum pentagonum, debeatque tertia aliqua triangularis figura inveniri, quæ sic se habeat ad pentagonum, sicut pentagonum se habet ad primum datum triangulum.*

Pentagonum reducatur ad formam trianguli, ejusdem cum primo dato triangulo altitudinis (§. 333); Et quoniam triangula ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 90.) quæratur ad basim primi dati trianguli, & secundi, e pentagono formati, linea tertia continuo proportionalis (§. 38.) hæc dabit basim triangulo ejusdem altitudinis, & habenti se ad pentagonum, quemadmodum pentagonum proportionaliter se habet ad primum datum triangulum.

Cæ-

Cæterorum Problematum reſolutio ex allatis abunde elucebit. Jam ad ultimam Epipedometriæ ſpeciem accedamus.

# CAPUT IX.

## De Metamorphoſi Superficierum.

§. 326. *Metamorphoſis* ſeu *transformatio* figurarum eo reſpicit, ut, ſi fortaſſe ſuperficies quæpiam inidonea ſit, ea in alterius figuræ ſuperficiem priori omnino æqualem commutari queat. In Phyſica certo, areæ illæ, quæ a motis in linea curva circa centrum aliquod corporibus deſcribuntur æqualibus temporibus, æquales inter ſe eſſe demonſtrantur a clariſſimo Neutono, quamvis inter ſe ſint valde diſſimiles. Transfigurationum ejuscemodi præcipua problemata afferemus.

### PROBLEMA I.

*Tab. IX. Fig. 170.* §. 327. *Triangulum ſcalenum* ABC *ad æqualem Iſoſcelem* AGC *reducere.*

Ad ſummitatem B ducatur recta DE, parallela ipſi AC (§. 9.) Ad extremitates baſeos AC erigantur duæ perpendiculares AD, CE (§. 28, & 29.) habebitur parallelogrammum ADEC, duplum inſcripti trianguli, aut per diagonalem ſeparati (§. 182.) Linea DE dividatur in duas æquales partes in G, atque ex G ducantur rectæ in A, & C, habebiturque Iſoſceles AGC, æqualis ſcaleno ABC (§. 91.) Q. E. F.

### PROBLEMA II.

*Tab. IX. Fig. 171.* §. 328. *Ex triangulo rectangulo iſoſcele* FRS *parare æquale rectangulum parallelogrammum* FMNS.

Ex

Ex R in O demittatur perpendicularis R O; hæc perpendicularis in duas æquales partes dividatur in C. Per C ducatur recta MN, parallela ipsi FS, atque ex F, & S erigantur perpendiculares FM, & SN, erit parallelogrammum FMNS æquale triangulo FRS.

Nam FTM = TCR (§. 89.): igitur & FMCO = FRO, & FMNS = FRS; Trianguli quippe cujuscunque basis, per medium altitudinis multiplicata, parallelogrammum dat triangulo æquale: sicut basis eadem trianguli per totam altitudinem multiplicata fit parallelogrammum duplum ipsi triangulo dato (§. 169.)

## PROBLEMA III.

§. 329. *Figuram quadrilateram irregularem* ABCD *permutare in triangulum ejusdem superficiei* ABE. *Tab. X. Fig. 172.*

Ducatur primum recta ex B in D; mox lineæ huic rectæ ducatur parallela ex C, quæ in E cum linea prolongata AD concurrat in E. Denique fiat diagnoalis BE, & habebitur triangulum ABE = ipsi quadrilatero ABCD.

Nam DCE = BDC, & DBE = BEC (§. 169.) Item BMD = EMC, & BMC = DME: igitur, & DBE = BDC, & ABE = ABCD. Q. E. D.

## SCHOLION.

§. 330. EAdem prorsus ratione triangula ad majorem altitudinem efferuntur, manente æquali superficie. Sit v. g. triangulum ABD ad altitudinem F provehendum: Ex puncto F ducatur recta in A, ut sit FA; huic lineæ ducatur ex B parallela in G, ac tandem ex F fiat diagonalis in G, & erit GFD = ABD. *Fig. ead.*

## PROBLEMA IV.

Tab. X. Fig. 173. §. 331. *Figuram pentagonam irregularem* ABCDE *in quadrilateram itidem irregularem* KBCD *permutare, manente æquali superficie.*

Ex B in E ducatur linea recta BE; huic rectæ ducatur parallela KA, quæ in K cum prolongata linea DE concurrat; tum ducatur diagonalis BK: Itaque quia triangulum AEB æquale est triangulo KBE (§. 91.) habent enim basim BE communem, & eandem inter duas parallelas BE, & AK altitudinem; substituendo triangulum BKE loco trianguli BAE, quadrilatera figura KBCD erit ejusdem superficiei, cujus est pentagonum ABCDE.

## PROBLEMA V.

Tab. X. Fig. 174. §. 332. *Hexagonum regulare* ABCDEF *in æquale triangulum* MNS *permutare.*

Ex centro O demittatur perpendicularis in latus AF, quæ illud in G secet in duas partes æquales. Tum in linea recta MS omnia sex latera hexagoni recto ordine constituantur, ac tandem in M erigatur perpendicularis MN = OG, eritque triangulum MNS dato hexagono ABCDEF æquale.

Nam superficies dati hexagoni æquivalet sex æqualibus, similibusque triangulis AOF, FOE &c. triangula autem hæc omnia æqualia sunt triangulo MNS; nam omnia sex triangula sunt ejusdem altitudinis OG, habentque æquales bases AB, BC &c. triangula autem ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 90): igitur cum triangulum MNS bases omnium sex triangulorum contineat in communi altitudine OG, erit triangulum MNS æquale sex triangulis hexagoni, seu ipsi hexagono ABCDEF, Q.E.D.

SCHO-

## SCHOLION.

§. 333. HAc ratione pentagonum, & aliud quodcunque polygonum regulare reducitur ad triangulum æquale. v. g. quia trianguli Z basis F G æqualis est quinque lateribus pentagoni X, tanquam totidem triangulorum basibus; & quia altitudo E F trianguli Z æqualis est A B altitudini quinque triangulorum pentagoni X: igitur pentagonum X æquale triangulo Z. *Tab. X. Fig. 175.*

## PROBLEMA VI.

§. 334. *HExagonum regulare* A B C D E F *immutare in æquale parallelogrammum* A F H G. *Tab. X. Fig. 174.*

Ex centro hexagoni O demittatur perpendicularis O G, quæ latus A F in medio G secet. Item in extremitatibus A F demittantur perpendiculares A G, & F H. Ad has perpendiculares transferatur ter linea perpendicularis O G, exinde consurget parallelogrammum G A F H æquale dato hexagono A B C D E F.

Etenim ob æqualem basim, & eandem altitudinem triangulum A K F = A O F (§. 89.) Rursus triangulum K F Z = G K F, & K A U = A K G; & iterum U A K = N A O, & Z F K = O F T: igitur parallelogrammum U A F Z = A N T F, aut Rhombo A O E F, nempe duobus triangulis hexagoni: consequenter cum unum parallelogrammum U A F Z æquale sit duobus triangulis hexagoni, & hexagonum sex æqualia triangula complectatur, erit triplum parallelogrammum, seu G A F H æquale omnibus sex triangulis seu toti hexagono A B C D E F. Q. E. D.

## PROBLEMA. VII.

§. 335. *PEntagonum regulare* X *reducere ad æquale parallelogrammum* H C D I. *Tab. X. Fig. 175.*

Ex centro A demittatur perpendicularis in latus C D, quæ illud in B ſecet in duas partes æquales. In extremitatibus C D demittantur quoque duæ perpendiculares C H, & D I, in his notetur dupla perpendicularis, & media B N. Itaque parallelogrammum H C D I erit æquale toti dato pentagono X.

Nam parallelogrammum M C D O = duobus pentagoni triangulis C A D, & D A F; pentagonum autem quinque æqualia triangula continet: Igitur ſemitertium parallelogrammum æquale erit toti pentagono dato.

## SCHOLION.

§. 336. ALia ratione paratur æquale parallelogrammum ex pentagono, vel hexagono; cum nempe juxta præcedentia problemata in triangula convertuntur, ac tandem triangula illa commutantur in parallelogrammum.

## PROBLEMA VIII.

*Tab. X. Fig. 176.* §. 337. *EX Parallelogrammo* A *formare æquale quadratum* B.

Inter C D, & D E quæratur media proportionalis F G. (§. 39.) hæc media proportionalis erit latus quæſiti quadrati.

## PROBLEMA IX.

*Tab. X. Fig. 177.* §. 338. *QUadratum* A B C D *in æqualem circulum permutare.*

Quadrati diagonalem B D partire in Decem partes æquales. Tum conſtituatur circini pes in medio X, ac deſcribatur circulus F G N M hac ratione, ut ultima pars utriusque extremitatis in diagonali B D excludatur, & diametrus circuli 8 partes duntaxat contineat; fiet, ut deſcriptus Circulus F G N M phyſice quidem æqualis proxime ſit dato quadrato. Itaque diagonalis quadrati ſe habebit ad diametrum circuli ut 10 ad 8 vel 5 ad 4.

## SCHOLION I.

§. 339. ALii dicunt latus quadrati ſe proxime habere ad circuli diametrum ut 23 ad 26. Quod ſi igitur circulum in quadratum permutare oporteat, dividatur circuli diametrus in 26 partes æquales, harum partium 23 conſtituantur pro latere quadrati, eritque quadratum dato circulo proxime æquale.

## SCHOLION II.

§. 340. ASt vero, circuli quadratura, quæ mathematicum rigorem ſuſtineat, hodiedum in multorum votis eſt. Nequiit autem hactenus reperiri: quia nempe peripheriæ circuli linea mathematice æqualis reperta non eſt (§. 253); Etenim ſint circulo CFAEDB ſex triangula inſcripta, poterunt utique illi triangulo plura, & minora triangula in infinitum inſcribi, ita ut circulus conſiderari poſſit tanquam infinita triangula, quæ aream circuli prope adæquent; Hæc porro infinita triangula efficient polygonum regulare infinitorum laterum, quemadmodum ſex triangula efficiunt regulare hexagonum. Jam vero cum in hexagono CFAEDB altitudo GX aſſumpta pro catheto, & baſes triangulorum CF, FA &c. ſeu perimeter hexagoni aſſumptus pro baſi, triangulum æquale efficiant; etiam in infinitis ejuscemodi triangulis, circulo inſcriptis, ſeu in polygono infinitorum laterum id evenire deberet: Attamen, utut altitudo GX, quo plura, & minora etiam in infinitum circulo triangula inſcribantur, ſemper major fit, & infinite parvo ſpatio differt a radio GB, nunquam id obtinere licebit, etiam in infinitis inſcriptis lateribus, ut latus ſeu baſis BXD æqualis fiat arcui BD, & per conſequens; ut omnia latera ſint æqualia mathematice circuli peripheriæ. *Ta. VIII. Fig. 151.*

## PROBLEMA X.

§. 341. *EX Ellipſi æqualem circulum formare.*

Inter utramque ellipſeos diametrum quæratur

 me-

media proportionalis; hæc media proportionalis erit diametrus circuli, datæ ellipsi æqualis; Media quippe proportionalis tanto brevior est diametro longiore ellipseos, quanto est longior diametro breviore ejusdem ellipseos.

## PROBLEMA XI.

Tab. X. Fig. 178. §. 342. *Triplex conjunctum quadratum* ABCDEFGH *in quatuor similes partes secernere.*

Singula quadrata in quatuor æquales partes dispescantur, ut sint numero 12 partes, quæ utique in quatour æquales dividi possint. Separentur hæ partes ab invicem juxta adnotata signa $=$, & deprehendentur quatuor partes enatæ, quarum omnes similes, & æquales inter se sint, & etiam similes toti diviso.

# CAPUT X.

## De Stereometria seu Solidorum Dimensione.

## DEFINITIONES.

§. 343. Solidorum aliud est, quod *planis*; aliud quod *curvis*; aliud denique quod *mixtis* undique superficiebus includitur.

§. 344. Plani solidi rursus plures sunt species, nempe *regulare*, & *irregulare*. *Solida* regularia plana sunt quinque. *Tetraëdon*, quod quatuor triangulis æqualibus atque æquilateris comprehenditur. *Hexaëdron*, quod sex quadratis æqualibus undique concluditur, diciturque etiam alias *cubus*. *Octoëdron*, quod rursus octo æqualibus similibusque triangulis continetur. *Dodecaëdron*, quod circumdatur duodecim regularibus, & æqualibus pentagonis. *Icosaëdron*, quod continetur viginti æqualibus similibusque triangulis. Quæ omnia in figuris mox exhibebuntur.

§. 344.

§. 344. AD ſolida recta corpora ſequentia referuntur: *Priſma*, quod eſt corpus, cujus ſuprema, & infima ſuperficies æquales ſunt, & parallelæ, & deſcendentia latera pariter parallela. Quod ſi ſuperior, & inferior ſuperficies *trigoni* figuram habuerint, vocabitur *priſma triangulare*, quod præcipue in Neutoniana colorum theoria, variisque experimentis uſum præbet: *Quadrangulare* vero priſma vocatur, cum ſuperior, & inferior ſuperficies figura eſt quadrilatera. *Parallelepipedum*, ſeu corpus, ſex parallelogrammis undique concluſum, quorum duo oppoſita, & parallela, & ſimilia & æqualia ſunt. *Pyramis*, quæ ex baſi in acumen aſcendit, & vel tribus, vel quatuor, aut etiam pluribus lateribus conſtringitur. *Pyramis truncata* dicitur ea, quæ ſuperiorem acuminatam partem demptam habet.

§. 345. AD curvorum corporum claſſem referuntur: *Sphæra*, corpus ſolidum, cujus omnia peripheriæ puncta a centro æqualiter diſtant. *Sphæroides* eſt corpus ad ſphæræ ſimilitudinem accedens, niſi quod ad axes paulo ſit depreſſior; talis potiſſimum tribuitur figura telluri. *Cylindrus* corpus oblongum, cujus latera circulis concluduntur. *Conus* ex baſi circulari in acumen conſurgens. *Conus truncatus* eſt, cui vertex eſt ademptus. *Conoides* eſt corpus, circulum pro baſi habens, tum aliquo ſpatio aſcendens velut conus, non tamen in cuſpidem deſinens, ſed loco cuſpidis apicem ſphæriformem habens.

§. 346. IRregularium ſolidorum infinita eſt ſeries; exprimuntur autem in plano adhibitione umbræ, quæ umbra mentem ad intelligendam triplicem in longum, latum, & profundum extenſionem manuducat. Corpora hæc omnia, ſeu *plana*, ſeu *curva*, cum aut ſecantur, aut ſibi mutuo imponuntur, variam ſuperficierum habitudinem, & configurationem præſeferunt; curva, & præſertim conus planis & difficiliorem, & variabiliorem. De *Sectionibus conicis* infra *Cap.* XV. agetur: de *curvis ſupra curvis Cl.* Clairaut admirabile monumentum procudit, eruditis veterum temporibus deſideratum.

PRO-

## PROPOSITIO I.

Tab. X. Fig. 179. §. 347. *Tetraëdron in plano describere.*

Formetur triangulum æquilaterum GEF, atque ex ejus centro D ducantur rectæ ad singulos angulos, nempe DG, DE, DF; habebitur *tetraëdron*, quod tres tantum bases, seu rectas superficies trilateras conspectui exhibeat.

## COROLLARIUM.

Tab. X. Fig. 180. §. 348. Quodsi rete pro tetraëdro describere sit animus, ut vel ex charta, vel opportuno ligno ejuscemodi tetraëdron construatur; delineetur primo triangulum æquilaterum ABC (§. 103). Super singulis ejus lateribus formentur triangula prorsus æqualia ACD, BCE, FAB. Si itaque hoc rete ita complicatum fuerit, ut F, E, D in uno puncto concurrant, habebitur tetraëdron.

## PROPOSITIO II.

Tab. X. Fig. 181. §. 349. *Hexaëdron, seu cubum in plano delineare.*

Describatur primum rhombus ABCD (§.200). Tum juxta latus AD describatur quadratum ADFE (§. 197). Adjungatur rhombus FDCG, eritque delineatum hexaëdron, cujus tres duntaxat superficies sint conspicuæ.

## SCHOLION.

Tab. X. Fig. 182. §. 350. *Parallelepipedum* eadem ferme ratione describitur, nisi quod loco rhombi adhibeatur rhomboides; fiat itaque rhomboides CGHD (§. 201); Tum ad latus CD describatur parallelogrammum CDBA (§. 198). adjungatur BDHF = CGEA, eritque parallelepipedum descriptum.

## COROLLARIUM I.

Tab. X. Fig. 183. §. 351. Rete pro constituendo *cubo*, seu *hexaëdro* sic paratur: describitur quadratum ACDB (§. 197). Singulis hujus

hujus quadrati lateribus adjungantur alia ſimilia quadrata; uni autem lateri nempe AC duplex ejuscemodi quadratum adjungatur, nempe ACFE = EFHG, eritque hexaëdri rete deſcriptum.

## COROLLARIUM II.

§. 352. PArallelepipedi rete ſic inſtitue: deſcripto parallelogrammo tanquam baſe parallelepipedi ABDC (§. 198), adjunge ſingulis lateribus competentia parallelogramma ejusdem altitudinis, nempe: AIKB, BLMD, CDFE, HACG, quæ altitudinem parallelepipedi conſtituant. Denique ad latus LM applicetur parallelogrammum LNOM = ipſi ABDC, habebiturque rete *parallelepipedi* deſcriptum. Tab. X. Fig. 184.

## PROPOSITIO III.

§. 353. *Parallelepipedum* HAED *per planum diagonale* ABDC *dividitur in duo priſmata inter ſe æqualia.* Tab. X. Fig. 185.

Nam duo parallelogramma GAEB, & HCFD dividuntur per duplicem diagonalem AB, & CD in duo triangula æqualia (§. 169): ergo cum priſmata ABE, HCD præter æquales baſes etiam æqualem altitudinem habeant, omniaque eorum latera parallelis circumcludantur (§. 344), erunt etiam æqualia inter ſe. Q. E. D.

## PROPOSITIO IV.

§. 354. *Octoëdron in plano delineare.* Tab. X. Fig. 186.

Fiat quadratum ABCD (§. 197). atque ex ejus centro E ducantur rectæ ad quatuor angulos A, B, C, D, ut videantur plana triangularia latera, ex puncto E tanquam elatiori, verſus extima latera deſcendere, & erit deſcriptum Octoëdron, cujus quatuor tantummodo latera ſint viſibilia, quatuor autem ſint averſa.

## COROLLARIUM.

*Tab. X. Fig. 187.* §. 355. REte pro octoëdro ſic deſcribitur: formatur triangulum ABC (§. 103.) Singulis hujus trianguli lateribus æquilatera triangula adjungantur, eritque FED ſimile ABC. CD protrahatur in I, formeturque triangulum DIH = ADC; ſingulis trianguli HID lateribus æquilatera triangula adjungantur, habebiturque rete deſcriptum, ex quo opportune complicato *octoëdron* conſtruere liceat.

*Tab. X. Fig. 188. & 89.* §. 356. AD deſcribendum in plano *dodecaëdron*, & *Icoſaëdron* nihil attinet longas præceptiones afferre, cum harum configuratio in tabulis luculente exhibeatur.

## COROLLARIUM I.

*Tab. X. Fig. 190.* §. 357. *D*Odecaëdri rete deſcribitur, cum pentagonum ABC DE primo delineatur (§. 202). & ſingulis his pentagoni lateribus alia æqualia, & conſimilia Pentagona adjiciuntur; erunt itaque ſex pentagona, medium dodecaëdri involucrum; itaque ut duodecim ejuscemodi pentagona habeantur, adjunge lateri FG ſtructuram conſimilem ſex iſtiusmodi pentagonorum, eritque rete delineatum, ex quo complicato *dodecaëdron* conſurgat.

## COROLLARIUM II.

*Tab. X. Fig. 191.* §. 358. REte pro conſtruendo *Icoſaëdro* delineatur, cum ſuper linea recta AB quinque æquilatera triangula deſcribuntur; ſuper horum triangulorum vertices ducatur linea CD, atque ſuper ea rurſus deſcribantur quinque æquilatera triangula, æqualia prioribus; Tandem lineæ AB in inferiori parte quinque ejuscemodi triangula adſcribantur, & habebitur rete viginti triangulorum æquilaterorum, ex quo complicato *Icoſaëdron* conſurgat.

PRO-

## PROPOSITIO V.

§. 359. *NEque plura, neque pauciora corpora regularia angularia esse possunt, quam quinque, nempe tetraëdron, hexaëdron, octoëdron, dodecaëdron, & Icosaëdron.*

Corpus regulare constituitur ex concurrentibus planorum angulis; hi autem anguli debent necessario pauciores gradus constituere, quam 360; quia nempe 360 gradus circa aliquod centrum non jam corpus, sed planam superficiem describent (§. 234). Igitur fingamus tres triangulares planas areas ad solidum constituendum concurrere, veluti in tetraëdro (§. 347). Singuli triangulorum æquilaterorum anguli sunt 60 graduum (§. 196); cumque tres ejuscemodi anguli conjuncti universim tantum 180 gradus efficiant, erunt apti ad solidum componendum. In *octoëdro* quatuor areæ triangulares, seu quatuor triangulorum anguli ad compositionem concurrunt (§. 354); quatuor autem illi anguli gradus 240 complectuntur, quod sane minus est gradibus 360. In *Icosaëdro* constituendo quinque anguli triangulorum concurrunt (§. 356); qui anguli, cum gradus duntaxat 300 contineant, apti sunt ad solidum componendum. Verum sex ejuscemodi anguli solidum jam componere nequeunt, quia concurrentes efficiunt gradus 360, id est superficiem planam (§. 234). Ad compositionem *hexaëdri*, seu *cubi* concurrunt tres anguli quadrati (§. 349); angulus autem quadrati extenditur ad sinum totum, seu 90 gradus (§. 77). & tres ejuscemodi anguli universim conficiunt 270 gradus, qui sane opportuni sunt ad solidum componendum; non item quatuor, utpote jam numerum 360 graduum adæquantes. In compositione *dodecaëdri* tres pentagonorum regularium anguli concurrunt (356); angulus autem pentagoni, utpote amblygonius, extenditur ad 108 gradus, & tres simul ad 324; quod sane minus etiam est gradibus 360: quatuor jam ad componendum solidum concurrere nequeunt, utpote ad 432 gradus excurrentes. Sexangulares areæ ad solidorum compositionem prorsus ineptæ sunt; unus enim ejuscemodi angulus cum sit 120 gra-

 duum

duum, tres compositi conficerent 360 gradus, id est, superficiem planam: Igitur corpora regularia non possunt esse nisi enumerata quinque, nempe *Tetraëdron*, *Hexaëdron*, *Octoëdron*, *Dodecaëdron*, *Icosaëdron*, quæ Corpora eo ipso etiam regularia sunt, quod singula æqualibus similibusque planis superficiebus ambiantur. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

§. 360. QUuinque hæc regularia corpora non tantum sphæræ includi, sed etiam adeo ordinate ad sphæræ superficiem coaptari possunt, ut prominentiæ omnes æque a centro sphæræ distent. Porro omnes hæ regulares figuræ tot cuspides versus centrum protrudunt, totque pyramides censeri possunt, quot facies seu planas superficies habent.

Tab. XI. Fig. 192. §. 361. PRisma in plano describitur, cum delineato triangulo parallela latera imponuntur, quæ latera rursus superne consimili, & æquali triangulo parallelo terminantur. Quod si *prisma* foret quatuor laterum, illud non differret a parallelepipedo (§. 350). Quinque aut sex laterum prismata delineantur, cum aut pentagono, aut hexagono totidem latera adinvicem parallela imponuntur.

## PROPOSITIO VI.

Tab. XI. Fig. 193. §. 362. *REte pro triangulari prismate delineare.*

Triangulum ABC primo describitur, hujus lateri AB imponitur parallelogrammum ADEB; Rursus hujus parallelogrammi lateri DE imponitur triangulum DFE = ABC. Præterea utrique longiori lateri parallelogrammi adjunguntur parallelogramma HGDA, & BEIK, eritque descriptum rete, ex quo complicato Prisma triangulare consurgat.

## PROPOSITIO VII.

Tab. XI. Fig. 192. §. 363. *PRisma est productum multiplicatæ baseos per suam altitudinem.*

Nam duæ bases ABC, DFE sunt æquales, similes,

les, & parallelæ; Latera quoque E C, F B, D A parallela constituunt. Præterea plana intermedia II, HH, GG sunt & similia, & æqualia basi: Igitur basis ABC toties repetita, quot fuerint dimensionis puncta signata per altitudinem perpendicularem, exhibebit prisma, quod erit productum baseos multiplicatæ per suam altitudinem.

## COROLLARIUM I.

§. 364. OMnis sectio *prismatis* II, HH, GG parallela ad basim ABC, est basi similis, & æqualis; formatur quippe motu ad basim ABC parallelo, inter parallela CE, B F, AD.

## COROLLARIUM II.

§. 365. PRismata, quæ æqualem basim habent, dicunt eandem inter se rationem, quam altitudines: & vicissim; *Prismata* quæ eandem habent altitudinem, habent eandem inter se rationem, quam bases.

## COROLLARIUM III.

§. 366. DEnique *Prismata* sive *recta*, sive *inclinata* sunt æqualia, si basim eandem, & altitudinem habeant; Nam *prisma inclinatum* erit quidem longius prismate recto ejusdem baseos, quemadmodum & parallelogrammum obliquum longius est parallelogrammo recto (§. 181.) sed quemadmodum parallelogrammum obliquum minus latum est parallelogrammo recto ejusdem altitudinis, ita & *prisma inclinatum*; ut proinde æqualia sint *prismata* seu *recta* seu *inclinata* ejusdem baseos, & altitudinis.

## PROPOSITIO VIII.

§. 367. *OMne quodlibet Prisma triangulare continet tres pyramides inter se æquales.* *Tab. XI. Fig. 194.*

 Sit

Sit priſma ABDFE. Triplex hujus priſmatis rectangulum nempe DC, CE, DA per triplicem diagonalem FB, FA, EB dividatur, & habebuntur tres pyramides triangulares æquales DFEB, BFAC, ABEF.

Nam DFEB = BFAC; habent quippe æqualem baſim nempe triangulum DFE = BCA, & æqualem altitudinem nempe latus DB = CF. Rurſus ABEF = DFEB, cum pariter baſim æqualem habeant, id eſt: triangulum ABE = DBE tanquam alteram medietatem rectanguli EB; altitudinem item æqualem nempe GF communem utrique; Corporum autem magnitudines, quæ ſunt æquales tertiæ cuidam magnitudini, ſunt etiam æquales inter ſe (§. 2. *Axiom.* 4). Igitur DFEB = BFAC = ABEF. Et conſequenter priſma triangulare continet tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Q. E. D.

## COROLLARIUM I.

§. 368. QUemadmodum *priſma* triangulare reſolvitur in tres *pyramides* triangulares ejusdem baſeos, & altitudinis, ita & *priſma* plurium laterum reſolvitur in pyramides tres totidem laterum; ſemper quippe pyramis tertia eſt *priſmatis* pars (§. 367.)

## COROLLARIUM II.

§. 369. SIcut triangulum, & omnis alia figura polygona in totidem triangula reſolvi poteſt, quot latera complectitur; cum nempe ex centro figuræ cujuscunque rectæ lineæ ad ſingulos angulos protenduntur (§. 195.) Ita quoque *Priſma* polygonum quodcunque in tot priſmata triangularia reſolvitur, quot latera continet.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

§. 370. *DUo Parallelepipeda similia sunt inter se in triplicata ratione laterum homologorum; seu habent se ut cubi exponentium latera homologa.*

Etenim superficies duæ similes, quæ sunt in longum, & latum extensæ, habent se in duplicata ratione laterum homologorum (§. 92.) igitur parallelepipeda similia, quæ sunt in longum, latum, & profundum extensa (§. 7.) habebunt se in triplicata ratione eorundem laterum homologorum; ita ut si parallelepipedum habeat tam longitudinem quam latitudinem, & profunditatem triplo majorem altero parallelepipedo, sit ratio exponentium 3. 1. (*Not. Algeb. Divis. Arith.*) Igitur triplicando has rationes, proveniet ratio cubi 27, 1. quæ notat alterum similium parallelepipedorum esse vigesies septies altero majus.

## COROLLARIUM.

§. 371. QUod si aliquod parallelepipedum constituatur ex multiplicatione trium linearum continuo proportionalium, erit æquale alteri parallelepipedo, quod habuerit omnia latera æqualia mediæ lineæ trium illarum proportionalium. Etenim sint 3 lineæ proportionales, *prima* 2 ped. *altera* 4 ped. *tertia* 8 ped. Primi parallelepipedi basis habeat 8 ped. longitudinis, & 2 ped. latitudinis. $8 \times 2 = 16$. altitudinem vero habeat 4 ped. Alterius parallelepipedi basis habeat & longitudinis, & latitudinis 4 ped. $4 \times 4 = 16$. (§. 215.) altitudinis vero pariter 4. pedes. Igitur cum parallelepipeda, quæ, & basim æqualem, & æqualem altitudinem habent, æqualia sint (§. 365.) erunt dicta duo parallelepipeda omnino inter se æqualia.

§. 372. *PYramis* in plano delineatur, cum primo triangulum ABC describitur (§. 103.) tum vero ad punctum D arbitrariæ altitudinis rectæ ducuntur ex singulis angulis A, B, C, & habetur *Pyramis* delineata. Tab. XI. Fig. 195.

§. 373.

Tab. XI. Fig. 196. §. 373. *Conus* eadem prope ratione delineatur: describitur primo circulus ABCD, ex hujus centro O ad arbitrariam altitudinem usque in punctum E erigitur perpendicularis OE (§. 24.) atque ad hoc punctum E ex A, & C rectæ ducuntur, habeturque descriptus *conus*.

§. 374. Quemadmodum basis *pyramidis* triangularis est triangulum, ita quadrangularis aut sexangularis est quadratum aut hexagonum &c. quæ tamen latera omnia in uno puncto verticis secundum rectas lineas concurrunt. Quo autem basis pyramidalis plures angulos habuerit, eo figura pyramidalis ad conicam propius accedet. (§. 272. & 274.)

§. 375. Altitudo tam *pyramidis* quam *coni* desumitur non ex laterum longitudine, sed ex recta, a vertice in centrum baseos O demissa. Cum linea recte ex vertice in basim descendens basi perpendicularis est, tum *pyramis* aut *conus* est rectus; obliquus autem, cum linea illa descendens basi non est perpendicularis.

§. 376. Quod de *pyramide* dictum est (§. 368); esse nempe tertiam partem prismatis ejusdem baseos, ejusdemque altitudinis, id quoque de *cono* intelligi debet: eum nempe pariter esse tertiam cylindri partem; Quemadmodum enim circulus nihil est aliud, quam polygonum regulare infinitorum laterum (§. 340): ita quoque *cylindrus* est prisma infinitorum laterum, & *conus* pyramis laterum infinitorum.

## PROPOSITIO X.

Tab. XI. Fig. 197. §. 377. *Rete describere pro pyramide quinque angulorum.*

Describatur pentagonum ABDEC tanquam basis (§. 281.) ex puncto O mediæ lineæ AB erigatur perpendicularis OF ad arbitrariam altitudinem, atque ex F ducatur arcus GOK; In hunc arcum quinque latera pentagoni transferantur

tur nempe GH, HA, AB, BI, IK, eritque pyramidis rete descriptum.

§. 378. HAc eadem methodo rete pro *cono* describitur: Ex centro A fit circulus BCDE. Diametrus circuli DB dividitur in 7 partes æquales; atque ex centro A ad arbitrariam distantiam recta protenditur in G. Ex G, tanquam centro, ducatur arcus HK, & in hunc arcum 22 partes, æquales 7 partibus diametri, abscindantur, eritque rete *coni* paratum. *Tab. XI. Fig. 198.*

## PROPOSITIO XI.

§. 379. *CYlindrum in plano, ejusdemque rete describere.* *Tab. XI.*
Duo circuli ABCD, & EFGH æquales, & paralleli describuntur, & lateribus AE, & GC copulantur; Ita est descriptus *cylinder*. *Fig. 199.*

§. 380. UT vero fiat rete cylindri; intra duos circulos AB CD, & EHFG interponitur spatium arbitrarium AE, quod *cylindri* altitudinem notet. Ad punctum A, & E erigantur perpendiculares AM, EL, quæ sic se habeant ad diametrum utriusque circuli, ut 22 ad 7 (§. 252.) Tandem fiat linea LM parallela ipsi EA, habeturque rete cylindri descriptum. *Tab. XI. Fig. 200.*

## PROPOSITIO XII.

§. 381. *SUperficies cylindri æqualis est parallelogrammo, cujus longitudo sit longitudo peripheriæ baseos cylindri, latitudo autem sit altitudo cylindri.* *Tab. XI. Fig. 199.*

In peripheria baseos cylindricæ AZCD, EFGH concipe arcum, quam potes, minimum v. g. MN XB; duc parallelas MX NB, uterque arcus propter exilitatem suam æquivalere poterit lineæ rectæ, ita ut MXBN sit parallelo-

 gram-

grammum; itaque cum tota ſuperficies cylindri in mera ejuscemodi parallelogramma diſpeſci poſſit, quorum altitudo communis ſit ZF, Latitudo autem peripheria cylindri; erunt omnia hæc parallelogramma uni parallelogrammo æqualia, cujus longitudo ſit peripheria cylindri, & latitudo cylindri altitudo.

§. 382. Quod ſi inter altitudinem cylindri AE vel CG, & diametrum baſeos FH quæras mediam proportionalem, atque hanc inventam aſſumas pro radio circuli; erit circulus ille efformatus æqualis ſuperficiei cylindri, habentis altitudinem EA, & baſim circularem AZDC.

# CAPUT XI.

## Reliqua de Sphæra expediuntur.

### DEFINITIONES.

Tab. XI. Fig. 201. §. 383. In *ſphæra*, quæ definita eſt (§. 345.) ſequentes ſpectari partes debent: *Punctum* A, quod eſt intra figuram, ſeu *centrum* ſphæræ. *Axis* BC, quæ eſt linea recta, per centrum ſphæræ incedens, & utrinque in ſuperficiem terminata. *Termini Axis* ſunt poli ſphæræ, ſeu ipſa puncta BC. *Amplitudo circularis ſphæræ* eſt peripheria circuli ex axe ſeu diametro deſcripti BECD. *Perimeter* ſuperficialis eſt tota ſphæræ convexa ſuperficies. *Soliditas* ſphæræ eſt totum ejus corpus, convexa ſuperficie clauſum. *Sphæræ geneſis* habetur, cum ſemicirculus BEC circa axem BC circumrotari intelligitur.

### PROPOSITIO I.

Tab. XI. Fig. ead. §. 384. *Quod ſi ſphæra utcunque plano ſecetur, ſectio erit circulus; ita quidem, ut ſi plana ſectio* DSEU *per centrum ſphæræ* A *pertranſierit, circulus maximus illius ſphæræ efformetur: ſin vero ſectio ſphæræ centrum* A *non pertranſierit, veluti ſectio* GMHN, *radii illius circuli, ſectione efformati, nempe* GO, OH *erunt minores radiis ſphæræ* AE.

Nam

Nam omnia puncta sectionis majoris DSEU æqualiter a centro A distant; perpetui quippe radii æquales a centro ad peripheriam protenduntur, atque eandem a centro distantiam metiuntur. (§. 232, & 345.) Minoris sectionis GMHN pariter extima puncta æqualiter a centro A, & axe O distant, cum AG=AH, & OG=OH. Igitur utraque sectio erit circulus.

§. 385. Rursus Quadratum radii sphæræ AH æquale est quadratis AO, & OH (§. 96); atqui AH=AE; & OH est radius minoris sectionis GMH, sicut AE radius majoris sectionis DSEU: igitur radii sectionis, per centrum non transeuntis, minores sunt radiis illius sectionis, quæ per sphæræ centrum pertransit. Q. E. D.

## SCHOLION I.

§. 386. Si plures circuli maximi eandem sphæram secent, secabunt se omnes mutuo bifariam in duas partes æquales, & quemadmodum circuli illi maximi æquales inter se sunt, ita & partes, per intersectionem productæ, æquales inter se sunt; Hinc est, quod in sphæra armillari solstitium æstivum ab hyemali æquidistet, uti & æquinoctium vernum ab æquinoctio autumnali; Duo quippe coluri, qui centrum sphæræ intelliguntur pertransire, in duas æquales partes sphæram secant.

## SCHOLION II.

§. 387. Per quævis duo puncta in sphæræ superficie assumpta potest maximus sphæræ circulus formari; non item potest per quævis data bina puncta formari circulus minor maximo, quod vel ex solis punctis axeos patescit.

## PROPOSITIO II.

§. 388. *Duæ sphæræ similes habent se ad invicem ut cubi diametrorum maximi circuli, seu ut cubi exponentium rationis radiorum.*

Nam ſit ſphæræ unius radius ad alterius ſphæræ radium duplus, erunt exponentes rationis radiorum 2, & 1. Jam cubus 2 = 8; & cubus 1 = 1: (§. *Not. Alg. Div. Arith.*): Igitur ſphæræ illæ duæ ſunt ad invicem ut 8 ad 1. ſeu ut cubi exponentium rationis radiorum.

## PROPOSITIO III.

Tab. XI. Fig. 202. §. 389. *Sphæra ſe habet ad cylindrum ejusdem baſeos, & altitudinis, ut 2 ad 3.*

Finge quadratum rectangulum ACDB, cui inſcriptus ſit quadrans ACHB, & triangulum ACGB. Jam finge hoc quadratum ACDB circa latus CA gyrari, quadratum rectangulum ACDB efficiet cylindrum; quadrans ACHB hæmiſphærium; triangulum vero ACGB efficiet conum; quæ omnia eandem baſim, & altitudinem habent. Sit itaque hypotheſis, totam baſim, & cylindri, & hæmiſphærii, & coni eſſe AB; altitudinem vero AC, atque a baſi ad ſummitatem usque triplicia hæc corpora in meros diſcos ſecari; Hi diſci utpote circuli erunt ut quadrata diametrorum (§. 267). Porro diametri diſcorum in media altitudine EF ſciſſorum, erunt pro *cylindro* EF = AB = AH. pro *hæmiſphærio* erit EH; pro *cono* EG, ſeu AE, cum EG = AE; ita ut triplices hæ diametri AH, EH, AE triangulum rectangulum AHE conſtituant; Igitur cum quadratum hypothenuſæ AH, quæ diametrus *cylindri* eſt, quadratum duplicis alterius lat ris EH, & AE, nempe quadratum diametri *hæmiſpherii* ACHB, & quadratum diametri *coni* ACGB adæquet (§. 96.) *Conus* autem tertia pars *cylindri* ſit (§. 377.) ſequitur neceſſario, diametrum duas tertias cylindri adæquare, ideoque mediam *ſphæram*, ſeu etiam totam *ſphæram* habere ſe ad *cylindrum* ejusdem baſeos cum maximo circulo *ſphæræ*, ejusdemque cum ſphæra altitudinis ut 2 ad 3. Q. E. D.

## SCHOLION.

§. 390. Præclari hujus Theorematis auctor eſt *Archimedes*, qui præ-

præcipua quadam cura atque solicitudine *circulorum sphærarumque* naturam atque affectiones est persecutus; Tantum ille sibi, præ aliis acutissimi ingenii inventis, in hoc gaudebat, suos ut amicos sæpius requireret; vellent suo aliquando tumulo sphæram cum cylindro superimponere memoriæ causa. Quod monumentum iisdem insignibus decoratum, multo tempore interjecto a se deprehensum fuisse *Cicero* in *Tusculanis* commemorat.

## PROPOSITIO IV.

§. 391. *Superficiem sphæræ invenire.*

Ex radio, seu diametro quæratur circuli maximi peripheria (§. 252.) inventa hæc peripheria multiplicetur per diametrum, & factum dabit superficiem sphæræ. *Tab. XI. Fig. 203.*

Itaque superficies sphæræ est quadrupla areæ maximi circuli; nam sphæra A C B G habet se ad cylindrum F D E H ejusdem baseos, & altitudinis ut 2 ad 3 (§. 389). Duæ autem æquales cylindri bases D M E N, & F X H Z efficiunt unam tertiam, & latera cylindri F D E H duas tertias; Atqui tam basis D M E N, quam F X H Z æqualis est areæ maximi circuli sphæræ A B: Igitur sphæra A B C G, quæ duabus tertiis cylindri F D E H æquivalet, erit æqualis quatuor areis maximi circuli.

§. 392. Rursus mediæ *sphæræ* superficies æqualis est duplæ areæ maximi circuli; Etenim *sphæræ* mediæ superficies æquivalet superficiei *cylindri* habenti pro basi maximum *sphæræ* circulum, & pro altitudine radium *sphæræ*; superficies autem hujusmodi *cylindri* sine basi æquivalet duplici areæ maximi circuli *sphæræ*: Igitur, & *sphæræ* superficies æquivalet duplici areæ maximi circuli.

§. 393. Superficies *segmenti* æqualis est circulo, cujus radius est linea ducta a polo ejus ad peripheriam basis ejus. *Tab. XI. Fig. 201.*

Sic superficies segmenti B G H æqualis est circulo, cujus radius est recta B G.

Nam triangula O B G, & B G C sunt æquiangula (§. 87.) igitur B C. B G : : B G. B O. Igitur B G erit media proportionalis (§. 39). Adeoque cum superficies cylindri æqualis sit circulo, cujus radius est media proportionalis inter altitudinem cylindri, & diametrum baseos (§. 383.) Ita & superficies segmenti B G H erit æqualis circulo, cujus radius est B G; & superficies majoris segmenti G C H æqualis circulo, cujus radius est G C. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

*Tab. XI. Fig. ead.* §. 394. HAc ratione areas quarumcunque Zonarum metiri licebit v. g. Zonæ D E G H. Etenim circulus radio B E descriptus æqualis est superficiei segmenti D E seu hemisphærio; & circulus radio B G descriptus æqualis est superficiei segmenti G H. Minorem hunc circulum subtrahe a majori, & habebis superficiem residuam, in Zona G D E H interceptam.

## PROPOSITIO V.

§. 395. *Sphæra æqualis est pyramidi, aut cono; cujus basis sit superficies, & altitudo radius sphæræ.*

Quemadmodum circulus dictus est polygonum regulare infinitorum laterum (§. 340.) ita & *sphæra* considerari potest ut solidum corpus regulare, compositum ex infinitis pyramidibus, habentibus pro altitudine radium *sphæræ*, pro basi autem *sphæræ* superficiem, a qua pyramidum vertices versus centrum concurrant; Plures autem pyramides ejusdem altitudinis habent se in ratione basium, quemadmodum plura triangula ejusdem altitudinis (§. 184.) igitur *sphæra* æqualis est pyramidi, cujus basis sit superficies, & altitudo radius *sphæræ*, aut etiam æqualis est *cono*; *conus* quippe nihil aliud est, quam pyramis infinitorum laterum (§. 377.) Q. E. D. CO-

## COROLLARIUM.

§. 396. Quoniam pyramis prismatis, & conus cylindri ejusdem baseos & altitudinis est tertia pars (§. 268, & 377). *Sphæra* autem æqualis est pyramidi, aut cono habenti pro basi superficiem, & pro altitudine radium sphæræ §. 395). Igitur & *sphæra* erit cylindri, aut prismatis tertia pars, habentis pro basi superficiem, pro altitudine vero radium sphæræ.

## PROPOSITIO VI.

§. 397. *Duarum sphærarum superficies sunt in ratione duplicata radiorum.*

Cum enim superficies *sphæræ* sit quadrupla areæ maximi circuli (§. 391); circuli autem duo, aut plures se habeant ad invicem in duplicata ratione radiorum, seu ut quadrata radiorum (§. 267). Igitur & duarum sphærarum superficies sunt ut quadrata radiorum. Q. E. D.

## PROPOSITIO VII.

§. 398. *Diametrus in longum, latum, & profundum ducta, seu cubus diametri, ex mente Archimedis habet se propemodum ad sphæram ejusdem diametri ut 21 ad 11; secundum alios ut 300 ad 157.*

Sit diametrus 100 pedum, ejus cubus erit 1000000, quia nempe 100 per 100 bis multiplicatur (§. 142 *Arith.*) Jam quæratur soliditas cylindri, ejusdem cum diametro baseos 100 altitudinis (§. 415), & habebitur factum 785000. *Sphæra* autem habet duas tertias cylindri (§. 389). Itaque beneficio arithmeticæ deprehenduntur hujus numeri 785000 esse duæ partes $523333\frac{1}{3}$; Et cubus diametri habebit se ad sphæram ut 100000 ad $523333\frac{1}{3}$; seu, si utrumque per 3 multiplicaveris, ac tandem per 10000 diviseris ut 300 ad 157. Q. E. D.

SCHO-

## SCHOLION.

§. 399. DIcitur autem cubus diametri ad ſphæram ejusdem diametri habere ſe prope ut 300 ad 157; quia quemadmodum circulus mathematice commenſurari nequit quadrato (§. 257); ita neque cubo ſphæra.

# CAPUT XII.

## De Inventione ſoliditatis diverſorum corporum.

§. 400. QUemadmodum duplex eſt ratio ſuperficiem menſurandi, altera per lineas, altera per numeros (§. 212, & 213); ita & eadem duplex metiendi ratio in ſolidis corporibus recurrit. Metimur autem corporum ſoliditatem cubice, id eſt in longum, latum, & profundum. Pertica, quæ in longum duntaxat protenſa, 10 pedes habet, extenſa ſimul in latum habebit 100 pedes; omnis quippe lineæ pes rurſus in 10 pedes in latum protenditur; eadem pertica ſimul in profundum extenſa 1000 pedes complectetur. In dimenſione ſolidorum frequens eſt uſus arithmeticæ decimalis (§. 155 *Arith.*)

## PROPOSITIO I.

§. 401. *TEtraëdri ſoliditatem invenire.*

Sit tetraëdron cujus longitudo ſit $5^{\circ}\,0'\,0''$, erit illius latitudo baſeos $3^{\circ}\,6'\,9''$, & altitudo pariter $3^{\circ}\,6'\,9''$. Jam longitudo baſeos $5^{\circ}\,0'\,0''$ multiplicetur per mediam latitudinem nempe $1^{\circ}\,8'\,4\frac{1}{2}''$ (quia nempe baſis tetraëdri eſt figuræ triangularis (§. 347). triangulum autem æquivalet parallelogrammo ejusdem longitudinis, & mediæ latitudinis (§. 328) factum habe-

habebitur 92250. Hoc rurſus multiplicetur per tertiam partem altitudinis, id eſt per 123 (quia nempe tetraëdron, ſeu pyramis eſt tertia priſmatis pars (§. 368) Factum erit ſoliditas tetraëdri $11^{\circ}\ 346'\ 750''$. Aut etiam 92250 multiplicetur per totam altitudinem $3^{\circ}6'9''$, factumque per 3 dividatur, quod eſt perinde.

## SCHOLION.

§. 402. Quoniam in dimenſione ſuperficierum, bini & bini characteres incipiendo a dextris numerorum præſcinduntur, quia nempe pertica ſuperficialis non 10, ſed 100 pedes complectitur (§. 214). ita in dimenſione ſolidorum terni, & terni characteres abſcinduntur, eo quod pertica cubica non 100, ſed 1000 pedes contineat.

## PROPOSITIO II.

§. 403. *Cubi ſoliditatem metiri.*

Latus cubi in ſe ducitur, & factum proveniens rurſus cum numero lateris multiplicatur; Factum dabit cubi ſoliditatem.

## COROLLARIUM.

§. 404. Sic etiam parallelepipedi ſoliditas invenitur: ſit longitudo illius $3^{\circ}4'2''$, latitudo $1^{\circ}3'6''$, altitudo $2^{\circ}2'0''$. $3^{\circ}4'2'' \times 1^{\circ}3'6'' = 46512$. Rurſus $4^{\circ}, 65', 12'' \times 2^{\circ}2'0'' = 10^{\circ}, 232', 640''$. Quæ erit quæſita ſoliditas.

## PROPOSITIO III.

§. 405. *Pyramidis ſoliditatem invenire.*

Inveniatur primum ſuperficies baſeos (§. 219).

Hæc basis pyramidis multiplicetur cum tertia parte altitudinis ; quia nempe pyramis est tertia prismatis pars ejusdem baseos, & altitudinis. Factum dabit pyramidis soliditatem.

## SCHOLION.

§. 406. Altitudo *pyramidis*, aut *coni* invenitur, dum in linea horizontali prope pyramidem, aut conum pertica perpendiculariter erigitur, ac superne tam supra pyramidem, quam supra perticam transtrum collocatur, atque utriusque æqualis altitudo libella exploratur.

## COROLLARIUM I.

§. 407. Quoniam *octoëdron* rationem habet duplicis pyramidis quadrangularis (§. 354). Duplicetur primum basis pyramidis hujus, & factum cum tertia parte pyramidis multiplicetur, habebiturque soliditas octoëdri.

## COROLLARIUM II.

§. 408. *Icosaëdron* vero, cum æquivaleat viginti tetraëdris, quorum vertices versus centrum concurrant, ut illius soliditas inveniatur ; addantur viginti illæ tetraëdrorum bases, factumque cum tertia parte altitudinis tetraëdri multiplicetur, & habetur quæsitum.

## COROLLARIUM III.

§. 409. *Dodecaëdron* habet rationem duodecim pyramidum pentagonarum. Inveniatur primum baseos pentagonæ superficies (§. 220) ; Inventa superficies baseos multiplicetur cum tertia parte altitudinis (§. 405). Hoc factum multiplicetur per 12 ; tot quippe sunt pyramides pentagonæ. Et prodibit dodecaëdri soliditas.

PRO-

## PROPOSITIO IV.

§. 410. *SOliditatem prismatis invenire.*

Superficies baseos cum altitudine prismatis multiplicatur, & habetur intentum. Sit longitudo baseos $\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{0}$, latitudo ejusdem $\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{6}$, altitudo vero $\overset{\circ}{9}\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime}{7}$. Jam $\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{0} \times \overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{6} = 4320$; rursus $\overset{\prime}{4}32\overset{\prime\prime}{0} \times \overset{\circ}{9}\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime}{7} = \overset{\circ}{4}, 1\overset{\prime}{7}7, 44\overset{\prime\prime}{0}$. (§. 402.)

## COROLLARIUM.

§. 411. CYlindri soliditas invenitur eodem modo, cum nempe superficies circularis baseos per altitudinem multiplicatur.

§. 412. *PYramidis truncatæ*, aut etiam *truncati coni* cognoscitur soliditas.

Supputatur *Pyramis*, aut *conus* haud aliter, quam si truncata illa pars *pyramidi*, aut *cono* inesset (§. 405). tum dempta illa sola pars assumitur, atque soliditas illius investigatur (§. 405). Factum hoc secundum subtrahitur a facto primo, habeturque *Pyramidis truncatæ*, aut etiam *coni truncati* (§. 345) soliditas.

## PROPOSITIO V.

§. 413. *SOliditatem cylindri invenire.*

Inventa superficies baseos circularis (§. 265). multiplicetur cum altitudine *cylindri*, & habetur factum.

## COROLLARIUM I.

§. 414. CUm *conus* tertia sit cylindri pars (§. 381). invenietur illius soliditas, si superficies baseos inventa cum tertia parte altitudinis multiplicetur. v. g. sit diametrus baſeos *coni* $4', 9''$, & tertia altitudinis pars $8', 2''$. Jam juxta §. 265 ſuperficies baſeos hujus coni $= 18', 86\frac{1}{2}''$, vel $18', 86'', 50'''$. Rurſus $18', 86'', 50''' \times 8', 2'', 0''' = 154', 693'', 000'''$; aut abſolute $154', 693''$. Quæ erit ſoliditas *coni* inquiſita.

## COROLLARIUM II.

§. 415. CYlinder, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos, habet ſe ad cubum, cujus unum latus itidem æquale eſt diametro baſeos, ut 785 ad 1000.

Nam ſit diameter baſeos = 100. erit tota ſuperficies = 7850 (§. 265). Jam vero altitudo cylindri pariter eſt æqualis 100 ex *hypotheſi*; $7850 \times 100 = 785000$; hæc quippe erit ſoliditas cylindri. Porro unum cubi latus = 100 cubetur, erit factum 1000000; Ideoque cylindrus, cujus altitudo æqualis eſt diametro baſeos habet ſe ad cubum, cujus unum latus itidem æquale diametro baſeos, ut 785000 ad 1000000. ſeu ut 785 ad 1000.

## PROPOSITIO VI.

§. 416. *SOliditatem ſphæræ invenire.*

Inquiratur primum in *ſphæræ* diametrum; Hujus diametri numerus redigatur in cubum (§. 142 *Arithm.*) Invento cubo fiat regula proportionis: ſicut ſe habent 300 ad 157, (§. 398); ita ſe habet cubus inventus ad quartum numerum proportionalem. Quartus hic proportionalis numerus erit *ſphæræ* ſoliditas.

Aut quæratur area maximi circuli *ſphæræ* (§. 265). Hæc area multiplicetur per diametrum circuli, & habebitur cylindrus, cujus baſis ſit æqualis maximo *ſphæræ* circulo, & altitu-

do

do æqualis *sphæræ* altitudini (§. 413). Jam *sphæra* se habet ad cylindrum ut 2 ad 3 (§. 391). Igitur duæ tertiæ inventi cylindri dabunt *sphæræ soliditatem*.

## COROLLARIUM.

HAc ratione Terræ totius, quam interim sphæricam esse ponimns, soliditas reperitur.

§. 417. *Sector* GAH *sphæræ æqualis est cono, cujus altitudo est sphæræ semidiameter* AB, *& basis radius recta* BG. *Tab. XI. Fig. 201.*

Nam sicuti circulus constare concipitur infinitis triangulis (§. 340); ita sphæra infinitis tetraëdris, quorum bases versus superficiem protendantur, & quæ tetraëdra conum efficiant (§. 377). Igitur tanta erit coni basis, quanta est superficies sectoris GBH; atqui hæc superficies convexa æqualis est superficiei circulari, cujus radius est recta BG (§. 383). ergo sector GAH æqualis est cono, cujus altitudo est sphæræ semidiameter AB, & basis radius recta BG.

## PROPOSITIO VII.

§. 418. *Soliditatem irregularis cujusque corporis invenire.*

Paratur quadrata lignea cista; in hanc primo corpus illud irregulare, tum tantum aquæ immittitur, usque dum irregulare illud corpus totum contegatur. Porro notetur accurate aquæ in vase ascensus, exemptoque corpore advertatur, quoadusque subsidat aqua. Denique ob regularem cistæ figuram facile ex deprehenso spatio in cognitionem soliditatis illius regularis corporis devenitur.

## SCHOLION.

§. 419. QUodsi vero corpus illud irregulare aquæ affusionem non sustineret, adhibe loco aquæ tenuissimam arenam, quam superne asserculo poteris complanare.

§. 420. HUc pertinet *doliorum Stereometriam* quadantenus pertractare, ad explorandos nimirum contentos in vasis liquores solitam adhiberi. Cum vasa cylindrica fuerint, facilioris negotii est eorum capacitatis dimensio; difficilioris, cum vasa irregularis cujuspiam fuerint figuræ. Cl. Wolffius (§. 582.) *Element. Geometriæ virgulam pithometricam* seu *cylindricam* affert, cujus usu liquores in vasis cylindricis mensurare liceat.

## PROPOSITIO VIII.

Fig. 204. §. 421. *VIrgam cylindricam seu pithometricam construere.* Assumatur vas minus cylindricum v. g. unius mensuræ A B C D; hujus diametrus A B transferatur in duas lineas perpendiculares, ita ut $A1 = AB$, & erit linea B 1 diametrus vasis duas mensuras capientis. Iterum B 1 transferatur in A 2, & erit B 2 diametrus vasis tres mensuras continentis. Sic porro B 3 erit diametrus vasis quatuor mensurarum, B 4 mensurarum 5. B 5 mensurarum 6 &c. in vase tamen semper ejusdem altitudinis cum vase, non nisi unam mensuram capiente. His ita constitutis divisiones inventæ transferantur in unum virgulæ latus nempe A 1, A 2, A 3 &c. altitudo autem vasis cylindrici, unam mensuram capientis toties transferatur in alterum latus virgulæ, quoties transferre per longitudinem virgulæ licet; habeturque virgula parata.

## COROLLARIUM.

§. 422. OPe Arithmeticæ possunt hæ cylindrorum diametri determinari. Assumatur diametrus $AB = A1$ esse 1000. hoc quadretur, nempe $1000 \times 1000 = 1000000$. Jam ut inveniatur diametrus A 2, cylindri nimirum duas mensuras capientis, $1000000 \times 2 = 2000000$. Ex hoc numero 2000000 extrahatur radix quadrata (§. 149. *Arithm.*) hæc erit 1414; tot nempe partium æqualium erit diametrus A 2. Quod si diametrus cylindri 3, 4, aut quinque mensurarum inquiratur, multiplicentur 1000 000 per 3, 4, 5 &c. & extrahatur

radix

radix quadrata, hæc dabit diametrum vaſis cylindrici ejusdem ſemper altitudinis.

## PROPOSITIO IX.

§. 423. *Ope virgulæ pithometricæ determinare numerum menſurarum vaſis non cylindrici, ſed in medio pauliſper largioris.* *Tab. XI. Fig. 205.*

Applicetur virgula pithometrica ad utramque diametrum vaſis nempe AD, & FE, quarum hæc largior eſt priore; harumque duarum diametrorum numeri conſtituantur. Porro ut inæqualium diametrorum AD, & FE fiat coæquatio, quæratur numerus medius, inter utrumque æquidifferens, & hic per longitudinem vaſis AB multiplicetur, habebiturque numerus menſurarum, in dolio contentarum. v. g. Sit AD $=6$, FE $=8$. medius numerus æquidifferens $=7$. longitudo AB $=12\times7=84$. Hæc erit dolii capacitas.

## SCHOLION.

§. 424. QUoniam dolia communi exiſtimatione pro duobus conis truncatis uſurpantur, cum tamen tales non ſint; Nam lineæ rectæ AF, & BF non ſunt æquales arcubus AMF, & BNF; igitur in mathematico rigore eorum capacitas non exploratur.

## PROPOSITIO X.

§. 425. *COnſtruere virgulam pithometricam, aptam determinationi fluidi in dolio non pleno.* *Tab. XI. Fig. ead.*

Cognitæ capacitatis aſſumpto dolio pleno, quod ſitum horizontalem teneat, dividatur liquor illius dolii in partes arbitrarias v. g. in 20. Tum immiſſa per orificium F virgula, usque ad fundum E pertingente, emiſſaque e dolio parte vigeſima, notetur decrementum fluidi in virgula; idque per omnes vigeſimas fluidi partes continuetur. Notatis itaque his decrecrementorum intervallis in uno virgulæ latere, in altero latere ejusdem fiant divisiones partium æqualium ultra vigesimorum inæqualia intervalla v. g. in 200 aut 300 partes excurrentium, habeturque virgula parata.

## PROPOSITIO XI.

§. 426. *Fluidum dolii non pleni determinare ope hujus virgulæ.*

Tab. XI. Fig. ead. Primo totius dolii capacitas inquiratur (§. 423.) Tum virgula per orificium F usque in E immittatur. Advertatur in extracta virgula, quotnam partes in latere æqualium sint madidæ. Jam fiat regula proportionis: sicut se habet numerus partium æqualium totius dolii FE ad numerum similium partium fluidi XE: ita numerus partium, quæ intervalla scrupulorum vigesimorum referunt ad inveniendum quartum numerum proportionalem. (§. 79 *Arithmeticæ*). Denique adhibito manuali circino capiatur spatium tot æqualium in virga partium, quot numerus inventus indicat, & transferatur hoc spatium in scalam scrupulorum vigesimorum, & notetur eorum numerus, quæ ipsi congruunt. Ubi numerus mensurarum totius dolii per hunc numerum divisus fuerit, quotus dabit numerum mensurarum dolii non pleni. v. g. Sit capacitas dolii per (§. 423.) mensurarum 246. FE 200, XE 60, numerus partium æqualium, congruentium integro scrupulorum vigesimorum intervallo 190.

200 — — 60 — — 190
60
. . . . . . . . . . | 11400 | 57.

Jam tribuamus 57. esse $\frac{1}{4}$ partium in scala inæqualium; divisæ 246 mensuræ per 4 = 61 $\frac{1}{2}$, tot quippe mensuræ in dolio non pleno continebuntur.

CO-

## COROLLARIUM.

§. 427. Soliditas murorum quorumvis in ædificiis, aut mænibus constitutorum deprehenditur, cum muri illi, siquidem regulares, ceu parallelepipeda considerantur; Jam longitudo basis per latitudinem multiplicetur, & factum rursus ducatur in altitudinem, habeturque quæsitum: veluti sit murus longus 15 ped. latus 3 ped. altus 9 ped. $15 \times 3 = 45$. $45 \times 9 = 405$ ped. cub. tot quippe pedem cubicorum erit muri illius soliditas. Nisi fortassis fenestrarum aut portarum aperturæ soliditatem illam interrumperent; tum quippe illarum aperturarum capacitas subtrahitur.

# CAPUT XIII.

## De variis Stereometriæ speciebus.

§. 428. Quod in Euthymetria supra (§. 303.) ostendimus, species nempe arithmeticas *additionem*, *subtractionem*, *multiplicationem*, & *divisionem* in ea utiliter atque jucunde adhiberi; id in *Stereometria* quoque locum jure suo obtinet. Quoniam autem hæ species *Sterometricæ* duplici modo institui possunt, *per numeros*, & per *lineas*, nos lineis duntaxat utemur. Libeat pauca, pro ratione geometrici nostri compendii problemata exponere.

## PROBLEMATA ADDITIONIS.

### I.

§. 429. *Duos cubos* E & F *ita sibi invicem addere, ut tertius aliquis* G, *utrique priori æqualis, habeatur.* *Tab. XI. Fig. 206.*

Datis duobus lateribus AB, & CD quæratur primum tertia proportionalis (§. 38). Tum habita tertia proportionali, quæratur quarta proportionalis continua (§. 40, & 41). Hæc quarta proportionalis sit BO. Jam quarta hæc proportionalis

BO addatur ipſi AB, ut ſit AO. Porro inter rectas AO, & AB quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42). Harum duarum inventarum minor, nempe NM, erit latus cubi G, ex additione utriusque cubi E, & F conſurgentis.

Cum enim ſuperſicies ſe habeant in duplicata ratione (§. 185); cubi autem, in triplicata ratione (§. 371.) igitur ut latus CD cubi minoris F proportionetur, lateri AB cubi majoris E debet quarta proportionalis BO aſſumi, quæ reſpective ad cubum F eſt tertia proportionalis; atque ut rurſus AO cubi lateribus proportionetur, aſſumenda eſt duarum mediarum inter AB, & AO proportionalium minor, quæ pariter reſpectu AO eſt tertia proportionalis.

II.

Tab. XI. Fig. 207. §. 430. *Ex duabus pyramidibus* A, *&* B *ejusdem altitudinis, ſibi additis, tertiam pyramidem* C *elicere, duabus additis æqualem.*

Fiat triangulum rectangulum pro cujus baſi aſſumatur quadratæ baſeos latus EF; pro catheto opponatur quadratæ ibidem baſeos latus EH. Ac tandem ducatur hypothenuſa HK. Hæc hypothenuſa HK erit latus quadratæ baſeos pro nova pyramide C ejusdem altitudinis SO.

Nam $EF \times EF + EH \times EH = HK \times HK$. (§. 96.) Priſmata autem ejusdem altitudinis habent eandem inter ſe rationem, quam baſes (§. 365.) igitur, & pyramides, quæ tertia pars ſunt priſmatum (§. 368), ejusdem altitudinis eandem rationem habebunt, quam baſes.

## PROBLEMATA SUBTRACTIONIS.

III.

Tab. XI. Fig. 206. §. 431. *Ex cubo* G *ſubtrahere cubum* F, *ut reſiduum rurſus cubum* E *referat.*

Ad

Ad latus MN, & CD quæratur quarta proportionalis M R (§. 429, item §. 38, 40). Quarta hæc proportionalis MR subtrahatur a latere MN, & remanebit NX. Jam inter NM, & NX quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42); major harum duarum erit latus AB cubi E post subtractionem remanentis.

## IV.

§. 432. *Ex pyramide C subtrahere pyramidem B, ut residuum constituat tertiam rursus pyramidem A ejusdem altitudinis.* *Tab. XI. Fig. 207.*

Cum hæ duæ pyramides C, & B quadratum basim, eandemque altitudinem habeant, *ex hypothesi*; itaque super latus H K ex centro I delineetur semicirculus, atque latus EH pyramidis subtrahendæ B abscindatur ex illo semicirculo, remanebit EF (§. 241). Hæc recta EF erit latus remanentis pyramidis A ejusdem cum pyramide C altitudinis. Etenim $HK \times HK = EH \times EH + EF \times EF$ (§. 96.) Pyramides autem ejusdem altitudinis habent se ut bases (§. 430.)

# PROBLEMATA MULTIPLICATIONIS.

## V.

§. 433. *Sphæram A multiplicare per 4, ita ut rursus sphæra B proveniat.* *Tab. XI. Fig. 208.*

In linea recta axis FE sphæræ A quater notetur; Tum inter quadruplam hanc diametrum FE, & simplicem axem F E quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42.) Minor harum duarum proportionalium erit EG, axis quater multiplicatæ sphæræ B.

## COROLLARIUM.

§. 434. Arithmetice problema sic absolvitur: quæratur primum soliditas sphæræ A (§. 416). Hæc multiplicetur per 4. Habito hoc producto fiat per regulam proportionis positio: sicut se habet 11 ad 21; Ita se habet productum illud quadruplicatæ soliditatis sphæricæ, ad cubum axis sphæræ (§. 398.) Ex hoc rursus producto extrahatur radix cubica (§. 153. *Arithm.*) Hæc radix dabit axem sphæræ B.

VI.

Tab. XI. Fig. 209. §. 435. *Cylindrum* C, *cujus altitudo sit* 15, *triplicare, ut alter cylinder proveniat* D, *cujus altitudo sit duntaxat* 12.

Ex basi circulari cylindri C fiat quadratum (§. 338.) Hujus quadrati latus AB in data recta linea triplicetur, ac quæratur inter simplicem lineam AB, & triplicatam media proportionalis (§. 39.) Tum ad HK 12, FG 15, & inventam mediam proportionalem quæratur quarta proportionalis (§. 40.) Denique inter prius inventam mediam proportionalem, & hanc quartam proportionalem quæratur rursum media proportionalis, hæc erit latus MN majoris quadrati; quod quadratum si rursus in circulum commutetur (§. 338.) erit hic circulus basis novi cylindri D ad altitudinem KH evecti, æqualis triplici cylindro C.

## PROBLEMATA DIVISIONIS.

VII.

Tab. XI. Fig. 208. §. 436. *Sphæram* B *per* 4 *dividere, ut ex quoto rursus sphæra* A *eliciatur.*

Sphæræ B diametrus EG in 4 æquales partes dividatur (§. 17.) tum inter EG, & $\frac{1}{4}$ EG quærantur duæ mediæ proportionales (§. 42.) Major harum duarum dabit diametrum *quotam* sphæræ A quæsitæ.

VIII.

Tab. XI. Fig. 209. §. 437. *Cylindrum* D, *cujus altitudo sit* 12, *per* 3 *sic dividere, ut quotus cylindrum pariter referat* C *altitudinis* 15.

Basis circularis cylindri D commutetur in quadratum (§. 338.) cujus latus sit MN. Inter latus MN, & $\frac{1}{3}$ MN quæratur media proportionalis (§. 39.) Mox ad altitudinem FG 15, HK 12, & repertam mediam proportionalem quæratur quarta ta proportionalis (§. 40.) Demum inter mox repertam quartam proportionalem, & priorem inventam mediam proportionalem denuo inquiratur media proportionalis, quæ erit latus A B minores quadrati. Hoc quadratum, cum rursus in circulum conversum fuerit (§. 338.) & super hoc circulo erigatur cylindrus C altitudinis F G 15; erit cylindrus hic quotus cylindri D per 3 divisi.

§. 438. PRoblemata divisionis, multiplicationi: & problemata subtractionis additioni, ceu probæ deserviunt.

## PROPOSITIO IX.

§. 439. *OPe solius Arithmeticæ cubum aut multiplicare, aut dividere.* *Tab. XI.*
Sit cubus E cujus latus A B = 12 duplicandus. *Fig. 206.*
Redigatur latus A B in cubum $12 \times 12 = 144$, $144 \times 12 = 1728$. Cubus $1728 \times 2 = 3456$. Hæc erit soliditas cubi E duplicata; Itaque ex hac soliditate 3456 eliciatur radix cubica = 15 (§. 153. *Arithm.*) Ex hac radice 15 tanquam latere construetur cubus, qui sit duplex ipsius cubi E.

## SCHOLION.

§. 440. QUoniam vero in extractione cubicæ radicis 15 ex 3456, remanent 81, igitur cubus duplicatus non est omnino æqualis cubo E, sed tantum, quantum fieri æqualis potuit cum æqualibus partibus; Quemadmodum enim numerus quispiam quadratus, & deinde duplicatus, quadratus esse nequit (§. 179); ita minus numerus cubicus duplicatus est cubus. Hoc problema duplicationis cubicæ vocatur alias *Problema Deliacum*, quod Apollo Delius olim Atheniensibus spoponderit, pestis se averruncum futurum, cum aram suam, cubica forma præditam, viderit duplicatam.

## COROLLARIUM I.

§. 441. EJusdem radicis cubicæ subsidio licet cubum aliquem majorem in duos æquales minores dispescere. Soliditas cubi sit = 4096, cubi nimirum, cujus unum latus sit = 16. Numerus soliditatis 4096, dividatur in duas partes æquales, atque ex singulis æqualibus partibus extrahatur *radix cubica*; hæc dabit latus utrique minori cubo, quibus ambobus major ille divisus æqualis sit, non tamen perfecte, cum in utriusque radicis extractione aliquis numerus remaneat; neque enim potest numerus cubicus in duos cubos adæquate dispesci.

## COROLLARIUM II.

§. 442. QUod si cubum triplicare, quadruplicare aut quotiescunque demum multiplicare sit animus, multiplicetur cubi illius soliditas per numerum multiplicatorem, atque ex producto eliciatur radix cubica (§. 153. *Arithm.*) Hæc dabit latus cubo toties multiplicato. Idem inverso ordine fiat in divisione cuborum qualicunque: ex numero quoto soliditatis in arbitrarias partes divisæ extrahatur radix cubica; hæc dabit latus cubis minoribus.

## COROLLARIUM III.

§. 443. COnsimili operatione arithmetica sphæræ aut multiplicantur, aut dividuntur: super sphæræ dividendæ diametro cubus erigitur, aut potius numerus diametri redigitur in cubum; factum arbitrarie dividitur, atque ex *quoto* radix cubica extrahitur, hæc dabit diametrum minoribus sphæris, e divisione provenientibus.

## PROPOSITIO X.

§. 444. *DUorum corporum regularium similium proportionem invenire, idque ope circini proportionalis.*

Utriusque corporis latus unum homologum mensuretur, horum laterum alterum deponatur in lineam cubicam, ita ut

lateris

lateris terminus in consimilem utriusque cruris numerum desinat; alterius corporis desumptum latus transferatur in correspondentes lineæ cubicæ numeros; Ita ut si primum latus homologum numero 10 lineæ cubicæ insertum sit, alterius vero corporis homologum latus, manente eadem circini proportionalis apertura, numero 27 congruat, primum corpus regulare simile habere se ad alterum dicatur ut 10 ad 27; habent se quippe latera Corporum, ut circini aperturæ.

## PROPOSITIO XI.

§. 445. *Datis duobus corporibus invenire tertium corpus proportionale.* Fit hoc pariter ope circini proportionalis. Sint data duo corpora dissimilia, reducantur primum ad eandem speciem (§. 448, & seqq.): Tum vero horum duorum corporum inveniatur proportio (§. 444.) ita ut primum corpus sit 27, alterum = 36. Porro assumatur latus = 36, & deponatur in 27 lineæ cubicæ transversim, atque eadem in apertura circini proportionalis desume distantiam inter 36, & 36 ejusdem lineæ cubicæ, quam distantiam conserva. Iterum reduc circinum proportionalem eo, ut latus = 27. ad numerum 27 transversim sit protensum, & inquire cuinam distantiæ numerorum in cubica linea reperta recens distantia inter 36, & 36 competat. Hæc in assumpto problemate erit 48. ita ut corpus regulare = 48 sit tertium proportionale majus ad duo data nempe 27, & 36; eodem quippe modo se habet 27 ad 36, quo 36 ad 48.

Quod si tertium minus proportionale corpus reperire sit animus, procedatur ordine inverso. Prodibit quippe $20\frac{1}{4}$, quod erit tertium proportionale minus corpus.

## PROPOSITIO XII.

§. 446. *Datis tribus corporibus reperire quartum proportionale ope ejusdem circini proportionalis.*

Sint

Sint datæ tres ſphæræ A = 6, B = 10, C = 15; ſeu ſphæræ A diametrus = 6, ſphæræ B diametrus = 10, ſphæræ C diametrus = 15. Diametrus = 15 deponatur transverſim in 6, & 6 lineæ cubicæ, & manente eadem circini proportionalis apertura, deſumatur diſtantia inter 10, & 10 lineæ cubicæ, quæ diſtantia circino manuali bene notetur. Tum vero ſic diſponatur circinus proportionalis, ut diametrus A = 6 numero transverſo 6, & 6 & lineæ cubicæ coæquetur, tandem periclitare, cuinam numero transverſo lineæ cubicæ recens reperta inter 10 & 10 diſtantia congruat, & prodibit quarta diametrus major proportionalis = 25. Nam 6. 10 : : 15. 25.

§. 447. QUod ſi quarta proportionalis minor diametrus petatur; deponatur diametrus = 6 in numerum 10 transverſim lineæ cubicæ, & deſumatur diſtantia inter 6, & 6, hæc erit = 4. & 15. 10 : : 6. 4. Idem quippe eſt latus ex linea arithmetica in cubicam transferre, quam illud ipſum latus *cubare*; & viciſſim latus ex linea cubica in arithmeticam deponere idem eſt, quod extrahere radicem cubicam. Atque ex his operationibus, maximo compendio peragendis, præſtantia atque utilitas circini proportionalis merito colligitur.

# CAPUT XIV.

## De Metamorphoſi Stereometrica.

### DEFINITIO.

§. 448. *MEtamorphoſis Stereometrica* eſt transmutatio corporum ex alia figura regulari in aliam, manente eadem ſoliditate. Harum Metamorphoſeon ſeu transfigurationum præcipua problemata afferemus.

### PROPOSITIO I.

Tab. XII. §. 449. *PArallelepipedum* X *cujus longitudo* AB, *latitudo* CF, *& al-*
Fig. 210. *titudo*

*titudo* AC *transmutare in aliud parallelepipedum* Z, *cujus longitudo* SU *æqualis latitudini* CF *prioris parallelepipedi* X; *latitudo* UW = BO, *&* *altitudo* HS.

Primum super altitudine AC ipsius parallelepipedi X constituatur recta CE = ipsi BO; Ex puncto E per D ducatur recta in G, & erit parallelepipedum BOSG = ACDB. Porro BOSG ponantur pro basi, cujus altitudo sit OM; Jam supra OM erigatur recta MT = HS. Ex puncto T, per N, ducatur recta TU: eritque parallelepipedum Z, cujus longitudo SU; latitudo autem, & altitudo nempe UW = BO, & MT = HS, æquale parallelepipedo X. Horumque demonstratio repetitur a quarta proportionali;

Nam CE = BO. CD : : DB.BG. Et TM = HS. MN : : NS. SU. Igitur AB × AC × CF = SU × SH × UW. seu parallelepipeda X, & Z sunt æqualia.

## COROLLARIUM I.

§. 450. IDem transmutationis problema ope arithmetices absolvitur: sit latus CD parallelepipedi X = 30, AC = 24, & CF = 20; debeatque hoc parallelepipedum mutari in aliud Z, cujus latus UW = 40, & latus SU = 20. Latus CD = 30 × AC = 24 = 720. Hoc divisum per UW = 40, dat quotum 18, qui erit numerus lateris HS. Igitur cum 30 × 24 = 720 × 20 = 14400 : & 40 × 18 = 720 × 20 = 14400, erunt parallelepipeda X, & Z inter se æqualia. *Ta. XII. Fig. ead.*

## COROLLARIUM II.

§. 451. EAdem propemodum ratione ex parallelepipedo aut alio quocunque regulari corpore æqualis cubus formatur, cum nempe ex soliditate illius corporis radix cubiba extrahitur, atque hæc pro latere cubi assumitur.

## PROPOSITIO II.

§. 452. *Pyramidem in Prisma commutare.*

Servata eadem pyramidis basi, super ea prisma describitur (§. 361), ut altitudo hujus prismatis sit ad pyramidis altitudinem $\frac{1}{3}$. & erit prisma æquale pyramidi (§. 368).

## COROLLARIUM I.

§. 453. EAdem rursus ratione ex cono formatur æqualis cylindrus, sicut enim pyramis est prismatis, eandem basim habentis, una tertia; ita & conus cylindri.

## COROLLARIUM II.

§. 454. INverso modo proceditur, si forte ex prismate pyramidem æqualem, aut ex cylindro æqualem conum formare sit animus.

## PROPOSITIO III.

§. 455. *Ex Icosaëdro æquale parallelepipedum formare.*

Sit Icosaëdron, quod 20 tetraëdra contineat (§. 408); unius autem tetraëdri basis sit $\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}$ longitudinis, latitudinis vero, & altitudinis $\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{9}$. Jam longitudo tetraëdri quintupla multiplicetur cum dupla latitudine, & habebitur parallelepipedi basis; rursus assumatur tertia pars altitudinis tetraëdri, & erit parallelepipedum æquale Icosaëdro permutato. seu $\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0} \times 5 = \overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{0}0 \times \overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{9} \times 2 = \overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{3}\overset{\prime\prime\prime}{8} = 1845000 \times 123 = \overset{\prime}{226}, \overset{\prime\prime}{935}, \overset{\prime\prime\prime}{000}$. Hæc quippe erit emergentis parallelepipedi soliditas; quam eandem soliditatem constituunt 20 tetraëdra $\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}$ long. latitudinis, & altitudinis $\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime\prime\prime}{9}$;

nam unum ejuscemodi tetraëdron $= 11', 346'', 750'''$ (§. 401). Igitur $11', 346'', 750''' \times 20 = 226', 935'', 000'''$. Perinde enim est, seu longitudo baseos triangularis omnium 20 tetraëdrorum cum media parte latitudinis multiplicetur (§. 328); seu quarta pars longitudinis in duplam latitudinem ducatur (§186), & factum tandem per tertiam partem altitudinis multiplicetur (§. 384).

## PROPOSITIO IV.

§. 456. *Sphæram in æqvalem cubum permutare.*

Juxta sphæræ datæ altitudinem, & latitudinem cylindrus constituatur (§. 384). Quoniam hic cylindrus ad sphæram habet proportionem sesquialteram, seu ut 3 ad 2 (§. 391). demitur cylindro tertia altitudinis pars, & erit æqualis sphæræ datæ. Jam hic cylinder in cubum permutetur (§. 447), & habebitur cubus datæ sphæræ æqualis.

## COROLLARIUM.

§. 457. Quod si sphæræ datæ soliditas cognita sit, extrahatur ex eadem radix cubica (§. 153 *Arithm.*) quæ dabit latus cubo proxime æquali. Alias, cum sphæræ diametrus in 10 æquales partes dividitur, atque octo harum partium pro cubi latere assumuntur, prodibit itidem cubus datæ sphæræ prope æqualis.

## PROPOSITIO V.

§. 458. *Cubum in sphæram commutare.*

Sit cubus, cujus radix, seu latus sit $= 5$. Itaque quoniam radix cubi ad diametrum æqualis sphæræ se habet ut 1000 ad 1260; fiat regula proportionis: ut 1000 ad 1260, ita 5 ad quartum proportionalem, factaque operatione prodibit $6'3''$. ita ut diametrus ſphæræ eſſe debeat $6'3''$, ad hoc ut ſphæra æqualis reddatur cubo, cujus radix $5'$.

## SCHOLION.

§. 459. PRo cæterorum regularium corporum immutatione apponere juvat ſequentem tabellam, ut ea nimirum inſpecta ex regulari corpore aliud æquale conſtitui poſſit, nempe:

| | |
|---|---|
| Diametrus ſphæræ | 1260 |
| Latus cubi - - - | 1000 |
| Latus tetraëdri - - | 2051 |
| Latus octoëdri - - | 1285 |
| Latus Icoſaëdri - - | 757 |
| Latus dodecaëdri - | 501. |

Veluti ſit ex ſphæra, cujus diameter $3'5''$, æquale Icoſaëdrum formandum: 1260. 757. $3'5''$. factaque operatione deprehendetur latus Icoſaëdri æqualis eſſe debere $2'1''\frac{1}{36}$.

## PROPOSITIO VI.

§. 460. *SPhæram in cylindrum commutare, idque ſubſidio circini proportionalis.*

Diametrus ſphæræ deponatur in lineam cubicam, ut utrinque numerum 30 contingat. Sic conſtituto circino proportionali, deſumatur diſtantia inter 20, & 20 lineæ cubicæ; erit hæc diſtantia latitudo cylindri, æqualis ipſi ſphæræ, altitudine manente eadem cum axe ſphæræ. Hac methodo utuntur frequenter Pyrotechnæ in præparandis calibris.

CA-

# CAPUT XV.

## De Conicis Sectionibus.

### DEFINITIONES.

§. 461. *SEctiones conicæ* nomen suum *a cono* (§. 374), qui plano secatur, sunt indeptæ; Quemadmodum enim in sphæra, dum plano secatur, sectio efformatur, quæ *circulus* dicitur: ita quoque, dum *conus* sic secatur, ut sectio neque axem pertranseat, aut basi non sit parallela, pro varia planæ illius sectionis ratione triplices efformantur planæ figuræ, nempe *Ellipsis*, *Parabola*, & *Hyperbola*. Quæ omnes communi nomine *sectiones conicæ* appellantur.

§. 462. SUnt autem coni alii *recti Fig.* 211, quorum axis AB ad basim CD perpendicularis est: alii *scaleni Fig.* 212. quorum axis AB ad basim CD non est perpendicularis. *Tab. XII. Fig.* 211. *Fig.* 212.

§. 463. RUrsus *recti coni* alii sunt *orthogoni Fig.* 211. quorum axis æquatur semidiametro baseos: alii sunt *amblygonii Fig.* 213. quorum axis minor est semidiametro baseos: alii demum sunt *oxygonii*, *Fig.* 214, quorum axis semidiametro est major. *Fig.* 213. *Fig.* 214.

§. 464. *ELlipsis* fit, quando axis coni, secatur ad angulos obliquos, ducta sectione ab uno latere coni ad alterum latus, veluti EG *Fig.* 215. alias utique si axis coni perpendiculariter secaretur, sectione nimirum ad basim parallela MN, produceretur *circulus*, cum basis coni circularis sit. *Fig.* 215.

§. 465. *PArabola* fit, quando axis coni secatur aliqua sectione, lateri alicui parallela, veluti BC *Fig.* 216. *Fig.* 216.

§. 466. *HYperbole* nascitur, quando sectio coni fit, quæ protracta occurrat lateri coni extra conum ut DE in *Fig.* 217.

§. 467. LIneæ vero, quæ ex coni sectionibus oriuntur, curvæ sunt, & exhibentur hoc schemate: *Linea el-*
Fig. 218. *liptica Fig.* 218. *Linea parabolica Fig.* 219. *Linea hyperbolica Fig.* 220.
219. Ex quibus apparet, quam lineæ hæ curvæ in vertice axis
220. longius a centro recedant, quam circulus, & per consequens versus punctum verticis majorem concavitatem efforment.

§. 468. *AXis* est linea recta in plano sectionis ex vertice ad basim porrecta, dividensque basim bifariam, ut in *ellipsi* AH *Fig.* 218. quæ etiam appellatur *diameter major*; IK autem *diameter minor*. In *Parabola* AI *Fig.* 219: in *Hyperbole* AB *Fig.* 220. *Vertex* autem est supremum punctum A, in quo axis lineam curvam contingit.

§. 469. *CHordæ* sectionum, quas alii *ordinatas* vocant, sunt lineæ parallelæ, axim ad angulos rectos intersecantes, & ad ambitum figuræ exporrectæ. Tales sunt in *ellipsi* CD, IK &c. *Fig.* 218. In *Parabola* LM, HK, BC *Fig.* 219 In *Hyberbole* TU, PO *Fig.* 220. *Semiordinatæ* dicuntur media pars chordæ, ut in *Ellipsi* EC, OI *Fig.* 218. In *Parabola* EL, FH *Fig.* 219. In *Hyperbole* DP, CT *Fig.* 220.

§. 470. *CEntrum reflexionis*, seu *focus* est punctum illud in axe, in quo *ordinata* parametro æqualis est. In hoc radii omnes speculorum causticorum confluunt, veluti in *ellipsi* E *Fig.* 218. In *parabola* punctum F *Fig.* 219. In *hyperbole* punctum C *Fig.* 220.

§. 471. *ABscissæ*, seu *sagittæ* dicuntur illæ portiones diametri, quæ inter verticem, atque inter *ordinatas* vertici applicatas continentur v. g. in *parabola* AE, AF, AI *Fig.* 219. Harum *abscissarum* beneficio curvæ lineæ determinantur; sic
Tab. I. *circulus* ab omni alia curva linea distinguitur per hoc, quod
Fig. 26. *semiordinata* EF, inter diametrum AF, & *abscissam* FB sit media proportionalis (§. 39).

§. 472. *PArameter* dicitur illa recta invariabilis, a qua proprietates sectionum conicarum deducuntur. Talis est in *parabola Fig.* 219 HK, tertia nempe proportionalis inter *abscissam* AF, & *semiordinatam* FH. In *ellipsi* autem est CD *Fig.* 218. In *hyperbole* TU *Fig.* 220. Estque parameter *ellipseos*, & *hyperboles* tertia proportionalis ad diametrum transversam, & diametrum conjugatam. Est vero *diametrus conjugata* linea AB *Fig.* 221, quæ lineas parallelas diametro in duas æquales partes secat. Diametrus *transversa*, AB *Fig.* 222, est recta intra curvas continuata, secans bifariam rectas æquidistantes CD intra easdem curvas. *Tab.XII. Fig.* 219. *Fig.* 221. *Fig.* 222.

§. 473. ESt itaque *Ellipsis* figura plana, *quæ sic unica linea curva comprehenditur, ut rectarum ad axim ordinatarum quadrata sint directe inter se, ut rectangula contenta sub correspondentibus portionibus axis, non tamen sint illis æqualia.* Sic ex semiordinata CM quadratum CSTM ita se habet ad quadratum DORN semiordinatæ DN: sicut parallelogrammum CFXB, compositum ex AC × CB se habet ad parallelogrammum DGKB, compositum ex AD × DB; attamen nec quadratum CSTM est æquale parallelogrammo CFXB, nec quadratum DORN parallelogrammo DGKB; quadrata enim sunt parallelogrammis minora. Atque ex hoc discrimen *ellipseos* a circulo internoscitur; nam quadratum semiordinatæ EF (*Fig.* 26) est æquale parallelogrammo AF × FB. Nam EF est media proportionalis. *Tab.XII. Fig.* 223.

§. 474. HAbet itaque *ellipsis* duplicem diametrum, quarum altera, omnium diametrorum longior, dicitur *axis major*: altera brevior dicitur *axis minor*; secant se autem hi duo axes ad angulos rectos. Aliæ diametri semper fiunt majores, quo magis ad majorem axem accedunt; & illæ, quæ æqualiter ab eodem axe distant, æquales sunt v.g. in *ellipsi* EGFH, sunt æquales diametri MP, & NO. *Tab.XII. Fig.* 224.

B. §. 475. *PArameter* ellipseos est linea recta CA, tertia nempe proportionalis inter axem majorem CD (§. 474), *Fig.* 225.

&

& minorem U S, quæ extremitati C axis majoris perpendicularis est. Igitur quadratum minoris axis U T, nempe U M N T, erit æquale quadrato C D × C A nempe parallelogrammo C D B A. Ast si volueris formare parallelogrammum æquale quadrato subordinatæ O P, non oportebit ex C O × C A illud formare, sed ex C O × C H vel O G; quia nempe deficit. Atque ob hunc defectum hæc figura dicta est *ellipsis*, seu *deficiens*.

Tab. XII. Fig. ead. §. 476. DUos *focos* ellipsis habet, qui sunt duo puncta O, & K in majori axe C D, æqualiter a centro S & duplici vertice C D remota, quorum distantia a minoris axis extremitate U, nempe O U vel K U æqualis est dimidio axi majori C S; a vertice vero C, & D tanta esse debet utriusque foci distantia, ut semiordinata O P foci O semiparametrum C A adæquet. Quod autem in *focis* ellipseos comprimis attendi debet, est, quod duæ rectæ, ex utroque *foco* ad perimetrum seu circumferentiam quomodocunque ductæ, sint æquales axi majori ellipseos. Sic $OE + EK = CD$. $OU + UK = CD$. $OF + FK = CD$. Item quod recta tangens I R debeat æquales angulos formare cum rectis, ex utroque *foco* ad centrum E tentendibus. Sic angulus $OEI = KER$.

## PROPOSITIO I.

Ta. XII. Fig. 226. §. 477. *CUrvam ellipticam describere.*

Ducatur recta linea B G, & assumpto puncto arbitrario A, ducatur ex eo circulus B C D E. Rursus assumpto puncto D fiat circulus A F G H. Ex punctis intersectionum I, & K per centra A, & D ducantur rectæ usque ad peripherias circulorum, nempe K A C, K D F, I A E, I D H. Denique posito circini pede in K, radio K C, ducatur arcus C F; & iterum eodem radio ex I ducatur arcus E H, habeturque *elliptica* descripta.

SCHO-

## SCHOLION.

§. 478. QUod si vero axis major minorem longitudine multum superare debeat: ducantur duæ lineæ perpendiculares CD, & BA. Dividatur CE in tres æquales partes, CF, FM, ME. Linea quoque ED in tres ejuscemodi æquales partes dividatur. Jam ex centris F, & I, radiis FC, & ID describantur circuli HCGM, NKDL, atque ex A & B per centra circulorum F, & I ducantur utrinque rectæ, nimirum AFG, AIK, BFH, BIL. Denique posito circini pede in A, radio AG, ducatur arcus GK, iterumque posito circini in B, eodem radio, fiat arcus HL, & habebitur *ellipsis* oblongior mechanice descripta. Tab. XII. Fig. 227.

## COROLLARIUM.

§. 479. PRomptissime *ellipsis* cujuscunque magnitudinis sic describitur. Dentur duæ lineæ AB, & CD, quarum prior majorem, altera minorem ellipseos axem referat. Hæ duæ rectæ se secent perpendiculariter in E ad partes utrinque æquales. Tum defigantur duo aculei ad æquales a centro E distantias in F, & G; illigetur filum his aculeis ea longitudine, atque etiam ea aculeorum F & G dispositione, ut extremitas fili, ex F, & G tensi, ad quatuor puncta ellipseos A, C, B, D pertingat. Itaque ubi adhibito stilo filum illigatum, ea qua licet extensione in gyrum torseris, describes ellipticam lineam ACBD. Q. E. F. Tab. XII. Fig. 228.

## DEFINITIONES.

§. 480. *PArabola* est figura plana, *quæ curva linea* ABC *in se non redeunte, continetur, cujusque abscissæ* BD, BI *sunt inter se directe, ut correspondentium semiordinatarum* DE, IR &c. *quadrata, nempe* DSZE : IPQR; Ideoque cum quadratum IPQR sit ad quadratum DSZE in ratione duplicata semiordinatarum DE, IR (§. 185, & 186); quadrata autem IPQK, DSZE se directe habeant ut abscissæ BD, BI: sequitur, quod & abscissæ BD, BI sint in duplicata ratione semiordinatarum DE, Tab. XII. Fig. 229.

IR: semiordinatæ vero DE, IR sint in ratione subduplicata abscissarum BD, BI. (§. 105. *Arithm.*)

§. 481. *PArameter parabolæ* est recta BF, vertici axis B perpendicularis, quæ ad quamlibet abscissam v. g. BD, & ad correspondentem semiordinatam *v. g.* DE sit tertia continuo Geometrice proportionalis. Igitur si ex semiordinata DE, tanquam media proportionali, fiat quadratum DSZE, atque ex abscissa BD, & parametro BF fiat rectangulum BDGF: hoc rectangulum BDGF erit quadrato DSZE æquale (§. 176.) atque ab hac æqualitate *Parabola* nomen suum traxit: *Exemplar*, seu *similitudo*.

*Fig. ead.* §. 482. FOcum autem *Parabolæ* quod attinet, tria comprimis notanda sunt: 1mo. Eam esse foci D a vertice B justam distantiam, quæ sit quarta parametri pars. 2do. quod *Parabolæ* semiordinata v. g. DE æqualis sit semiparametro BF, quemadmodum etiam dictum est de *ellipsi.* 3tio. Denique, quod tangens MN debeat angulos æquales formare cum linea recta, axi BP parallela, in punctum H incidente, & etiam cum linea recta ex puncto foci ad punctum H ducta. Sic angulus MHT = NHD.

## PROPOSITIO II.

*Ta. XII.* §. 483. *PArabolam Geometrice describere.*

*Fig. 230.* Ducatur recta AB, ex cujus medio F excitetur perpendicularis FG (§. 24.) Hanc rectam FG transfer in lineam AB ex centro F utrinque bis, nempe ex F in T, ex T in A, ita ut AB sit quadrupla ipsius FG. Erit hoc modo F *centrum reflexionis*, seu *focus* (§. 482); & G *vertex Parabolæ*. Porro distantiam FG, & intervallum ipsi æquale TA vel TB, divide in quotcunque æqualia spatia (hic delegimus 6) numerosque adscribe, ut vides, & per singula divisionum puncta in linea GF duc *normales*, seu *ordinatas* indefinitæ magnitudinis. Tum posito uno circini pede in centro reflexionis F, desume intervallum FO, manenteque eadem circini apertura transfer hoc inter-

tervallum ex F in primam *ordinatam* utrinque, nempe in C, & C. Iterum desumpto intervallo FN, transferatur illud in secundam ordinatam, nempe in D, & D. Atque ita per cætera divisionum puncta descendendo, deprehendentur in *ordinatis* defixa puncta CC, DD, EE, PP, QQ, AB. Denique si *Parabolam* ultra focum F continuare velis, adjice lineæ AB partes dividentes æquales, nempe 7, & 8 &c. & subjunge plures *ordinatas* in æquali ab invicem distantia, ad quas pariter intervallum F 7, & F 8 in RR, & SS depones. Tandem ubi puncta in singulis ordinatis inventa curvis lineis coujunxeris; ducendo primum ex puncto H arcum CGC, tum ex I curvam DC, & CD, reliquas curvas ex reliquis descendentibus, & æquidistantibus punctis, habebis Parabolam Geometrice descriptam.

## SCHOLION.

§. 484. VErum quoniam magnum Parabolæ segmentum Geometrice per lineas difficulter determinatur; e re esse videtur illud ope numerorum præstare.

## PROPOSITIO III.

§. 485. *PArabolæ segmentum pro speculis causticis per numeros determinare.* Ta. XIII. Fig. 231.
Ducatur recta BG in quotcunque partes divisa, atque in puncto C ad angulos rectos intersecetur. Segmentum minus CB statuatur quotcunque partium (hic 4 delegi) alterum segmentum majus CG statuatur pariter quotcunque partium, v. g. 76 partium. Erit hoc modo B vertex segmenti *Parabolæ*; BG vero latus rectum 80 partium, cujus quarta pars BH 20 partium dabit *centrum reflexionis* in H. Porro in linea BC per singula divisionum puncta ducantur *normales*, id est, *semiordinatæ* CA, DU, IO, MN, quæ tandem per numeros sic determinantur:

Primo, lineam BC $= 4 \times$ BG $= 80$ part. fietque rectangulum $= 320$, cujus radix quadrata $17\frac{8}{10}$ manifestat semiordinatam AC. Quia nempe in *Parabola* quadratum cujuscunque

 semi-

semiordinatæ æquale est rectangulo sub segmento axis & latere recto (§. 481.)

Secundo, ut BC = 4 ad quadratum AC = 320, ita BD = 3 ad quadratum DU = 240, cujus radix quadrata $15\frac{5}{10}$ est semiordinata DU.

Tertio, ut BC = 4 ad quadratum AC = 320, ita BI = 2 ad quadratum IO = 160, cujus radix quadrata $12\frac{7}{10}$ est semiordinata IO.

Quarta, denique BC = 4. □ AC = 320 : : BM = 1. □ MN = 80. cujus radix quadrata 9 est semiordinata, MN. Quia nempe in *parabola* sicut se habet distantia a vertice ad quadratum semiordinatæ, a qua secatur: ita alia quæcunque distantia a vertice ad aliud quadratum semiordinatæ, a qua secatur.

## SCHOLION.

§. 486. Quoniam autem *conorum* alii sunt *orthogoni*, alii *amblygonii*, alii *oxygonii* (§. 463.) in quibus alii necessario sunt *axes*, aliæque *ordinatæ*, breviores nimirum, & longiores, ideo juverit problema afferre, in quo dati cujusque coni *sectio parabolica* determinetur.

## PROPOSITIO IV.

Ta. XIII. Fig. 232. §. 487. *Dato cono Parabolam inde describere.*

Sit conus datus ABC, in quo *sectio parabolica* FG. Ducatur primum recta GK, basi parallela, secabit hæc axem in T ad angulos rectos. Tum portio axis TI dividatur in quotlibet æquales partes, & per hasce ducantur rectæ ML, ON, QP, SR, omnes pariter basi parallelæ, atque ex punctis, ubi axem intersecant, ducantur semicirculi, LYM, NXO, PUG, RZS, BHC, quorum diametri sint parallelæ dictæ. In quarum singulis semiordinatas ita determinabis: Ex punctis D, E, O, Q, F, in quibus parallelas sectio parabolæ FG intersecat, duc *normales*, seu parallelas axi ad singulorum circulorum peripherias, nempe DY, EX, OU, QZ, FH, & habebis semiordinatas pro *parabola* quæsitas.

His

His ita constitutis, alicubi seorsim duc rectam HD indefinitae magnitudinis, super quam excita perpendicularem FG, aequalem sectioni *coni*, quam in totidem partes divide, in quot portionem axis TI divisisti, atque per singula divisionum puncta duc rectas, ipsi lineae HD parallelas: Tum semiordinatas DY, EX, OU, QZ, FH transfer in illas utrinque, & puncta imprime, quae conjuncta curvis lineis dabunt parabolam desideratam.

## COROLLARIUM.

§. 488. PAratur etiam *conus* ligneus torneatoris arte, hicque secatur sectione, lateri cuidam parallela BC Fig. 216. ut tandem linea illa parabolica, in charta segmento ligneo applicata facilius possit designari.

## DEFINITIONES.

§. 489. *HYperbole* est figura plana, quae linea pariter curva BAC, in se non redeunte comprehenditur, in qua cujuslibet semiordinatae v. g. DS quadratum DILS, sit ad alterius semiordinatae quadratum ERXT, sicut rectangulum NDWU ex linea certae magnitudinis NA+AD, & *abscissa* correspondente AD=DW compositum se habet ad alterum rectangulum NEQZ. Ex NA+AE & abscissa correspondente AE=EQ compositum, ita ut DILS. DRXO :: NDWU. NEQZ. *Ta. XIII. Fig. 233.*

§. 490. *PArameter* AG nempe linea axis vertici A perpendicularis debet in hyberbola sic esse comparata, ut sic se habeat ad axem transversum AN, sicut quadratum DILS ad rectangulum DNUW. *Fig. ead.*

§. 491. JAm vero ducatur recta NM ex vertice N axis transversi AN per extremum parametri G, atque ut ex cujusque semiordinatae v. g. DILS aequale rectangulum ex abscissa AD constituatur, non sufficit *Parameter* AG, sed debebit protrahi in Y ita ut quadratum DILS=ADHY, non vero AD OG. Propter hunc *parametri* exceſſum *hyperbole*, id eſt *transgreſſio* nomen ſuum obtinuit.

§. 492. AXis conjugatur *Hyberboles* dicitur recta P Q, quæ eſt media proportionalis inter axem transverſum AN, & parametrum A G. punctum F eſt focus *hyperboles* &c.

Ta. XIII. Fig. 234. §. 493. QUod ſi lineam *hyperbolicam* ducere ſit animus, nempe HGD procedes eadem prorſus ſemita, quæ (§. 487.) indicatur, niſi quod ſectio propria GF pro axe Hyperboles aſſumatur, ut figura oſtendit.

§. 494. ASymptoti dicuntur illæ lineæ *intactæ*, quæ ad curvas continuo ſe magis, & magis inclinant, nunquam tamen cum iisdem concurrunt, etſi in infinitum protendantur. Ejuscemodi *aſymptotos Apollonius Pergæus Lib. II. Conicorum.* Hyperbolæ attribuit, nempe MN, & NO reſpectu SXZ; Ta. XIII. Fig. 235.

Cum enim ſectio hyperbolica protracta lateri coni occurrat (*Tab. XII. Fig. 217.*) nunquam fiet, ut aut axis hyperbolæ ED, aut curva ſuperbolica latera cum axe coni B G aut cum rectis coni lateribus concurrant.

## *Finis Inſtitutionum Geometriæ.*

IN-

# INSTITUTIONES TRIGONOMETRIÆ.

## CAPUT I.

### De Principiis Trigonometriæ.

§. 1. TRigonometria est facultas, *quæ docet ex tribus datis trianguli partibus, proportionis auxilio, cæteras ignotas invenire.* Hæc ab *Hipparcho* olim & *Menelao* inventa; tum a *Ptolomæo*. atque compluribus recentioris ævi, veluti *Regiomontano*, *Wolffio* &c. exculta, inventione Logarithmorum per *Joannem Neperum* Nobilem Scotum, maximum cepit incrementum.

§. 2. DUplex est *Trigonometria*: altera *plana*, quæ in triangulis rectilineis; altera *sphærica*, quæ in sphæricis occupatur. Nos de *plana* agemus primum; tum de *sphærica* nonnihil delibabimus.

§. 3. Sex sunt trianguli cujuslibet partes, nempe *Latera* tria, & *tres anguli*. Dimensiones Laterum atque angulorum beneficio *scalæ geometricæ*, & *Transportatorii* exposui §. 108. & *seqq. Geomet.* hic juvabit de illis potissimum Laterum & angulorum dimensionibus agere, quæ per *sinus*, *tangentes*, & *secantes*, eorumque *logarithmos* innotescunt.

§. 4. CIrculi *peripheria* mathematicis in 360 partes æquales dividitur (§. 234 *Geomet.*) quæ *gradus* appellantur; quilibet rursum gradus subdividitur in 60 *minuta*, horum quodlibet in 60 *secunda* &c. Arcus circuli, qui e centro inter duo crura recta describuntur, dicuntur *angulorum mensuræ*, v. g. FC, angu-

*Tab. I.* *Fig. I.* anguli FAC, angulusque A tot dicitur esse graduum, quot graduum est arcus FC.

§. 5. Circulo inscribuntur lineæ rectæ subtendentes circularem arcum, quæ vel *subtensæ* vel *chordæ* appellantur. v.g. CK, CP. Ipsa quoque diametrus FI, quæ centrum A pertransit, *chorda maxima* nominatur.

§. 6. Sinus est chorda dimidia, v. g. CH, KH, CG, PG; ipsa dimidia diametrus AB *sinus maximus*, seu *sinus totus* dicitur. Dividitur autem sinus in sinum *rectum*, & sinum *versum*. Sinus *rectus* est, qui sinui toti perpendiculariter insistit. v. g. CH est sinus rectus arcus FC; & CG est sinus rectus arcus CB; & GP est sinus rectus arcus BP. Sinus *versus*, qui etiam *sagitta* dicitur, est illa Semidiametri pars FH, quæ inter sinum rectum GH, & inter hujus sinus recti arcum FC interjacet, eritque FH sinus *versus* arcus FK vel FC; & GB erit sinus *versus* arcus CB vel PB.

§. 7. Tam sinui *recto*, quam *verso* suus est sinus *complementi*, seu *cosinus*, qui nempe arcus dati complementum subtendit, v. g. CH est sinus rectus arcus FC; sinus complementi hujus arcus est CG; quia nempe arcus CB complementum arcus FG est. Rursum quia CG est sinus *rectus* arcus CB; igitur CH est sinus complementi arcus CB. Porro FH est sinus *versus* arcus FC, & GB est sinus *versus* complementi arcus FC; & vicissim FH sinus *versus* complementi arcus CB.

§. 8. Omnis sinus *rectus* subtendit duos arcus, quorum alter quidem minor, alter major quadrante est. v. g. CH est sinus rectus arcus FC, qui quadrante quidem minor est; alter tamen arcus CBPI, qui itidem a sinu CH subtenditur, major quadrante est, & passim *complementum ad medium circulum* dici consuevit; quanquam *complementi* nomine communiter intelligitur complementum ad quadrantem; atque ideo tabellæ sinuum receptæ non exhibent ullos sinus arcuum, qua-

quadrante majorum; Nam ſinus CH ſive concipiatur habere pro complemento arcum CBPI, $= 120^{\circ}$, qui hoc obtuſangulo CAI comprehenditur; ſive habere concipiatur pro complemento arcum CB $= 30^{\circ}$, qui hoc acutangulo CAB continetur, ſemper æqualiter magnus eſt.

§. 9. SInus quoque *verſus* duplex eſt: alter *minor*, nempe FH, qui minor eſt radio circuli AF; alter *major*, nempe HI, qui major eſt circuli radio AI: *minor* FH ſubtendit arcum FC, quadrante minorem: *major* HI arcum alterum CBPI, qui quadrante eſt major, ſubtendit.

§. 10. T*Angens* eſt illa recta linea, ad rectos angulos innixa extremo radii puncto, atque usque ad ſecantem excurrens; v. g. recta FE, quæ reſpondet arcui FC, & oppoſito angulo FAG. *Tangens* vero arcus *complementi*, quæ & *cotangens* dicitur, eſt illa recta linea DB, quæ arcui complementi CB, & oppoſito angulo CAB reſpondet.

§. 11. S*Ecans* eſt recta linea, ex centro ad peripheriam ducta, atque ad tangentem usque continuata. v. g. AE eſt *ſecans* arcus FC. *Secans complementi* eſt illa recta, quæ arcum complementi ſecat, velut AD eſt *ſecans complementi* CB.

§. 12. QUod ſi trianguli ABC, *baſis* AB, pro radio circuli aſſumatur, *cathetus*, ſeu latus CB angulo acuto CAB oppoſitum, erit *tangens*; *hypothenuſa* ſeu latus AC angulo recto ABC oppoſitum, erit *ſecans*; & AB ſinus totus: ſin autem ex puncto C deſcribatur circulus, atque pro radio conſtituatur cathetus CB, erit *baſis*, ſeu latus AB, angulo acuto ACB oppoſitum *tangens*; *hypothenuſa* autem ſeu latus AC, angulo recto ABC oppoſitum, *ſecans*; ac tandem CB ſinus totus. Vides, ut hypothenuſa utriusque acuti anguli eſt *ſecans*. Quodſi demum *hypothenuſa* AC pro radio circuli aſſumatur, *ſecans* nulla erit;

*Tab. I. Fig. 2.*

erit; nullum quippe trianguli latus extra peripheriam circuli protendetur.

Tab. I. Fig. 3. §. 13. TRiplici autem modo triangula circulis inſcribi conſueverunt: Primo, ut modo dictum eſt, quodpiam trium laterum pro radio aſſumendo. Secundo cum hypothenuſa MN aſſumitur pro diametro circuli. *Fig. 3.* Tertio cum triangulum ita circulo inſcribitur, ut nullum latus centrum contingat, neque etiam ullum extra peripheriam protendatur, Fig. 4. ut in *figura quarta* elucet.

§. 14. ILlud autem Tirones mente defigere præ cæteris debent: tres cujuslibet trianguli angulos efficere 180 gradus, id eſt, angulos duos rectos (§. 77. *Geomet.*) Æquivalet quippe triangulum ſemicirculo; ſiquidem centrum circuli capiatur intra latus quodpiam trianguli. v. g. C. Examinentur Tab. Fig. 3. enim ejusdem trianguli MNS quomodocunque, ſemper 180 gradus numerabuntur; interni quippe anguli trianguli cujuscunque æquivalebunt duobus rectis. Cognitis autem duobus angulis ſemper innoteſcet tertius. Si numeros graduum in duobus angulis cognitos ſubtraxeris a 180 gradibus; reſiduum nempe dabit gradus anguli quæſiti. Jam in triangulo rectangulo, ſi unus angulus acutus ſit cognitus, habebis notitiam alterius acuti incogniti, ubi nimirum gradus acuti illius cogniti a 90 ſubtracti fuerint; nam reſiduum exhibebit gradus alterius acuti anguli quæſiti.

§. 15. DEnique omne triangulum ſex partes complectitur: tria nimirum latera, & tres angulos; ex his ſex partibus, cum tres ſunt duntaxat cognitæ, tres aliæ incognitæ, beneficio trigonometriæ, eruuntur. Sic cognito uno latere & angulis duobus, innoteſcunt cætera latera cum angulo incognito. Cognitis duobus lateribus & uno angulo, pariter innoteſcit latus alterum, cum angulis incognitis; Porro datis lateribus tribus, ſponte ſua tres illi anguli intercepti pateſcunt. Quod ſi vero tres ſolum anguli ſint noti, nunquam ad noti-

tiam

tiam laterum deveniri poterit; ſiquidem triangula ſimilia æquales angulos habent, quamvis unum ejusmodi triangulorum altero ſit majus, id eſt, majora habeat latera (§. 87. *Geomet.*) Hæc vero omnia juverit iterum ac ſæpius in chartis delineata oculis exhibere, ut tandem mens, repetitis uſibus condocefacta, ad abſtractiones ſeſe transferat, noveritque conſimiles angulos in campis, fluviis, in aëre, atque in ipſis vaſtiſſimis coelorum ſpaciis intueri.

# CAPUT II.

## De Inventione Sinuum, Tangentium, & Secantium.

§. 16. INvenire Sinus, Tangentes & Secantes, eſt eorum proportionem ad radium circuli aut veram, aut a vera inſenſibiliter aberrantem exprimere; hæcque expreſſio potiſſimum fit per *Logarithmos*, ut infra dicetur.

### PROPOSITIO I.

§. 17. *DAto quocunque ſinu v. g.* AD *arcus* FGA *invenire ſinum complementi* AB. *Tab. I. Fig. 5.*

Ducatur radius EA, hujus quadratum æquale eſt quadratis duorum laterum AD & DE vel AB & BE (§. 96. *Geomet.*) Ex hoc quadrato radii EA ſubtrahatur quadratum dati ſinus, id eſt, lateris AD, ſeu BE, & remanebit quadratum lateris AB vel DE. Ex hoc rurſus quadrato extrahatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*) hæcque dabit rectam AB, ſeu ſinum complementi quæſitum.

### PROPOSITIO II.

§. 18. *INvenire ſinum arcus graduum 45.* *Tab. I.*
Quadranti ABC ſubtende rectam AB; ſupra hanc *Fig. 6.*

 rectam

rectam AB demitte ex centro C perperdicularem CED; hæc bissecabit æqualiter arcum AB 90 graduum in D, ita ut sinus DS sit 45 graduum.

Nam quia latera CA & CB æqualia sunt (§. 232 *Geomet.*) erunt eorum quoque anguli CBA & CAB æquales; cum trianguli *isoscelis* anguli ad basim sint æquales (§. 93. *Geomet.*). Sed angulus ACB est rectus; ergo anguli CBA, CAB sunt semirecti. In omni enim triangulo tres anguli simul sumpti æquales sunt duobus rectis (§. 77. *Geomet.*). Porro anguli CEB & CEA sunt recti, & anguli CBA & CAB ex dictis sunt semirecti; ergo etiam anguli ECB & ECA sunt semirecti (§. 77. *Geomet.*); & latera AE & BE sunt æqualia. Jam vero quadratum lateris CB æquivalet quadratis duorum laterum CE & BE, (§. 96. *Geomet.*): ergo si sinus totus est graduum 90, semissis subtensæ AE vel BE erit graduum 45. Denique subtensæ AB semissis, cum sit etiam sinus semisseos ejusdem arcus ADB, erit etiam sinus DS graduum 45, & DS = AE vel BE.

§. 19. Ex invento sinu 45 graduum reperiuntur alii sinus, nempe sinus 45 graduum semisses sunt $22^{\circ}, 30'$; cujus iterum semisses sunt $11^{\circ}, 15'$. Sinus $22^{\circ}, 30'$ sinus *complementi* est $67^{\circ}, 30'$; sinus autem $11^{\circ}, 15'$ sinus complementi est $78^{\circ}, 45'$. Sinus $67^{\circ}, 30'$ semisses sunt $33^{\circ}, 45'$; horum sinuum complementa sunt $56^{\circ}, 15'$.

## PROPOSITIO III.

*Fig. ead.* §. 20. *Invenire sinum arcus graduum 60 & 30.*

Sit arcus 60 graduum ADF, erit subtensa seu latus AF = FC vel AC, nempe radio, seu sinui toti (§. 286. *Geomet.*

*Geomet.*). Ex F demittatur recta in G, nempe ſinus 60 graduum; erit autem G in medio ſinus totius AC; ita ut ſi ſinus totus AC ſit 90 partium, CG ſit partium 45. Jam vero quadratum lateris CF æquivalet quadratis duorum laterum FG & GC, (§. 96. *Geomet.*): Igitur detracto quadrato lateris GC, cujus radix ſit 45, a quadrato lateris CF, cujus radix ſit 90, remanebit quadratum ſinus FG 60 graduum, cujus radix quadrata dabit rectam FG.

§. 21. Conſimili prorſus ratione invenietur ſinus arcus 30 grad. Ex his porro ſinibus 60 & 30 graduum repertis plurimi reperiuntur alii. Sinus quippe 60 graduum ſemiſſis eſt $30^{\circ}$; hujus ſemiſſis eſt $15^{\circ}$; hujus porro $7^{\circ}, 30'$; ac hujus tandem ſemiſſis $3^{\circ}, 45'$. Jam hi ſinus omnes ſua habent complementa; ſinus $60^{\circ}$ ſinus complementi $30^{\circ}$; ſinus $15^{\circ}$ complementum $75^{\circ}$; ſinus $7^{\circ}, 30'$ coſinus $82^{\circ}, 30'$; ac ſic porro. Hæc complementa ſuas rurſus habent ſemiſſes; hæque ſemiſſes ſua denuo complementa; ita ut ex duobus hiſce ſinibus nempe $60^{\circ}$, & $30^{\circ}$, facile ſinus 16 alii cognoſcantur.

## PROPOSITIO IV.

§. 22. *Sinum 36 graduum invenire.* *Tab. I. Fig. 7.*

In Semicirculo ABC præparetur latus pentagoni EB circulo inſcripti (§. 289. *Geomet.*). Quadretur ſumma radii, ſeu ſinus totius DB, quadretur item ſemiſſis radii DF, atque ex ſumma quadratorum addita eliciatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*); dabit illa radix rectam FB, quæ eſt etiam FE. Ex FE auferatur ſemiſſis radii DF, & remanebit DE, cujus DE quadratum addatur quadrato DB, & innoteſcet quadratum EB; ex quo ſi eliciatur radix, habebitur recta EB, latus pentagoni, circulo inſcripti, ſubtendens gradus 72, cujus

jus ſinus eſt MN; hujusque ſinus ſemiſſis erit graduum 36, nempe HI,

§. 23. SEmiſſis vero cujusdam ſinus v. g. MN, hac ratione reperitur: ex A in M recta ſubtenditur AM; in hanc ex centro D demittitur perpendicularis DOH; & AO vel HI erit ſinus ſemiſſeos ipſius ſinus MN, adeo, ut ſi MN eſt ſinus graduum 72, HI ſit graduum 36.

§. 24. EX hoc ſinu graduum 36 reperto, alii ſinus 32 reperiuntur; ſemiſſes nempe ſemiſſeon, harumque ſemiſſeon variaı complementa, & complementorum rurſus ſemiſſes, quod inquirenti pateſcet.

## PROPOSITIO V.

Tab. I. Fig. 8. §. 25. *INvenire ſinum 12. graduum.*

Sinus $60^{o}$ NF (§. 20.) inventi conſtituatur ſinus complementi $30^{o}$, nempe NG; tum ſinus $36^{o}$ MK (§. 22.) inventi, conſtituatur ſinus complementi MH graduum 54; differentia M & N erit graduum 24: Igitur ſi ex quadratis SM & SN extrahatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*); dabit hæc ſubtenſam MN $24^{o}$; illius vero ſemiſſis dabit ſinum graduum 12.

Ex hoc ſinu 12 graduum reperto inveniuntur alii facile ſinus 64 modo ac methodo mox inſinuata.

§. 26. HÆc itaque eſt proportio ad radium

Sinus $60^{o}$ ſemiſſis trigoni.

Sinus $30^{o}$ ſemiſſis hexagoni.

Sinus $45^{o}$ ſemiſſis tetragoni.

Sinus

Sinus $36^{\circ}$ semissis pentagoni.

Sinus $18^{\circ}$ semissis decagoni.

Sinus $12^{\circ}$ semissis quindecagoni.

## PROPOSITIO VI.

§. 27. *Secantes quascunque v. g.* AH *invenire.* *Tab. I. Fig. 9.*

Arcus $60^{\circ}$ CE sit inventus sinus ED, pariterque complementi sinus EG (§. 20;) adhibita regula *proportionum* reperietur facile secans AH; nam ut EG sinus complementi, vel DA ad AE: ita CA sinus totus ad AH secantem quæsitam; sunt quippe quatuor proportionales (§. 40. *Geom.*)

## PROPOSITIO VII.

§. 28. *Tangentes quascunque v. g.* HC *invenire.* *Fig. ead.*

Sit inventus sinus ED arcus $60^{\circ}$ CE, sitque inventus sinus complementi EG; adhibeatur regula *proportionum* dicendo: ut sinus complementi EG vel AD ad dati arcus sinum ED: ita sinus totus AC ad tangentem quæsitam HC.

## PROPOSITIO VIII.

§. 29. *Radius* AC *est media proportionalis inter tangentem* FC, *&* *tangentem complementi* BO; *seu:* $\div$ BO, AC, CF. *Tab. I. Fig. 10.*

Nam in rectangulo BH est AH = BO, & AB = HO; & triangula OAH & FAC sunt æquiangula, habentia singula angulum rectum H & C, atque angulum A communem: igitur AH, HO : : AC, CF; atqui BO = AH, & HO = AB: ergo BO, AC : : AC, CF, seu: $\div$ BO, AC. CF. Q. E. D.

CA-

# CAPUT III.

## De Logarithmis, & Tabularum usu.

§. 30. Logarithmi sunt numeri arithmetice proportionales, respondentes numeris geometrice proportionalibus; quemadmodum sequenti tabula exhibetur.

| Geom. Prop. | Logarithmi | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 5 | 10 |
| 4 | 3 | 7 | 20 |
| 8 | 4 | 9 | 30 |
| 16 | 5 | 11 | 40 |
| 32 | 6 | 13 | 50 |
| 64 | 7 | 15 | 60 |
| 128 | 8 | 17 | 70 |
| 256 | 9 | 19 | 80 |
| 512 | 10 | 21 | 90 |

§. 31. Est hæc itaque Logarithmorum proprietas, ut si quatuor numeri geometrice fuerint proportionales, extremi duo Logarithmos habeant æquales Logarithmis duorum mediorum; v. g. 2, 4, 8, 16 sunt numeri geometrice proportionales, quorum logarithmi sunt: 10, 20, 30, 40; extremorum duorum logarithmorum nempe 10 & 40 = 50 summa æqualis est summæ logarithmorum mediorum, nempe 20 + 30 = 50. Aut sint logarithmi 2, 3, 4, 5. Logarithmi 2 + 5 = 3 + 4 = 7; unde factum est, ut cum regula proportionis multiplicatione & divisione peragatur (§. 79. *Arithm.*); hæc autem in majoris numeri expressione permolesta sit; ut inquam *Joannes Neperus* Nobilis Scotus præclarissimo invento docuerit

docuerit quartum proportionalem numerum ſola additione & ſubtractione in logarithmis reperire; nam ut trium proportionalium numerorum quartus geometrice proportionalis inveniatur, v. g. 2, 4, 8; neceſſum eſt tertium 8 multiplicare per ſecundum 4, habebunturque 32; hæc 32 rurſus ſi per primum 2 dividantur, prodibit quartus numerus proportionalis nempe 16; qui ita ſe habeat ad 8, ut 4 ad 2. In Logarithmis vero quibuscunque reſpondentibus. v. g. 2, 3, 4, cum tertius & ſecundus additi fuerint, ut ſit ſumma 7, & primus nempe 2 ſubtrahatur, habebitur quartus arithmetice proportionalis nempe 5.

§. 32. QUamvis vero Logarithmorum ſpecies ad lubitum aſſumi queant, commodiſſima tamen illa eſt, quæ cyphram 0 ponit pro Logarithmo unitatis; numeri 10 Logarithmum 10 000 000; numeri 100 Logarithmum 20 000 000; numeri 1000 Logarithmum 30 000 000 &c. ſi namque unitatis Logarithmus aſſumatur 0; tunc Logarithmus facti v. g. 24 æqualis erit Logarithmo factorum nempe 4 & 6; Geometricam quippe proportionem referunt termini 1. 4 : : 6. 24; & horum Logarithmi 0, 1, 2, 3 proportionem arithmeticam.

§. 33. NUmeri *characteriſtici* ſunt illi initiales Logarithmorum numeri, qui puncto ab aliis ſeparantur, indicantque, quot characteribus numerus abſolutus conſtet; ſic cum ab 1 usque ad 10 excluſive *characteriſtica* Logarithmorum ſit 0; a 10 usque ad 100 *characteriſtica* ſit 1; a 100 usque ad 1000 *characteriſtica* ſit 2; a 1000 ad 10000 *characteriſtica* ſit 3 &c. facile pateſcet ex hoc Logarithmo: 2. 8450980 numerum abſolutum nempe 700 intra centenarios contineri; hinc characteriſtica Logarithmi ſemper eſt unitate minor numero characterum numeri abſoluti; & datus numerus abſolutus v. g. 1752 intelligitur pro characteriſtica Logarithmi habere debere 3.

§. 34. SInus totus, ſive radius aſſumitur paſſim eſſe partium 10 000 000; quod ſi tamen characterum multitudo operationem moleſtam redderet, licebit duas, tres, pluresve cyphras poſteriores a ſinu toto reſecare, quo tamen caſu totidem ab aliis ſinibus, tangentibus, & ſecantibus characteres auferentur, ut nempe harum cum ſinu toto proportio conſtituatur. Sit ſinus totus partium v. g. 10 000, demptis cyphris tribus; erit $24^{o}$ ſinus 4067; qui tamen in Tabulis Vlacquianis numero 40673. 66 exprimitur.

§. 35. QUoniam vero *Brigii* tabula logarithmos numeris abſolutis ab unitate uſque 10000 tantummodo coordinatos exhibet; ſi forte eveniat, ut numeri abſoluti majoris v. g. 57346 inveniendus ſit logarithmus, hac res ratione debet peragi: ex dato numero majore tot poſteriores characteres demuntur, quot characteribus datus hic numerus major numeros abſolutos tabulæ Brigianæ excedit; remanebit itaque 5734; cujus quæratur logarithmus, qui erit 3. 7584577; hic logarithmus ſubtrahatur a proxime ſequenti, nempe 3. 7585334, & remanebit differentia logarithmica 757. Jam quoniam demptus numerus 6 adhucdum deeſt; adhibeatur regula *Proportionis*, ſeu *Trium* (§. 79 *Arithm.*) dicendo: ſic ſe habet 10 ad differentiam logarithmicam 757. ſicut 6 ad quartum proportionalem quærendum, prodibitque 454$\frac{2}{10}$; hæc 454$\frac{2}{10}$ addantur logarithmo minori, antea invento, nempe 3. 7584577, habebiturque ſumma 3. 7585031$\frac{2}{10}$. Denique cum numerus datus abſolutus major 57346 quinque characteres complectatur, debebit characteriſtica 3 in 4 mutari (§. 33). ita ut hujus numeri 57346 logarithmus inventus ſit 4. 7585031$\frac{2}{10}$; quæ ultima fractio ob rei exilitatem negligi poterit.

§. 36. QUod ſi rurſum logarithmus major cunctis in tabula Brigiana poſitis conſtituatur; v. g. 4. 7585031$\frac{2}{10}$. hujusque neceſſarium ſit numerum abſolutum invenire, methodo inverſa decurret operatio: Logarithmi *characteriſticam* minorem, atque etiam numerum finalem minorem habentis v. g. 3. 7584577 quæratur abſolutus nempe 5734. Mox dictus

ctus logarithmus ſubtrahatur a proxime majori 3. 7585334, remanebunt 757. Rurſus logarithmus datus minor nempe 3. 7584577 a dato majori nempe 4. 7585031 nulla habita ratione *characteriſticæ* ſubtrahatur, remanebit 454; fiat tandem regula proportionis dicendo: ſicut ſe habet 757 ad 10 (numeri quippe characteriſtici 3, & 4 tantummodo unitate differunt) ita ſe habebunt 454 ad quartum quæſitum nempe 6; tum numerus 6 ſubjungitur prioribus 5734, & habebitur dati logarithmi numerus abſolutus 57346.

§. 37. EA porro ratione *Tabulæ Vlacquianæ* comparatæ ſunt, ut *ſinus*, *tangentes*, & *ſecantes* arcuum, qui 45° non excedunt, perpetuo in ſiniſtris paginis, una cum ſuis minutis, occurrant; prima quidem in columna *ſinus*, in altera *tangentes*, in tertia *ſecantes*; in quarta *logarithmi ſinuum*; in quinta demum *tangentium logarithmi*; quibus in pagina oppoſita a dextris nempe, complementa datorum arcuum reſpondent. Arcuum autem 45° excedentium ſinus in dextris paginis ſunt collocati pariter cum minutis, quibus in ſiniſtra itidem complementa reſpondent v. g. ſinum arcus 27°. 23′ invenire oporteat; invento primum in ſiniſtra pagina numero graduum 27, deſcendatur ad 23 uſque minuta; numerus 45994. 15 ibidem expreſſus notabit ſinum quæſitum. Porro inveniendus ſit ſinus arcus 56°, 32′; quæratur in paginis dextris numerus graduum 56°, tum ab infra aſcendendo ad minuta 32 perveniatur; ibi expreſſus erit ſinus quæſitus 83420. 68; cujus complementum in parte adverſa erit 55145. 18.

§. 38. QUodſi datus arcus, cujus oporteat ſinum quærere, major quadrante, id eſt 90° fuerit, v. g. 123°. 27;

$27'$; ſubtrahatur $123^{\circ}, 27'$ a gradibus 180, & remanebunt $56^{\circ}$. $33'$. ſupplementum nempe anguli, cujus ſinus eſt 83436. 72.

§. 39. SI quis igitur in trigonometricis dimenſionibus verſari gnaviter cupit; Tabulas *ſinuum*, *tangentium*, & *ſecantium Adriani Vlacq.* pro cognoſcendis angulorum gradibus ſic adhibebit; ut tamen pro linearum numeris abſolutis, ſeu partibus tabulam logarithmorum *Brigii* aſſumat, quæ tabulis ſinuum paſſim eſt ſubnexa. In exemplo: velit quis triangu-
Tab. I. Fig. II. lum ABC totum cognoſcere, cujus angulus C ſit rectus $90^{\circ}$, latus AB $36\frac{6}{10}$ pedum; latus CB 21 pedum; fiet hoc modo: ſicut ſe habet latus AB $= 36\frac{6}{10}$ pedum ad angulum oppoſitum $90^{\circ}$, nempe rectum: ita latus CB $=$ 21 pedum ad angulum oppoſitum A incognitum.

| | | |
|---|---|---|
| $36'6''$ | $90^{\circ}$ | $21'0$ |
| log. 2. 5634811 | log. 10. 0000000 | log. 2. 3222193 |
| | | 10. 0000000 add. |
| | | 12. 3222193 |
| | | 2. 5634811 ſubt. |
| | | Sin. 9. 7587382 |

Qui logarithmus 9. 7587382 notat 35 gradus pro angulo A.

§. 40. UBi advertendum eſt, quod cum prima propoſitio in decimas reſoluta ſit, etiam tertiam propoſitionem in decimas reſolvi oportere (§. 82 *Arithm.*) Tertius quoque angulus B facile innoteſcit; Cum enim tres triangulorum quorumcunque anguli duos rectos, id eſt 180 gradus efficiant; angulus autem $C = 90^{\circ}$, & $A = 35^{\circ}$ ſit, angulus tertius B erit $= 55^{\circ}$ (§. 14). Reſtat igitur latus AC inquirere methodo priori:

an-

| angul. $C = 90^{\circ}$ | lat. $AB = 366'$ | angul. $B = 55^{\circ}$ | |
|---|---|---|---|
| 10. 0000000 | 2. 5634811 | 9. 9133645 | |
| | | 2. 5634811 | add. |
| | | 12. 4768456 | |
| | | 10. 0000000 | subt. |
| | | 2. 4768456 | |

Hic logarithmus 2. 4768456 notat latus $AC = 3'0''$

# CAPUT IV.

## De Analysi Triangulorum Rectangulorum.

§. 41. TRiangulorum latera, quæ extra circulum *basis*, *cathetus*, & *hypothenusa* dicuntur (§. 73 *Geomet.*) intra circulum alias denominationes indipiscuntur; Nam si trianguli *basis* AB pro radio, seu sinu *toto* assumitur, dicetur *cathetus* CA *tangens*, & *hypothenusa* CB *secans*. Quod si vero centrum constituatur in C, dicetur CA *sinus totus*, AB *tangens*, & CB *secans*. Si denique hypothenusa CB pro radio circuli accipiatur, dicetur CB *sinus totus*, & *cathetus* CA erit sinus rectus anguli B; *basis* demum AB, vel CG dicetur sinus complementi. Tab. I. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14.

Sequuntur Problemata, quæ quidem duplici ratione resoluta exhibebuntur; primum per *sinus*, & *tangentes*; tum per eorum *logarithmos*. Sit

## PROBLEMA I.

§. 42. *DAtis duobus lateribus* AC = 24, *&* AB = 20 *cum angulo recto* A, *reliquos duos angulos acutos* C *&* B *invenire.* Tab. I. Fig. 15.

Sicut se habet AB = 20 ad sinum totum; ita se habet AC = 24 ad tangentem anguli ABC; nempe

AB = 20. Sin. tot 100000. 00. AC = 24. tang. ang. ABC Prodibit factum 120000. 00 tangens nimirum AC; qui numerus cum in tabulis *Vlacquianis* non exhibeatur, accipitur proxime accedens nempe 119952. 76. qui in dictis tabulis tangentem $50^{\circ}, 11'$ notat.

§. 43. ALia ratione positio hæc institui potest: sicut se habet latus AB = 20 ad latus AC = 24; ita se habet sinus totus 100000. 00 ad tangentem quæsitam anguli B.

20. 24 : : 100000. 00. Tangens quæsita. habetur æque productum 120000. 00; cui proxime æqualis tangens in tabulis reperitur 119952. 76. id est: $50^{\circ}. 11'$.

§. 44. QUod si præter gradus, & minuta etiam *secunda*, & *tertia* scire aveas; tum a *tangente* proxime majori in tabulis nempe $50^{\circ}. 12'$ = 120023. 73 subtrahe proxime minorem, nempe 50. 11 = 119952. 76

70 97 differentia.

Rursus ab inventa tangente 120000. 00 subtrahatur pariter proxime minor tangens 119952. 76

47 24 differentia.

Nunc fiat regula *proportionis* dicendo: sicut se habet 7097 ad 3600, id est, ad 60 *minuta secunda*, per 60 *tertia* multiplicata: ita se habent 4724 ad quartum numerum proportionalem; habebiturque factum $2396'''$. Hæc redigantur divisionis beneficio in *secunda*; & prodibunt $39''$, $56'''$. Ita ut angulus ABC sit $50^{\circ}. 11'. 39''. 56'''$.

§. 45. PRobæ loco inveniatur angulus ACB, qui una cum angulo invento ABC angulum rectum seu 90 gradus

dus efficiat: latus CA assumatur pro *sinu toto*; AB vero pro tangente anguli C; dicaturque:

AC = 24. Sin. tot. 100000.00 : : AB = 20. tang. ang. C. peracta operatione juxta *regulam trium* (§. 79. *Arithm.*) erit factum 83333.33. Huic numero proxime æqualis habetur in tabulis 83316.86. nempe *tangens* $39^{\circ}.\ 48'$. qui a priori subducitur, & remanent 1647. Rursus assumatur tangens proxime major nempe $39^{\circ}.\ 49' = 83366.15$, & subducatur a mox præcedente 83316.86, remanebunt 4929. Denique adhibeatur regula proportionis: sicut se habet 4929 ad 3600, id est ad 60 *secunda*, multiplicata per 60 *tertia*: ita se habent 1647 ad quartum proportionalem ignotum. Factum dabit 1202 *tertia*, hæc redacta in *secunda* efficiunt $20''$, $2'''$; ita ut tangens anguli C sit $39^{\circ}.\ 48'.\ 20''.\ 2'''$. & tantummodo duo minuta *tertia* deficiant; quod patebit addenti utramque *tangentem* nempe anguli B $50^{\circ}.\ 11'.\ 39''.\ 56'''$

Et *tangentem* anguli C 39. 48. 20. 2.

89. 59. 59. 58

§. 46. Ope logarithmorum tangens AC = 24 anguli B hac ratione invenitur, nempe: numerorum absolutorum logarithmi in *tabula Brigii* inveniantur; logarithmi vero sinuum, & tangentium in tabulis *Vlacq* tum applicetur positio *regulæ proportionis*, nisi quod loco multiplicationis, & divisionis fiat additio, & subtractio (§. 31.)

| AB = 20 | sinus tot. | AC = 24. Log. Tang. B |
|---|---|---|
| Log. 1. 3010300 | Log. 10. 0000000 : : | log. 1. 3802112 |
| | . . . . . . . | 10. 0000000 *Additio.* |
| | | 11. 3802112 |
| . . . . . . . | . . . . . | 1. 3010300 *Subtract.* |
| | | 10. 0791812 |

Atque hic logarithmus 10. 0791812 est tangentis anguli B.

§. 47.

§. 47. QUoniam autem hic logarithmus in tabulis expreſſus non reperitur, ideo proxime minor aſſumitur nempe 10.0790102, qui eſt $50^{\circ}.\ 11'$.

§. 48. QUod ſi præter minuta ſcire deſideres *ſecunda*, & *tertia*, aſſume logarithmum tangentis proxime majoris nempe $50^{\circ}.\ 12'. = 10.0792671$; ab hoc ſubtrahe logarithmum tangentis proxime minoris $50^{\circ}.\ 11' = 10.0790102$; remanebit differentia 2569. Porro hunc logarithmum minorem $50^{\circ}.\ 11' = 10.0790102$ ſubtrahe etiam ab invento mox logarithmo. 10.0791812, remanebit differentia 1710; tandem fiat regula trium: ſicut ſe habet 2569 ad 3600 nempe $60'' \times 60'''$, ita ſe habent 1710 ad quartum proportionalem quæſitum. Facta operatione habebuntur $2396'''$; hæc redigantur in *ſecunda*, & erunt $39''.\ 56'''$; ita ut *tangens* A C anguli B, quemadmodum etiam per ſinus oſtenſum eſt (§. 44.) ſit $50^{\circ}.\ 11'.\ 39''.\ 56'''$.

## PROBLEMA II.

Tab. I. Fig. 16. §. 49. D*Atis duobus lateribus* D H = *30 pedes*, & D E = *20 ped. cum angulo recto* D *invenire hypothenuſam* E H.

Inventis primum angulis acutis $H = 25^{\circ}$, & $E = 65^{\circ}$ (§. 42.) aſſumatur regula proportionis dicendo; ſicut ſe habet angulus $H = 25^{\circ}$ ad latus oppoſitum D E = 20; ita ſe habet ſinus totus H D ad hypothenuſam H E.

Si-

| Sinus ang. 25 | Latus DE | Sinus totus. |
|---|---|---|
| 42261. 83 | 20 | 100000. 00 |

Neglecta fractione provenit hypothenusa HE = 47 ped.

§. 50. ALio modo inveniri hypothenusa HE potest, nempe per *secantem*, dicendo: sicut se habet sinus totus DE ad 20, ita se habet secans anguli E = $65^{\circ}$ ad hypothenusam EH.

| Sinus tot. | | secans anguli DEH = $65^{\circ}$ |
|---|---|---|
| 100000. 00 | — — 20 — — | 236620. 16 |

Factaque operatione prodibit pariter hypothenusa HE = 47.

§. 51. ALio modo per logarithmos sinuum hoc paratur, dicendo: sicut se habet logarithmus sinus anguli $25^{\circ}$ ad logarithmum numeri 20 : ita se habet logarithmus sinus totius ad logarithmum hypothenusæ.

| Log. anguli 25. | Log. Numeri 20 | Log. sinus totius |
|---|---|---|
| 9. 6259483 | 1. 3010300 | 10. 0000000 |
| | . . . | 1. 3010300 *Add.* |
| | | 11. 3010300 |
| | | 9. 6259483 *Subtr.* |
| | | 1. 6750817 |

In tabula autem *Brigii* logarithmus 1. 6750817 est proxime æqualis numero absoluto 47, qui hypothenusam HE notat.

§. 52. PEr logarithmum *secantis* si problema solvere quis cupiat; oportebit logarithmum *secantis* primo invenire; cum hic in tabulis non contineatur. Itaque hac via logarithmum secantis anguli E $65^{\circ}$ reperire licet. Inveniatur primo complementum anguli E $65^{\circ}$, quod complementum cum ſit 25°, habebit logarithmum 9.6259483. Tum logarithmus ſinus totius duplicetur ut ſit 20.0000000; ab hoc duplicato ſinu toto ſubtrahatur logarithmus complementi 9.6250483, & remanebit 10.3740517. hic erit logarithmus ſecantis anguli E 65°. Jam dicatur: ſicut ſe habet logarithmus ſinus totius DE ad logarithmum numeri 20: ita ſe habet logarithmus ſecantis anguli E ad logarithmum hypothenuſæ EH.

| Logar. ſinus tot. | Log. Numeri 20. | Log. ſecantis anguli. E |
|---|---|---|
| 10.0000000 | 1.3010300 | 10.3740517. |
| . | . . . . . | 1.3010300 *Add.* |
| . | . — — — — | 11.6750817 |
| . . . . . . . | . . . . . | 10.0000000 *Subtr.* |
| | | 1.6750817 |

Qui logarithmus 1.6750817 in Tabula Brigii proxime reſpondet numero abſoluto 47, notatque hypothenuſam EH.

§. 53. QUoniam tamen ille logarithmus paulo eſt major numero 47 pedum; ſi forte collubitum cui ſit etiam in digitos inquirere, accipito eundem logarithmum ſub characteriſtica 2. nempe 2.6750817, huic correſpondentem proxime minorem numerum abſolutum deprehendes 473, quod ſignificabit, illis 47 pedibus 3 digitos adjici debere; Cum autem logarithmus ille adhucdum paulo major ſit, ſi reſcire etiam lineas illius hypothenuſæ ſit animus, quæratur idem logarithmus ſub characteriſtica 3, nempe 3.6750817, atque huic logarithmo reperietur numerus abſolutus proxime conſonans 4732, quod argumento erit, hypothenuſam illam EH præter 47 pedes, 3 digitos etiam 2 lineas continere. Atque hac methodo in univerſum operari licebit, quotiescunque minor quantitatis menſura fuerit inveſtiganda.

## POBLEMA III.

Tab. I. Fig. 17. §. 54. *Data hypothenuſa* MO = 1000, *unoque latere* NO = 891 *cum angulo recto* N, *reliquos aculos* M, & O *invenire.* Et

Et primo quidem per ſinus dicendo : ut hypotheruſa O M. = 1000 ad ſinum totum ; ita latus O N = 891 ad angulum oppoſitum M.

| OM | Sinus tot. | ON |
|---|---|---|
| 1000 | 100000.00 | 891 |

Productum erit 8910000, quod in tabulis proxime æquale eſt ſinui 63°. Quod ſi quis etiam minuta ſecunda, & tertia noſſe cupit, ille modo (§. 44.) inſinuato utetur. Reperto autem angulo acuto M = 63° facile devenietur in Notitiam anguli O; ſubtractis quippe 63° a 90° remanebunt 27° anguli O (§. 14.)

§. 55. BEneficio logarithmorum ſic operaberis :

| Logar. numeri 1000 | Log. ſin. tot. | Logar. 891 |
|---|---|---|
| 3.0000000 | 10.0000000 | 2.9498777 |

Facta operatione habebitur quartus proportionalis, nempe logarithmus 9.9498777, qui proxime æqualis eſt logarithmo in tabulis expreſſo 9.9498809 id eſt 63°.

## PROBLEMA IV.

§. 56. *DAta hypothenuſa* M O, *unoque latere* N O *cum angulo recto* N *tertium latus* M N *invenire.* *Fig. ead.*

Ante problematis reſolutionem hujus, inveniendus eſt acutus angulus O 27° (§. 42.) tum vero fiat regula *trium*: ſicut ſe habet ſinus totus 100000.00 ad oppoſitam hypothenuſam M O = 1000 : ita ſe habet ſinus anguli O = 27° id eſt 45424.97 ad latus quæſitum M N. Qua comparatione inſtituta prodibit latus M N = 454.

§. 57. ALia ratione hoc problema per logarithmos expeditur: Numerus hypothenusæ MN = 1000 additur cum numero lateris NO = 891, eritque productum 1891. Rursus subtractione lateris NO = 891 ab hypothenusa MO = 1000 quæritur differentia utriusque, quæ est 109. Jam amborum numerorum nempe 1891 quæritur logarithmus 3.2766915; differentiæ item 109 logarithmus, nempe 2.0374265. Hisce logarithmis additis, erit logarithmus 5.3141180; quem ubi rursus per 2 dimidiaveris, erit 2.6570590. Et hic erit logarithmus lateris quæsiti MN, qui in tabula Brigii proxime respondet numero absoluto 454.

## PROBLEMA V.

*Tab. I. Fig. 18.* §. 58. *DAtis duobus angulis acutis* F = 56°. 12′, *&* H = 33°, 48′ *cum latere* FG = 18 *reliqua latera nempe* GH, *&* FH *invenire.*

Uti se habet sinus totus ad latus FG = 18; ita se habet tangens anguli F = 56°, 12′, hoc est 159378. 22 ad latus quæsitum HG. Facta operatione juxta regulam trium prodibit numerus 26 latus HG.

§. 59. PEr logarithmos fit hoc modo:

| Log. sinus tot. | Log. 18 | Log. tangentis ang. 56°. 12′. | |
|---|---|---|---|
| 10.0000000 | 1.2552725 | 10.1742873. | |
| | | 1.2552725 | *Add.* |
| | | 11.4295598 | |
| | | 10.0000000 | *Subtr.* |
| | | 1.4295598 | |

Est autem logarithmus 1.4295598 proxime æqualis numero absoluto 26 lateris GH.

Hypothenusa reperietur per Problema II. (§. 49.)

§. 60.

§. 60. QUod si demum data hypothenusa FH, & angulis inveniendum sit crus HG, fiat propositio: sicut se habet sinus totus G, ad sin. anguli F; ita se habebit latus FH ad HG.

## Sequitur Tabella Analytica Triangulorum Rectangulorum.

Tab. I. Fig. 19.

| Data | Quæsita. | Operatio. |
|---|---|---|
| Utrumque latus D, & B. | Angulus F. | D. B : : Sinus totus. tangens anguli F. |
| | Hypothenusa E. | Sinus anguli F. Sinus totus : : B. E. *aut*: Sinus totus. Secans angul. C : : B. E. |
| Anguli acuti F. & C cum latere D. | Latus B. | Sinus totus. tangens anguli F : : D. B. *aut*: tangens anguli C. sinus totus : : D. B. |
| | Hypothenusa E. | Sinus anguli C. D : : sinus totus. E. *aut*: sinus totus. Secans anguli F : : D. E. |
| Anguli acuti cum hypothenusa E. | Latus B. | Sinus totus. Sinus anguli F : : E. B. |
| Latus B cum hypothenusa E. | Angulus F. | E. B : : Sinus totus. Sinus anguli F. |
| | Latus D. | Sinus totus. Sinus anguli C : : E. D. |

# CAPUT V.
## De Analysi Triangulorum obliquangulorum.
### PROBLEMA I.

§. 61. *Datis tribus lateribus obliquanguli* ABC, *segmenta* AO, & *Tab. I.* OC, *ipsamque perpendicularem* BO, *reperire.* *Fig. 20.*

Ex centro B, radio minoris lateris AB deſcribatur circulus, qui latus BC, & AC ſecet in punctis M, & N. Ex B continuetur recta in D; quia igitur BD = BA, erit AB + BC = DC; & MC erit differentia lateris AB, & BC. Jam dicatur: ſicut ſe habet AC ad DC; ita ſe habet MC ad NC; ut NC ſit quarta proportionalis; Hac itaque quarta proportionali NC ablata a recta AC, remanebit AN, in cujus medium O cadet perpendicularis BO; ita ut AO ſit ſegmentum minus; OC vero ſit ſegmentum majus.

*Tab. I. Fig. 21.* §. 62. At ſi pro radio circuli conſtituatur radius GO, ſic ut centrum in G conſtituatur, atque ex K per G continuetur recta in S, itemque ex K per O continuetur recta in Q: latera GO, & OK erunt æqualia SK; & TK erit differentia; Jam quarta proportionalis QK reperitur dicendo: ſicut ſe habet OK ad SK; ita ſe habet differentia TK ad quartam proportionalem QK. Porro OK demitur ex QK, & remanet QO. Hujus ſemiſſis dabit ſegmentum minus QX, & majus XK. Denique perpendicularis GX tum innoteſcet, cum ex quadrato GO fuerit quadratum XO ſubtractum, atque ex reſiduo extrahatur radix quadrata (§. 146. *Arithm.*) hæc dabit perpendicularem GX (§. 18.)

*Fig. 21.* §. 63. Cum quarta proportionalis major eſt illo latere, in quod perpendicularis deſcendit v. g. proportionalis QK, tum perpendicularis ſemper extra triangulum cadit; *Fig. 20.* at vero cum quarta proportionalis minor eſt illo latere, quod perpendicularem excipit, v. g. quarta proportionalis NC, tum perpendicularis intra triangulum deſcendit. Univerſim autem rectangula AC + CN, item DC + CM Fig. 20. æqualia ſunt; ſicut, & rectangula QK × OK, item SK × TK itidem æqualia ſunt (§. 174. *Geometr.*)

*Fig. 20.* §. 64. Itaque ex his apparet ratio inveſtigandi angulos cujusvis obliquanguli, cujus tria tantummodo latera cognita ſint; Cognito enim ſinu AO, & ON habebitur perpendicularis

laris BO; qua nota, cum eoque latere OC, & angulo recto O intercepto, habebitur uterque angulus C, & B per (§. 42.) Sic etiam cognito latere BO, & OA cum angulo recto interjacente O habebitur angulus B, & A *per eundem* (§. 42.) Igitur notis angulis A, & C sublatoque utrinque recto A scies quoque, quotnam graduum sit angulus obtusus B, seu ABC.

## PROBLEMA II.

§. 65. *Datis trianguli scaleni* FDE *duobus lateribus: nempe* DE = 30, *&* FE = 36 *cum angulo intercepto* E $41^{\circ}.\ 24'.\ 18''$; *angulos reliquos* D, *&* F *invenire.* Tab. I. Fig. 22.

Sicut se habet summa utriusque lateris cogniti FE + DE = 66 ad differentiam laterum FE — DE = 6; ita se habet tangens mediæ summæ angulorum ignotorum D, & F ab angulo noto E subtractorum, nempe $138^{\circ}, 35', 42''$ ad tangentem mediæ differentiæ inter mediam summam, & quemlibet angulum ignotum, v. g. ad angulum D. Hæc differentia mediæ summæ addita mediæ summæ angulorum detegit majorem; residuus vero numerus detegit angulum minorem.

| Latus FE + DE | Latus FE — DE | tangens mediæ summæ angul. ignotorum D, & F |
|---|---|---|
| 66 | 6 | = $69^{\circ}.\ 17', 51''$ |
| | | 264507. 42 |
| | | 6 |
| | | 158704452 \| 24046.12 |

Hinc producto 24046. 12 proxime in tabulis respondet tangens $13^{\circ}.\ 31'$ nempe 24038. 64. Porro ad inquisitionem accedatur *secundorum* (§. 44.) subtrahendo 24038. 64, ab 24046. 12 remanebit differentia 748. Rursus tangens $13^{\circ}.\ 31'$ nempe 24038. 64

24038. 64 ſubtrahatur a tangente proxima $13^{\circ}.\ 32'$, id eſt: 24069. 41, erit differentia 3077. Denique fiat regula proportionis: 3077 . $60''$ . 748. factum erit 10, ut tangens mediæ differentiæ ſit $13^{\circ}, 31'.\ 10''$. Hæc differentia addita mediæ ſummæ $69^{\circ}.\ 17'.\ 51''$ indicat majorem angulum D $= 82^{\circ}.\ 49'.\ 1''$; ſubtracta vero a media illa ſumma exhibet angulum minorem F $= 55^{\circ}, 46'.\ 41''$.

§. 66. Logarithmorum beneficio problematis hujus ſolvendi viam ita inibis:

| | | |
|---|---|---|
| Logar. 66. | Logar. 6. | Logar. tangent $69^{\circ}.\ 17'.\ 51''$. |
| 1. 8195439 | 0. 7781512 | 10 . 4222774. |
| | | 0 . 7781512 add. |
| | | 11 . 2004286 |
| | | 1 . 8195439 ſubtract. |

Log. proxim. tangentis different. $13^{\circ}.\ 30'$. 9 . 3808847

Subtrahatur Logarith. $13^{\circ}.\ 30'$ = 9 . 3803537

Differentia 5310

Logarithmus tangentis $13^{\circ}.\ 31'$ = 9 . 3809100

Logarithmus tangentis $13^{\circ}.\ 30'$ = 9 . 3803537.

Differentia 5663

Jam regula proportionis inſtituatur: 5663 . $60''$ . 5310. factum prodibit 56, ita ut differentia media ſit $13^{\circ}.\ 30'.\ 56''$. Hæc addita mediæ ſummæ angulorum $69^{\circ}.\ 17'.\ 51''$ denotat angulum

gulum D $= 82^{\circ}. 48'. 47''$. ſubtracta vero a media ſumma angulorum denotat angulum F $= 55^{\circ}. 46'. 41''$.

§. 67. NAm ducatur linea AC ad quantamlibet longitudinem, fiatque angulus CAB æqualis angulo DFE *Fig. 22.* (Qui ſi angulus obtuſus foret, accipiatur ejus ſupplementum ad medium circulum) angulus autem BAG fiat æqualis angulo FDE (in angulis obtuſis aſſumatur rurſus ſupplementum ad medium circulum). Itaque angulus GAC ſummam continet ignotorum angulorum EFD & FDE. Media angulorum ſumma erit PAG, vel CAP. Denique PAB erit differentia inter ſummam mediam & quemvis ignotum angulum. Porro ex centro A ducatur circulus HPK, fiat item recta HK, quæ chorda ſit utriusque anguli GAB & BAC. Erit itaque HM ſinus anguli GAB, & KT erit ſinus anguli BAC. Tangens mediæ ſummæ eſt GP vel PC, tangens demum differentiæ eſt PB vel PL. Igitur anguli MHN, & TKN æquales ſunt, eo quod HM & KT angulos rectos efficiant; ſicut & anguli MNH & TNK æquales ſunt (§. 62. *Geomet.*); atque etiam anguli NKA & NHA (§ 86. *Geomet.*). Rurſus cum triangula æquiangula etiam latera proportionalia habeant (§. 92. *Geomet.*) ita ſe habebit ſinus HM ad HN, ſicut ſe habet KT ad KN; atqui ſinus anguli FDE *Fig. 22.* ſic ſe habet ad latus FE; ſicut ſinus anguli DFE ad latus DE: Et quoniam ſinus HM *Fig. 23.* anguli HAN æqualis angulo FDE *Fig. 22. ex hypotheſi*; & KT *Fig. 23.* ſinus anguli KAT æqualis angulo DFE rurſum *ex hypotheſi Fig. 22*; igitur latera HN & NK eandem proportionem habebunt, quam habent latera EF & ED *Fig. 22.* & chorda HK *Fig. 23.* loco ſummæ utriusque lateris EF & ED *Fig. 22.* eſſe poterit; SN vero loco differentiæ utriusque lateris; ac tandem OS vel ON loco mediæ differentiæ; denique cum ob parallelas HK, GC triangula GCA, HKA, item GPA & HOA ſimilia ſint (§. 81. *Geomet.*) debebit ſumma utriusque lateris HK ita ſe habere ad differentiam SN, ſicut duplicata tangens mediæ ſum-

*Tab. I. Fig. 23.*

mæ GC, ad duplicatam tangentem differentiæ LB, quæ ultra & intra mediam summam angulorum continetur. Aut cum eadem sit duplicium proportio, quæ est simplicium (§. 92. *Geomet.*); habebit se summa utriusque lateris HK ad eorum differentiam SN, sicut tangens mediæ summæ PG vel PC ad tangentem mediæ differentiæ PB, quæ ultra & intra limites mediæ angulorum summæ continetur: *Quod utique erat demonstrandum.*

## PROBLEMA III.

*Tab. I. Fig. 24.* §. 68. *Datis duobus lateribus* MO $=$ 36 *&* MN $=$ 24. *cum angulo interjacente* M $= 55^\circ.\ 49'.\ 3''.$ *invenire latus* NO.

Primum inveniatur angulus O *per Problema II.* (§. 65.) & deprehendetur angulus O $= 41^\circ.\ 24'.\ 18''.$ Tum fiat proportio: sicut se habet sinus anguli O $= 41^\circ.\ 24'.\ 18''$ ad latus MN $=$ 24; ita se habebit sinus anguli M $= 55^\circ.\ 49'.\ 3''$ ad latus NO.

Quoniam autem in *Tabulis* sinuum *secunda* expressa non habentur; igitur sinum $41^\circ.\ 24'.\ 18''$ hac investigabis ratione:

Quære primo sinum $41^\circ.\ 24'$ nempe 66131. 18; hunc subtrahe a sinu proxime majori $41^\circ.\ 25'$, & deprehendes differentiam 2182. Tum fiat regula *trium*: 60 secunda dant 2182; quid dabunt 18? & habebis productum 654; quæ si addideris sinui $41^\circ.\ 24'$ nempe 66131. 18, prodibit sinus 66137. 72. id est: $41^\circ.\ 24'.\ 18''.$

§. 69.

§. 69. SIc prorsus deprehendetur sinus $55^{\circ}.\ 49'.\ 3''$. nimirum sinus $55^{\circ}.\ 49'$, id est: 82724. 40. Subtrahatur a sinu proxime majori nempe $55^{\circ}.\ 50'$, id est 82740. 74, & habebitur differentia 1634. jam dicatur: 60 secunda dant 1634; quid dabunt 3 secunda? productum erit 81. Hæc addantur sinui $55^{\circ}.\ 49'$, id est: 82724. 40, eritque sinus $55^{\circ}.\ 49'.\ 3''$ hujusce magnitudinis: 82725. 21.

| | | |
|---|---|---|
| Sin. $41^{\circ}.\ 24'.\ 18''$ . | Latus MN . | Sinus $55^{\circ}.\ 49'.\ 3''$. |
| 66137. 72 | 24 | 82725. 21. |

Facta operatio exhibebit latus NO = 30.

§. 70. PEr Logarithmos hocce problema solvere cupienti necessum est Logarithmos sinuum $41^{\circ}.\ 24'.\ 18''$ & $55^{\circ}.\ 49'.\ 3''$ reperire, qui etiam *secunda* annexa exprimant; quia vero in tabulis ejuscemodi logarithmi non existunt inserti, licebit eos hac plane methodo reperire: Logarithmus $41^{\circ}.\ 24'$, id est: 9. 8204063 subtrahatur a logarithmo sinus proxime majoris $41^{\circ}.\ 25'$, nempe 9. 8205496, & innotescet differentia 1433. Tum operare: 60 *secunda* dant 1433; quid dabunt 18? prodibitque factum 429. Hoc ubi additum fuerit logarithmo $41^{\circ}.\ 24'$. nempe 9. 8204063, innotescet proprius logarithmus $41^{\circ}.\ 24'.\ 18''$, id est: 9. 8204492. Sic etiam reperiatur logarithmus sinus $55^{\circ}.\ 49'.\ 3''$. nempe logarithmus sinus $55^{\circ}.\ 49'$ id est: 9. 9176336 subtrahatur a logarithmo sinus proxime majoris $55^{\circ}.\ 50'$. id est: 9. 9177194 deprehenditurque differentia

 858.

858. Jam dicatur: 60 *secunda* dant 858; quid dabunt 3? & habebitur factum 42; quæ 42 si addita fuerint logarithmo sinus $55^\circ. 49'$, id est: 9. 9176336, prodibit proprius logarithmus sinus $55^\circ. 49'. 3''$ nimirum 9. 9176378. Jam sit proportio:

Logar. sinus $41^\circ. 24'. 18''$. Logar. 24. Logar. sinus $55^\circ. 49'. 3''$.

9. 8204492     1. 3802112     9. 9176378

1. 3802112 add.

---

11. 2978490

9. 8204492 subt.

---

1. 4773998

Qui Logarithmus 1. 4773998 in tabula *Brigii* proxime respondet numero absoluto 30, ita ut latus NO sit æquale 30.

## PROBLEMA IV.

*Tab. I. Fig. 25.* §. 71. *Dato trianguli* ABC *uno latere* AC = 60, *&* *duobus angulorum sinibus* A = $56^\circ$, *&* B = $84^\circ$ *invenire sinum anguli* C.

Angulus uterque A = $56^\circ$ & B = $84^\circ$ addantur, erunt $140^\circ$. hæc summa subtrahatur a gradibus medii circuli 180, remanebunt $40^\circ$ sinus anguli C, eritque angulus C 40 graduum; tres quippe anguli interni A, B, C æquivalent duobus rectis, seu gradibus 180, (§. 77. *Geomet.*)

## PROBLEMA V.

*Tab. I. Fig. 26.* §. 72. *Datis trianguli* CKD *duobus lateribus* CK *&* KD *cum angulo obtuso* CKD *interjacente, invenire latus* CD *&* *angulos* KCD, KDC.

Latus

Latus CK continuetur in M; & quoniam angulus CKD notus esse supponitur, notus etiam erit angulus supplementi DKM. Ex D descendat perpendicularis in M, quæ angulum rectum DMK constituat; itaque quia latus KD notum esse supponitur, & quia etiam angulus complementi DKM cum angulo recto DMK noti sunt: innotescet pariter angulus tertius KDM cum aliis duobus lateribus KM & DM (§. 54.)

Jam vero latus KM addatur lateri CK, ut fiat CM, latus DM pariter innotuisse supponitur: igitur cognitis hisce duobus lateribus CM & DM cum angulo recto M interjacente devenietur etiam in cognitionem hypothenusæ CD. (§. 49.)

§. 73. PORro cognitis tribus lateribus CK, KD, DC cum angulo obtuso K, quia sinus obtusorum angulorum, id est: ultra 90 gradus procedentium non habentur in tabulis; igitur loco sinus hujus anguli obtusi CKD accipiatur sinus complementi, nempe anguli DKM, fiatque regula proportionis: sic se habet cognitum latus CD ad sinum complementi anguli obtusi K, uti se habet cognitum latus KD ad sinum oppositi anguli C; atque operatione peracta cognoscetur angulus sinus oppositi C. Denique sicut se habet latus CD ad sinum complementi anguli obtusi K; ita se habet cognitum latus CK ad sinum oppositi anguli D. Hacque ratione etiam tertii anguli sinus innotescet.

## PROBLEMA VI.

§. 74. *COgnitis trianguli obtusanguli* ABC *duobus lateribus* AC = 18, *&* BC = 12, *cum angulo obtuso* 120°, *iis lateribus non comprehenso, invenire sinum anguli oppositi* A, *&* *tertium latus* AB. *Tab. I. Fig. 27.*

Latus AB continuetur in F, & quoniam ſinus anguli ABC eſt $120^{\circ}$, erit complementi angulus CBF = 60 graduum. (§. 234. *Geomet.*) Jam fiat regula proportionis: ſicut ſe habet latus AC = 18 ad ſinum ſupplementi 60 graduum; ita ſe habet latus BC = 12 ad ſinum anguli A. Productum itaque exhibebit ſinum anguli A. Porro ſinus anguli B = $120^{\circ}$ cum ſinu invento anguli A addatur, factumque ab 180 ſubtrahatur, reſiduum dabit ſinum tertium anguli C. Inventis denique tribus angulis, facile latus AB innoteſcet,

Sin. ang. ſupplem. CBF. Latus opp. = 18 : : ſinus anguli C. Latus AB.

Tab. I. Fig. 28. §. 75. PRo coronide doctrinæ de angulis obtuſis illud accipias velim, nempe: *trianguli obtusanguli* CKA *ſinum ſupplementi* CKB *haberi etiam poſſe pro ſinu anguli obtuſi* AKC.

Ex C demittatur perpendicularis in B, atque eadem cum circini apertura ex punctis A & K deſcribantur arcus GI & DE, ut AG = KD. Rurſum ex G & D demittantur perpendiculares GH & DF, quæ ſint ſinus anguli A & anguli ſupplementi CKB. Erunt itaque triangula ACB & AGH ſimilia; propterea, quod unum angulum nempe A communem habeant; alter vero angulus B & H ſit rectus (§. 86. & 87. *Geomet.*) triangula quoque CKB, & DKF ob eandem rationem ſimilia erunt.

Itaque ſi DF × KC = AC × GH, tunc DF. AC : : GH. KC. ſi vero DF. AC : : GH. KC, tunc etiam DF erit ſinus anguli obtuſi AKC. atqui DF × KC = AC × GH; nam triangula CKB & DKF; itemque ACB & AGH ſunt ſimilia: Igitur CB. DF : : KC. KD. Igitur etiam DF × KC = CB × KD. Præterea CB. AC : : GH. AG = KD; igitur & AC × GH = CB × KD. Denique cum duæ magni-

magnitudines æquales uni tertiæ ſint etiam æquales inter ſe, erit $DF \times KC = AC \times GH$. Q.E.D.

# CAPUT VI.

## Problemata Planimetriam, Altimetriam, Bathymetriam ſpectantia, Trigonometriæ ſubſidio reſolvuntur; & mappæ geographicæ tam univerſales, quam particulares adornantur.

### PROBLEMA I.

§. 76. *PRofunditatem vacui putei AB menſurare.* Tab. I.

Menſuretur primum diameter AC, ſitque v. g. 8 pedum, tum ope Aſtrolabii (§. 110. *Geomet.*) inveniatur angulus $ACB = 84^{\circ}.\,59'$; erit itaque angulus $ABC = 5^{\circ}.\,1'$ (§. 77 *Geomet.*) & angulus BAC erit rectus; Fiat igitur poſitio: ſicut ſe habet ſinus anguli B $5^{\circ}.\,1'$ ad latus $AC = 8$: ita ſe habet ſinus anguli C $84^{\circ}.\,59'$. ad latus quæſitum AB. Fig. 29.

| | | |
|---|---|---|
| Sin. ang. $5^{\circ}.\,1'$. | Latus AC | Sinus anguli $84^{\circ}.\,59'$. |
| 8744. 55 | 8 pedum. | 99616. 93. |

Facta operatione per regulam *trium* (§. 79. *Arithm.*) prodibit 91; ita ut latus AB, ſeu profunditas putei ſit 91 pedum.

§. 77. PEr Logarithmos fit hac ratione:

| | | |
|---|---|---|
| Log. ſin. $5^{\circ}.\,1'$. | Log. 8. ped. | Log. ang. $84^{\circ}.\,59'$. |
| 8. 9417376 | 0. 9030900 | 9. 9983332 |
| | | 0. 9030900 add. |
| | | 10. 9014232 |
| | | 8. 9417376. ſubt. |
| | | 1. 9596856 |

Hic

Hic logarithmus 1. 9596856 in Tabula *Brigii* proxime æqualis eſt numero abſoluto $91^{\circ}$; quod notat latus AB 91 pedes compleƈti.

## PROBLEMA II.

*Tab. I. Fig. 30.* §. 78. *Sit gaza nautica* FGMN, *ſupra cujus tectum in puncto* B *ſupereemineat incumbens vectis navalis* BD; *ita ut neque reliqua vectis pars* CB *ob gazam obſtantem videri, neque etiam perpendicularis* BA *adiri poſſit, propterea quod punctum* B *ſummitas tecti ſit, utrinque inter muros conſurgentis. Invenienda itaque ſit primum altitudo gazæ* BA; *tum diſtantia horizontalis* AX; *item magnitudo vectis ſupereminentis* BD; *altitudo* DS; *nec non magnitudo vectis inviſibilis* CB; *ac tandem diſtantia a linea perpendiculari* CA.

Primum itaque aſtrolabii ope (§. 110 *Geomet.*) in puncto X conſiſtens geometra exploret angulum AXB = $44^{\circ}$; itemque angulum AXD = $63^{\circ}.\ 30'$. Rurſus aſtrolabio in Z poſito, & quidem ut linea recta ſit AXZ, menſuretur diſtantia XZ = 21 ped. atque in eodem puncto Z capiatur angulus AZD = $44^{\circ}.\ 30'$; itemque angulus AZB = $29^{\circ}$, & angulus etiam SZD, itidem $44^{\circ}.\ 30'$.

Jam inquiratur in perpendicularem inacceſſibilem BA; & quidem tam angulus AZB = $29^{\circ}$, quam angulus AXB = $44^{\circ}$ ſubtrahatur a ſinu toto, id eſt, a 90 gradibus; ex priore reſtabuut 61 gradus pro angulo ABZ*; ex poſteriori vero 46 gradus pro angulo ABX (§. 14). Utriusque anguli $61^{\circ}$, & $46^{\circ}$ aſſumantur tangentes, noteturque differentia tangentium.

Si-

Sinus $61^{\circ}$ tangens 180404. 78

Sinus $46^{\circ}$ tangens 103553. 03

76851. 75 differentia.

Huic tangentium differentiæ in tabulis reſpondent $37^{\circ}. 32'$. quorum logarithmus eſt 9. 8855035 ; itaque inſtituatur regula proportionis (§. 42) : ſicut ſe habet differentia tangentium $37^{\circ}. 32'$ ad latus XZ = 21 pedum ; ita ſe habet ſinus totus = $90^{\circ}$ ad latus, ſeu altitudinem AB. Fiat per logarithmos

logar. differentiæ $37^{\circ}. 32'$. logar. XZ = 21 ped. logar. ſinus tot.

| | | |
|---|---|---|
| 9. 8855035 | 1. 3222193 | 10. 0000000 |
| | 10. 0000000 add. | |
| | 11. 3222193 | |
| | 9. 8855035 ſubt. | |
| | 1. 4367158 | |

Qui logarithmus 1. 4367158 in tabula *Brigii* reſpondet proxime numero abſoluto 27 ped. 3. digit. 3. lin. (§. 53). ita ut latus, ſeu altitudo perpendicularis AB ſit 27 ped. 3 digit. 3 lin.

§. 79. Porro inveniatur latus, ſeu altitudo DS : angulus nempe $44^{\circ}. 30'$ ſubtrahitur ab angulo recto 90 graduum ; remanebunt $45^{\circ}. 30'$ pro angulo SDZ (§. 14). Sic pariter angulus SXD = $63^{\circ}. 30'$ ſubtrahatur a 90 gradibus, & remanebit angulus SDX = $26^{\circ}. 30'$.

Sinus anguli $45^{\circ}. 30'$ tangens 101760. 74
Sinus anguli $26^{\circ}. 30'$ tangens 49858. 16

51902. 58 differentia

Et hæc differentia tangentium 51902. 58 correſpondet in tabulis $27^{\circ}. 25'$, ſeu logarithmo tangentis 9. 7149329.

§. 80. NUnc inquiratur latus, ſeu altitudo DS per regulam proportionis (§. 42): ſicut ſe habet tangentium differentia $27^{\circ}, 25'$, ad latus XZ = 21 pedum; ita ſe habet ſinus totus 90 graduum ad latus DS. Et quidem faciliori modo per logarithmos.

| log. tang. different. $27^{\circ}. 25'$. | log. XZ = 21. | log. ſinus tot. |
|---|---|---|
| 9. 7149329 | 1. 3222193 | 10. 0000000 |
| | 10. 0000000 add. | |
| | 11. 3222193 | |
| | 9. 7149329 ſubtract. | |
| | 1. 6072864 | |

Qui logarithmus 1. 6072864 in tabula Brigii prope reſpondet numero abſoluto 40 ped. 4 digit. 6 lin. (§. 47) eritque latus DS = 40 ped. 4. digit. 6 lin.

§. 81. NUnc procedatur ad inquiſitionem baſeos ſeu lateris SZ per regulam proportionis, dicendo: ſic ſe habet ſinus anguli SZD $44^{\circ}. 30'$ ad latus DS = 40 ped. 4 digit. 6 lin. ſicut ſe habet ſinus anguli SDZ = $45^{\circ}. 30'$. ad latus SZ. Fiat per logarithmos

log.

| | | |
|---|---|---|
| log. ſin. 44°. 30′ | log. DS = 40 ped. 4 digit. 6 lin. | log. ſin. 45°. 30′ |
| 9. 8456618 | 1. 6072864 | 9. 8532421 |
| | 9. 8532421 addit. | |
| | 11. 4605285 | |
| | 9. 8456618 ſubtract. | |
| | 1. 6148667 | |

Qui logarithmus 1. 6148667 in tabula Brigii reſpondet numero abſoluto 41 ped. 2. digit. 9. linearum; Erit itaque baſis, ſeu latus SZ = 41 ped. 2 digit. 9 lin.

§. 82. Rurſus inquiratur diſtantia inacceſſibilis AX, & quidem per talem poſitionem: ſicut ſe habet tangens anguli AXB = 44° ad latus AB = 27 ped. 3. dig. 3. lin. ita ſe habet tangens anguli ABX = 46° ad latus AX. Fiat per logarithmos.

| | | |
|---|---|---|
| logarith. tang. 44° | log. 27 ped. 3 dig. 3 lin. | logar. tang. 46°. |
| 9. 9848372 | 1. 4367158 | 10. 0151628 |
| | 10. 0151628 addit. | |
| | 11. 4518786 | |
| | 9. 9848372 ſubtract. | |
| | 1. 4670414 | |

Qui logarithmus in tabula Brigii notat latus AX = 29 ped. 3. digit. 1 lin.

§. 83. Pergatur ad inquiſitionem baſeos ſeu lateris AZ, formando hanc poſitionem: ſicut ſe habet ſinus anguli AZB = 29° ad latus AB = 27 ped. 3 dig. 3. lin. ita ſe habet ſinus anguli ABZ = 61° ad latus quæſitum AZ. Per logarithmos

| | | |
|---|---|---|
| logarith. sinus $29^{\circ}$. | log. 27 ped. 3 dig. 3 lin. | logarith. $61^{\circ}$ |
| 9. 6855712 | 1. 4367158 | |
| | 9. 9418193 addit. | 9. 9418193. |
| | 11. 3785351 | |
| | 9. 6855712 subtract. | |
| | 1. 6929639 | |

Logarithmus hic 1. 6929639 notat latus AZ = 49 ped. 3. dig. 1. lin.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ab hoc latere | AZ = 49 ped. | 3 dig. | 1 lin. | |
| Subtrahatur latus | SZ = 41. | 2. | 9. | |
| remanebunt | 8. | 0. | 2. | spatium AS = BO |
| Iterum a latere | DS = 40. | 4. | 6. | |
| Subtrah. latus AB seu SO = | 27. | 3. | 3. | |
| remanebunt | 13. | 1. | 3 | latus DO |

§. 84. Cognitis itaque lateribus duobus BO, & DO cum angulo recto O cognoscuntur cæteri anguli D, & B trianguli BOD (§. 42). itemque hypothenusa, seu pars vectis prominens BD (§. 49). cui triangulo BOD simile est triangulum CSD; Cum enim utrumque habeat unum angulum rectum nempe O, & S, angulum vero D communem, habebunt & angulos B & C æquales, ipsaque triangula BOD, & CSD erunt similia (§. 86 *Geomet.*) Itaque ad explorandum latus CS fiat regula proportionis: sicut se habet latus DO = 13 ped. 1. dig. 3 lin. ad latus BO = 8 ped. 0 dig. 2 lin. ita se habebit latus DS = 40 ped. 4 dig. 6 lin. ad latus ignotum CS. Fiat per logarithmos.

| | | |
|---|---|---|
| log. DO = 13 p. 1 d. 3 l. | log. BO = 8 p. 0 d. 2 l. | log. DS = 40 p. 4 d. 6 l. |
| 3. 1182647 | 2. 9041744. | 3. 6072864 |
| | 3. 6072864 addit. | |
| | 5. 5114608 | |
| | 3. 1182647 subtract. | |
| | 2. 3931961 | |

Vel

Vel melius 3. 3931961 logarithmus lateris, ſeu diſtantiæ CS = 24 ped. 7 digit. 2 lin. a quo latere CS = 24 ped. 7 digit. 2 lin. ubi ſubtractum fuerit latus AS, ſeu BO = 8 ped. 0 dig. 2 lin.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 24 ped. | 7 dig. | 2 lin. | |
| | 8 | 0 | 2 | |
| remanebunt | 16 | 7 | 0 | id eſt latus CA, ſeu |

diſtantia vectis C a perpendiculari inacceſſibili BA. Cognitis demum lateribus CA = 16 ped. 7 digit. & AB = 27 ped. 3 digit. 3 lin. invenietur per §. 43 latus CB, ſeu pars vectis inviſibilis.

Atque ex hoc prolixiori problemate ad alia plurima reſolvenda lux affunditur, atque operandi facilitas promovetur.

## PROBLEMA III.

§. 85. *Metallorum foſſores deſcenderunt intra montem altitudine* CA = *Tab. II.*
*23 perticis ; velint jam horizontaliter fodere ; Quæritur ita-* *Fig. 31.*
*que, quanto ſpatio fodere oporteat, ut ex* B *in* A *perveniatur ?*

Primum ex C erigatur lignum CD = 2 perticis, ut nempe libere ex A in B proſpicere liceat ; erit AC + CD = 25 perticis. Ex ſummitate D inveniatur angulus ADB = 54 grad. Jam fiat regula proportionis dicendo : ſicut ſe habet ſinus totus ad latus AD = 25 perticis, ita ſe habet tangens anguli ADB = $54^{\circ}$ ad latus quæſitum AB.

| | | |
|---|---|---|
| Logarith- ſinus tot. | logarith. lat. AD = 25 pert. | log. tang. $54^{\circ}$ |
| 10. 0000000 | 1. 3979400 | 10. 1387390 |
| | 10. 1387390 addit. | |
| | 11. 5366790 | |
| | 10. 0000000 ſubtract. | |
| | 1. 5366790. | |

Hic logarithmus 1.5366790 in Brigii tabula respondet 34 pert. 4 ped. pro latere AB.

## PROBLEMA IV.

Tab. II. Fig. 32. §. 86. *Immmotæ cujuspiam nubis altitudinem metiri.*

Duo observatores in prato plano AB longius a se distantes, alter quidem ex D in punctum nubis C collimans, angulum EDC observet: alter vero ex E in idem punctum nubis C collimans, metiatur angulum DEC. Cognito itaque spatio DE, quod mensurari debet, & Cognitis angulis EDC, DEC innotescit etiam latus EC (§. 15.) Porro cognito angulo DEC innotescit quoque angulus CEF, qui est supplementum ipsius anguli DEC. (§. 60. *Geometr.*) Cognito demum angulo FEC, & recto angulo EFC una cum latere EC mox invento, cognoscitur etiam latus seu altitudo FC.

## PROBLEMA V.

Tab. II. Fig. 33. §. 87. *Distantiam lunæ a terra metiri.*

Astronomus sub æquatore positus v. g. in N advertat tempus, quo luna in suo Zenith posita, perpendicularis fuerit tum suo vertici, tum centro terræ, hocque tempus alteri cuidam astronomo v. g. Viennæ B degenti ex condicto transcribat, qui Viennensis astronomus eo ipso temporis momento juxta exigentiam sui horizontis CD observaverit angulum DBM. Jam formetur triangulum BMA compositum ex radio visuali observatoris Viennensis BM, & radio terræ BA, nempe 859 circiter milliaria, atque radio visuali observatoris in æquatore N constituti, addito terræ radio NA. Igitur quia in hoc triangulo habetur angulus BAN, seu BAM, mensuratur quippe spatio, inter Viennam, & locum illum æquatoris intercepto, quod cognitum est, facile erit etiam cognoscere latus NM; nam sicut sinus anguli AMB se habet ad latus AB nempe semidiametrum terræ = 859 mill. ita sinus anguli BAM se habet ad latus MB seu distantiam lunæ ab urbe Vienna.

PRO-

## PROBLEMA VI.

§. 88. *Distantiam solis a terra metiri.*

Observetur, luna A tum, cum perfecte semiplena est, ab astronomo in C posito; Igitur eo momento, quo luna A a sole B semiplene illuminatur, radius solis BA, cum radiis lunæ AC, respectu observatoris in C, angulum rectum constituit. Observetur præterea angulus ACB; Atque sic cognito utroque angulo BAC, & ACB, itemque latere CA cognito *ex problemate mox præcedente*, facile innotescet distantia solis, seu latus BC; sicut enim sinus anguli ABC ad latus AC, ita sinus anguli recti BAC ad latus BC, quæ distantia solis a terra passim ad 22374 semidiametros terrestres protenditur. *Tab. II. Fig. 34.*

§. 89. PLura ejuscemodi problemata beneficio scalæ, & transportatorii soluta referuntur (§. 119. & seqq. *Geometr.*) quæ etiam facile huc applicari possunt, & trigonometriæ legibus resolvi. Est autem *Trigonometrica* hæc per calculos operandi ratio multo securior, multoque præstantior, quam ea, quæ in simplici geometria fit per lineas, propterea quod lineæ & anguli in chartis facile detorqueantur, numerorum autem invariabilis sit in operando conditio; tum quod pauxilla linearum in chartis detorsio, in vastis camporum spatiis magnas aberrationes involvat. Qod autem in ipsas operationes Trigonometricas errores irrepant id non emnino attribuendum est infallibilibus Trigonometriæ præceptis, sed, quod *datæ* ut plurimum vel incertæ sint, vel omnino falsæ, ut deinde necessum sit ex uno falso alterum progenerari.

## PROBLEMA VII.

§. 90. *Mappam Geographicam delineare.*

Mappa *Generalis* complectitur cujusdam territorii, aut Provinciæ figuram, in charta delineatam, cum viis tantummodo; & locis quibusdam præcipuis, cum mappa *particu-*

*laris*

*laris* minora quæque illius territorii diſtinčte exhibeat, veluti: *Viarum ductum, magnitudinem, & figuram Civitatum, arcium, pagorum, fluminum, pontium, ſilvarum* &c.

*Tab. II. Fig. 35.* §. 91. VElit itaque geometra quispiam mappam *generalem* adoriri, conſtitutus in inſula quadam; deligat in illa inſula ſpatium AB tanquam baſim pluribus triangulis formandis idoneam, cujus menſuram cognitam habeat ex prævia per catenam dimenſione. Tum aſtrolabio in A collocato notet angulos CAB, DAB, EAB, itemque angulos FAB, GAB, KAB. Transferat aſtrolabium in punčtum B, notetque rurſum angulos EBA, DBA, CBA, itemque FBA, GBA, KBA; conſtabit ſic de ſingulorum triangulorum duobus angulis, & uno latere; v. g. de trianguli AEB duobus angulis CAB, & EBA; itemque interječto latere AB de trianguli AFB duobus angulis BAF, & FBA, cum noto latere AB, & ſic de aliis. Igitur, & alia omnia triangulorum latera ignota, ignotique anguli innoteſcent trigonometricis legibus (§. 71, & 72.)

§. 92. POrro quoniam latus BE, & BD innotuit trigonometrica operatione, aſſumatur interjacens his duobus lateribus angulus EBD, & innoteſcet quoque tertium latus DE (§. 68.) ſic & alia cunčta exteriora latera DC, CF &c. innoteſcunt. Tum demum cognitis cunčtis, & angulis, & lateribus, latera quidem ſcalæ geometricæ beneficio (§. 47. *Geometr.*) anguli autem ope tranſportatorii (§. 108. *Geometr.*) ſuper charta delineentur, ut mappam exhibeant.

§. 93. QUod ſi animus ſit, generalem mappam ultra protendere, aſſumatur latus aliud, jam cognitum v. g. GK pro baſi, atque ſuper ea menſurentur plurima alia triangula, quemadmodum ſuper baſi AB mox deſcripta fuerunt, ſicque fiet, ut vaſtiſſimi territorii, & Provinciæ totius generalis idea non difficili negocio delineetur; habita tamen ſemper ratione lineæ horizontalis (§. 138. & ſeqq. *Geom.*)

§. 94.

§. 94. MAppa *particularis* eadem fere ratione describitur, nisi quod minutiora quæque accuratius attendantur, & omnis figura camporum, fluviorum, civitatum, arcium delineetur.

§. 95. IChnographica Urbium, aut pagorum delineatio sic instituitur: Externa latera AB, BC &c. cum longitudine linearum EA, EB &c. mensurantur, & anguli intercep i notantur; At si locus neque pertransiri, neque commode ex altero in alterum terminum prospici queat, assumantur tantummodo latera externa AB, BC, CD &c. cum angulis iuternis FAB, ABC &c. quæ tandem omnia scalæ beneficio in chartam transferri queant. *Tab. II. Fig. 36.*

# CAPUT VII.

## De Trigonometria Sphærica.

§. 96. TRigonometria *sphærica* docet triangula sphærica resolvere; sunt autem triangnla spærica, quæ ex arcubus circulorum componuntur, atque in superficie cujusdam sphæræ descripta concipiuntur; Ideoque cum arcus ejuscemodi planis quidem delineationibus depingantnr, non tamen sat comparatis ad facilem explicationem, juverit pro exactiori sphæricæ qua contemplationis, qua praxeos subsidio in armillari sphæra triangulorum sphæricorum schemata tyronibus exhibere.

§. 97. ANgulus sphæricus fit, cum quidam arcus circuli maximi sphæræ supra alterius maximi circuli axem cadit; tum quippe duos angulos sphæricos rectos efficiet, aut duobus rectis æquales, quemadmodum dictum est de rectilineis (§. 60. *Geometr.*) sic arcus HD, DG efficiunt angulum sphæricum æquivalentem angulo rectilineo OD, DM; Et quemadmodum de angulis rectilineis dictum est (§. 62. *Geom.*) *Tab. II. Fig. 37.*

Uu pro-

productione linearum ultra angulos fieri angulos ad verticem oppositos æquales, ita hoc idem in sphæricis contingit; sic si arcus HD continuetur post D, angulus ad verticem oppositus erit æqualis angelo FDH. Porro mensura angulorum sphæricorum est arcus magni circuli, qui a concursu aliorum duorum intercipientium angulorum abest 90 gradibus. Denique si plana laterum sibi invicem perpendicularia fuerint, efficietur angulus rectus, ut fere dictum est de rectis lineis (§. 54. *Geometr.*)

§. 98. SI latus trianguli sphærici fuerit *quadrans*, erit angulus, hinc lateri oppositus, *rectus*; si duo latera quadrantes fuerint, anguli duo oppositi erunt recti; tertium vero latus minus erit mensura minoris anguli oppositi. Sic cum latera seu arcus DS, DC sint quadrantes, anguli DSC, DCS erunt recti, itemque anguli CAS, CAD erunt recti, recta DA erit perpendicularis toti plano SAC, atque etiam plana arcuum DS, DC erunt perpendicularia plano arcus SC.

## PROPOSITIO I.

*Tab. II. Fig. 38.* §. 99. *GRadus anguli invenire, inter lineas, alteram quidem rectam* AC, *alteram curvam concavam* BC *intercepti.*

Arcus BC quæratur centrum D (§. 231. *Geometr.*) Ex hoc centro D demittatur recta in C: Ipsi DC ducatur perpendicularis CX (§. 27. *Geometr.*) Tum beneficio *transportatoris* quæratur angulus ACX, qui erit angulus proxime æqualis angulo ACB.

*Tab. II. Fig. 39.* §. 100. COnsimili ratione deprehenditur angulus inter alteram rectam ON, alteram curvam convexam MN interceptus. Arcus MN inveniatur centrum X; Ex hoc centro ducatur recta in XN; In hujus rectæ puncto N erigatur perpendiculis ZN (§. 24. *Geometr.*) mensureturque per *transportatorem* angulus ONZ. hic dabit proxime gradus trianguli ONM.

PRO-

## PROPOSITIO II.

§. 101. *MEtiri angulum duarum curvarum concavarum* A B, & C B *concurrentium.* Tab. II. Fig. 40.

Utriusque arcus A B, & C B inveniatur centrum E, & D (§. 264. *Geometr.*) Ex utroque centro ducatur recta in punctum concurrentiæ B nempe D B, & E B. Super utramque rectam D B, & E B ex centro B erigatur perpendicularis, nempe B G, & B F; mensuretur angulus rectarum F B G, qui erit proxime æqualis angulo curvarum A B C.

§. 102. ANgulus curvarum convexarum A B C eodem prorsus modo deprehenditur, eritque proxime æqualis angulo M B N. Tab. II. Fig. 41.

Quod si duæ diversæ curvæ lineæ altera nempe concava C B, altera convexa A B, concurrant, invenietur consimili methodo earum angulus, angulo invento G E F proxime æqualis. Tab. II. Fig. 42.

## PROPOSITIO III.

§. 103. *TRianguli sphærici* H E F *quod libet latus est minus semicirculo.* Tab. II. Fig. 43.

Invento centro arcus H E, & H F producantur trianguli sphærici H E F latera H E, & H F, donec in G concurrant, erit arcus H F G semicirculus, qui major est, quam arcus H F.

## SCHOLION.

§. 104. MAximi circuli transeuntes per polum alterius circuli rectos faciunt cum ipso angulos; & vicissim si circuli maximi rectos angulos faciunt cum altero circulo, transibunt per polum illius; Maximus quippe circulus a polo suo distat intervallo quadrantis.

## COROLLARIUM I.

§. 105. CUm inter duo quælibet puncta, in superficie sphæræ constituta, arcus maximi circuli sit via brevissima; hinc quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora;
Fig. ead. & GE+GF major quam EF.

## COROLLARIUM II.

§. 106. CUm duo trianguli sphærici latera nempe GE+GF majora sint, quam EF per mox præcedens *Corollarium I.* erunt omnia trianguli sphærici HEF latera minora, quam circulus; addendo quippe EH+HF, erit GEH+GFH circulus, qui sit major, quam tria illa latera EH+EF+FH.

## PROPOSITIO IV.

Tab. II. Fig. 44. §. 107. *SI ex trianguli* ABC *angulis maximi circuli ducantur, constituent laterum poli* KDH *aliud triangulum, quodi erit supplementum trianguli* ABC.

Maximus circulus poli A sit DEFH, poli B sit circulus maximus GHKL, denique poli C sit maximus circulus DNMK. igitur AH erit = quadranti, & BH pariter erit quadrans (§. 104.) H vero erit polus circuli AB. Porro cum C sit polus circuli DNMK, & B sit polus circuli GHKL, erunt CK, &BK quadrantes, & circuli BC erit polus K. Ipsius quoque circuli AC erit polus D, cum pariter CD, & AD sint quadrantes.

Jam quia KN = quadranti, & DM pariter = quadranti (§. 104.) erit KN+DM, seu potuis DK+NM = semicirculo, seu quadrantibus duobus. Adeoque mensuræ anguli BCA, seu arcus NM erit DK supplementum ad semicirculum. Sic etiam, quia HE=DF = quadranti, erunt HE=DF seu DH+FE = semicirculo seu duobus quadrantibus; &

arcus

arcus FE, qui est mensura anguli BAC supplementum erit DH. Denique quia GK = HL = quadranti, erunt GK + HL, seu potius GL + HK = duobus quadrantibus, & HK erit supplementum arcus GL, tanquam mensuræ anguli ABC ad semicirculum. Q. E. D.

## COROLLARIUM.

§. 108. QUoniam triangulorum supplementa sunt æquilatera; igitur etiam erunt æquiangula; & ipsa pariter triangula æquiangula erunt etiam æquilatera.

## PROPOSITIO V.

§. 109. *TRes anguli triangulorum sphæricorum sunt duobus rectis majores; minores tamen sex rectis.* Fig. ead.

Etenim tres angulorum A, B, C mensuræ una cum lateribus trianguli DHK tres semicirculos constituunt (§. 107); Atqui tria latera trianguli DHK sunt minora quam circulus seu duo semicirculi (§. 106.): Igitur tres mensuræ angulorum A, B, C sunt majores semicirculo, & anguli ipsi A, B, C duobus rectis majores erunt. Porro cum in quolibet triangulo anguli externi una cum internis angulis sex rectos constituant; erunt interni anguli soli sex rectis minores.

§. 110. TAbula Analytica Triangulorum Sphæricorum Rectangulorum.

| | Data præter rect. | Quæsita | Operatio. |
|---|---|---|---|
| I | Latus AC & angul. C. | Ang. B | Sicut radius f. sinus totus ad Cosinum CA; ita sin. C ad Cos. B ejusd. speciei cum CA. R. cos. CA :: sin. C. cos. B. |

| | Data præter rect. | Quæsita | Operatio. |
|---|---|---|---|
| 2 | Lat. AC ang. B. | Ang. C. | Coſ. CA. R. : ; coſ. B. ſin. C. |
| 3 | Anguli B & C | Lat. AC | Sin. C. coſ. B : : R. coſ. CA. |
| 4 | Latera BA & CA | Lat. BC | R. coſ. BA : : coſ. AC. coſ. BC. |
| 5 | Latera BA & BC | Lat. AC | Coſ. BA. R : : coſ. BC. coſ. CA. |
| 6 | Latera BA & CA | Ang. B | Sin. BA. R. : : tang. CA. tang. ang. ABC. |
| 7 | Lat. BA ang. B. | Latus AC | R. ſin. BA : : tang. ang. B. tang. AC. |
| 8 | Latus AC ang. B. | Lat. BA. | Tang. B. R. : : tang. CA. ſin. BA. |
| 9 | Lat. BC ang. C | Lat. AC | R. coſ. C : : tang. BC. tang. CA. |
| 10 | Lat. AC ang. C | Lat. BC | Coſ. C. R : : tang. AC. tang. BC. |
| 11 | Lat. BC, & AG | Ang. C | Tang. BC. R : : Tang. CA coſ. ang. C. |

Data

| | Data præter rect. | Quæsita | Operatio. |
|---|---|---|---|
| 12 | Latus B C & angul. B. | Latus A C | R. ſin. B C : : ſin. B. ſin. A C. |
| 13 | Latus A C angul. B | Latus B C | Sin. B. ſin. A C : : R. ſin. B C. |
| 14 | Latera B C & A C | Ang. B | Sin. C C. R : : ſin. A C. ſin. B. |
| 15 | Ang. B & C | Lat. B C | Tang. C. R : : cotang. B. coſ. B C. |
| 16 | Lat. B C ang. C | Ang. B | R. coſ. B C : : tang. C. cotang. B. |

Atque ad hos ſexdecim caſus omnes triangulorum ſphæricorum ractangulorum propoſitiones revocantur.

## PROPOSITIO VI.

§. 111. *Dato latere* A C $= 60^{\circ}, 49'$, *& angulo* C $= 24^{\circ}, 40'$ *cum angulo recto* A, *invenire angulum* B, *ipſi lateri* A C *oppoſitum*. *Tab. II. Fig. 45.*

| R. ſeu ſin. tot. | Coſ. C A, : : | ſin. C. | Coſin. B |
|---|---|---|---|
| $90^{\circ}$ | $60^{\circ}. 49'$ | $24^{\circ}. 40'$ | |
| Log. 10. 0000000 | Log. 9. 6880688 | Log. 9. 6204884 | |
| | | 9. 6880688 *Addit.* | |
| | | 19. 3085572 | |
| | | 10. 0000000 *Subtr.* | |
| | | 9. 3085572 | |

Hic

Hic vero logarithmus 9. 3085572 in Tabulis Vlacquianis proxime æqualis est $11^\circ.\,44'$. Ideoque cum Cosinus anguli B sit $11^\circ.\,44'$; erit ipse angulus B $78^\circ.\,16'$. nam $11^\circ.\,44' + 78^\circ.\,16' = 90^\circ$.

## PROPOSITIO VII.

§. 112. *Datis duobus angulus* B $= 78^\circ.\,16'$, *&* C $= 24^\circ.\,40'$ *invenire latus* A C.

| Sin. C. | Cos. B | : : | Rad. | Cos. A C |
|---|---|---|---|---|
| $24^\circ.\,40'$ | $78^\circ.\,16'$ | | $90^\circ$ | |
| Log. 9. 6204884. | Log. 9. 3085572 | | Log. 10. 0000000. | |

9. 3085572 *Addit.*

19. 3085572

9. 6204884 *Subtr.*

9. 6880688

Logarithmus hic exprimit cosinum A C, valetque proxime $29^\circ.\,11'$; ideoque ipsum latus A C erit $= 60^\circ.\,49'$.

## PROPOSITIO VIII.

§. 113. *Datis duobus lateribus* B A $= 22^\circ.\,18'$, *&* C A $= 60^\circ\,49'$. *invenire angulum* B *oppositum lateri* C A.

| Sin. B A. | Rad. | : : | Tang. CA. | Tang. B. |
|---|---|---|---|---|
| $22^\circ.\,18'$ | $90^\circ$ | | $60^\circ.\,49'$. | |
| Log. 9. 5791616 | Log. 10. 0000000 | | Log. 10. 2529773. | |

10. 0000000 *Addit.*

20. 2529773

9. 5791616 *Subtr.*

10. 6738157

Lo-

Logarithmus hic 10. 6738157 notat tangentem anguli B, & exprimit gradus 78, minuta 2. Neque enim logarithmi communes Vlacquiani minutias quasque acuratissime designant; sed ad has deprehendendas necessum est prolixiores logarithmos consulere.

## PROPOSITIO IX.

§. 114. *Dato latere* B A $= 22^{\circ}, 18'$, *& angulo* B $= 78^{\circ}. 2'$. *invenire latus* A C *oppositum angulo* B. *Fig. ead.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rad. | Sin. B A. | : : | Tang. B. | Tang. A C. |
| $90^{\circ}$ | $22^{\circ}. 18'$. | | $78^{\circ}. 2'$. | |
| Log. 10.0000000 | Log. 9.5791616 | | Log. 10.6738167. | |
| | | | 9.5791616 *Add.* | |
| | | | 20.2529783 | |
| | | | 10.0000000 *Subtr.* | |
| | | | 10.2529783 | |

Hic logarithmus ipsius A C proxime æqualis esse reperitur $60^{\circ}. 49'$.

## PROPOSITIO X.

§. 115. *Datis duobus angulis* B $= 78^{\circ}. 16'$, *&* C $= 24^{\circ}. 40'$ *invenire latus* B C.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tang. C. | Rad. | : : | Cotang. B. | Cos. B C. |
| $24^{\circ}. 40'$ | $90^{\circ}$ | | $11^{\circ}. 44'$. | |
| Log. 9.6620434 | Log. 10.0000000 | | Log. 9.3174299. | |
| | | | 10.0000000 *Addit.* | |
| | | | 19.3174299 | |
| | | | 9.6620434 *Subtr.* | |
| | | | 9.6553865 | |

Qui logarithmus 9.6553865 cosinum BC $= 26^{\circ}. 53'$ proxime exprimit; Igitur latus BC $= 63^{\circ}. 7'$. Quippe $26^{\circ}. 53' + 63^{\circ}. 7' = 90^{\circ}$.

## PROPOSITIO XI.

§. 116. *Dato latere* BC $= 63^{\circ}. 7'$, *&* *angulo* C $= 24^{\circ}. 40'$. *invenire angulum* B.

| Rad. | Cos. BC | : : | Tang. C. | Cotang. B. |
|---|---|---|---|---|
| $90^{\circ}$ | $26^{\circ}. 53'$. | | $24^{\circ}. 40'$. | |
| Log. 10.0000000 | Log. 9.6553865 | | Log. 9.6620434 | |
| | | | 9.6553865 *Addit.* | |
| | | | 19.3174299 | |
| | | | 10.0000000 *Subtr.* | |
| | | | 9.3174299 | |

Hic logarithmus 9.3174299 cotangentem anguli B notat, æqualem $11^{\circ}. 44'$: Igitur angulus B $= 78^{\circ}. 16'$.

§. 117. ET his quidem finem Mathematicis Institutionibus imponere placuit. Fluet ex his elementis rite perceptis utilitas non mediocris in omnem civilem vitam; quin imo poterunt Physices Tirones sic imbuti ad Physicam accedere securius, atque etiam ad sublimioris Matheseos adyta, DEO conatibus adspirante, opportunius olim transire.

*Finis Institutionum Mathematicarum.*

IN-

# INDEX
## RERUM PRÆCIPUARUM,
### Quæ in Mathematicis hiſce Inſtitutionibus continentur.

## A.

## Q.



## R.

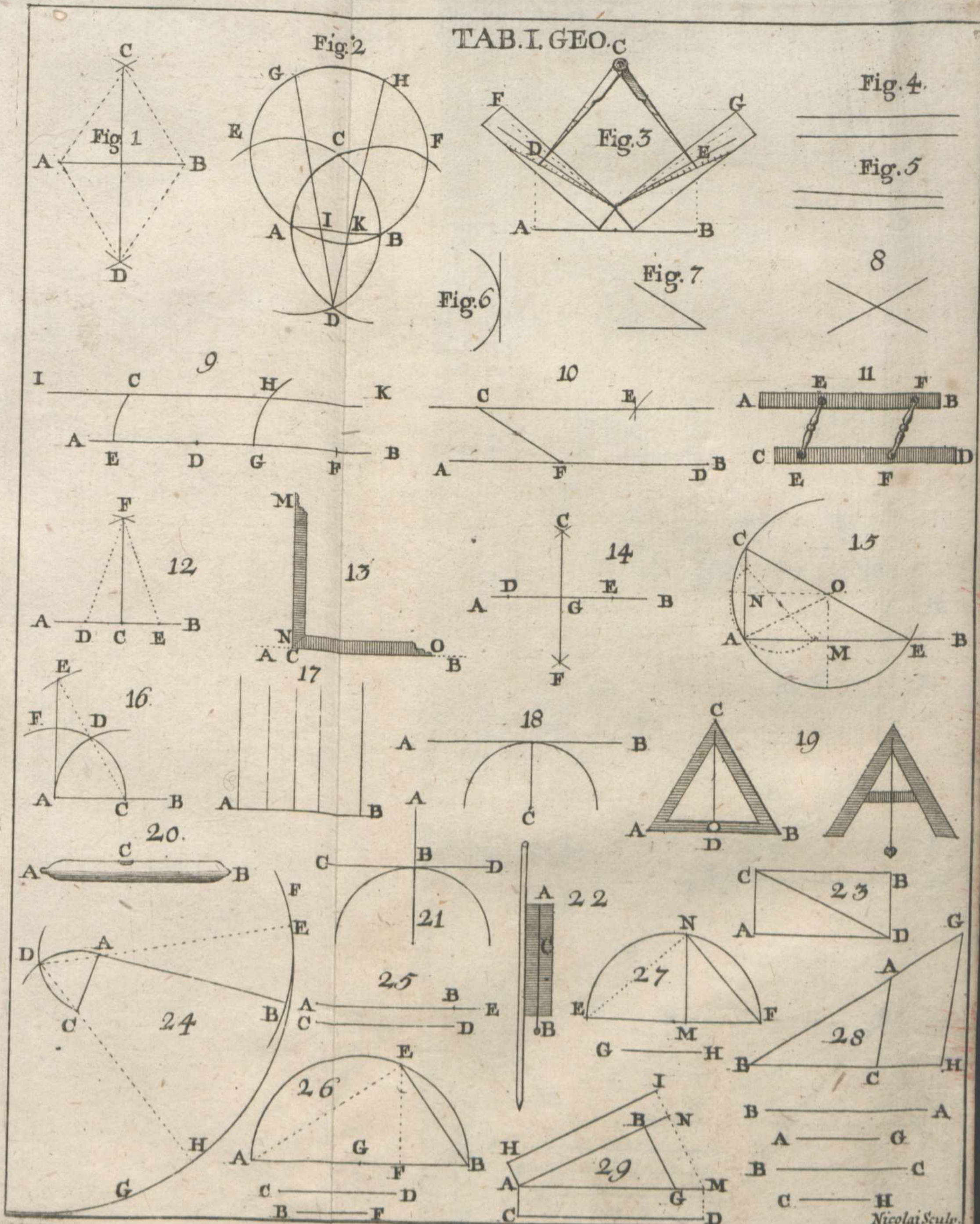


## S.

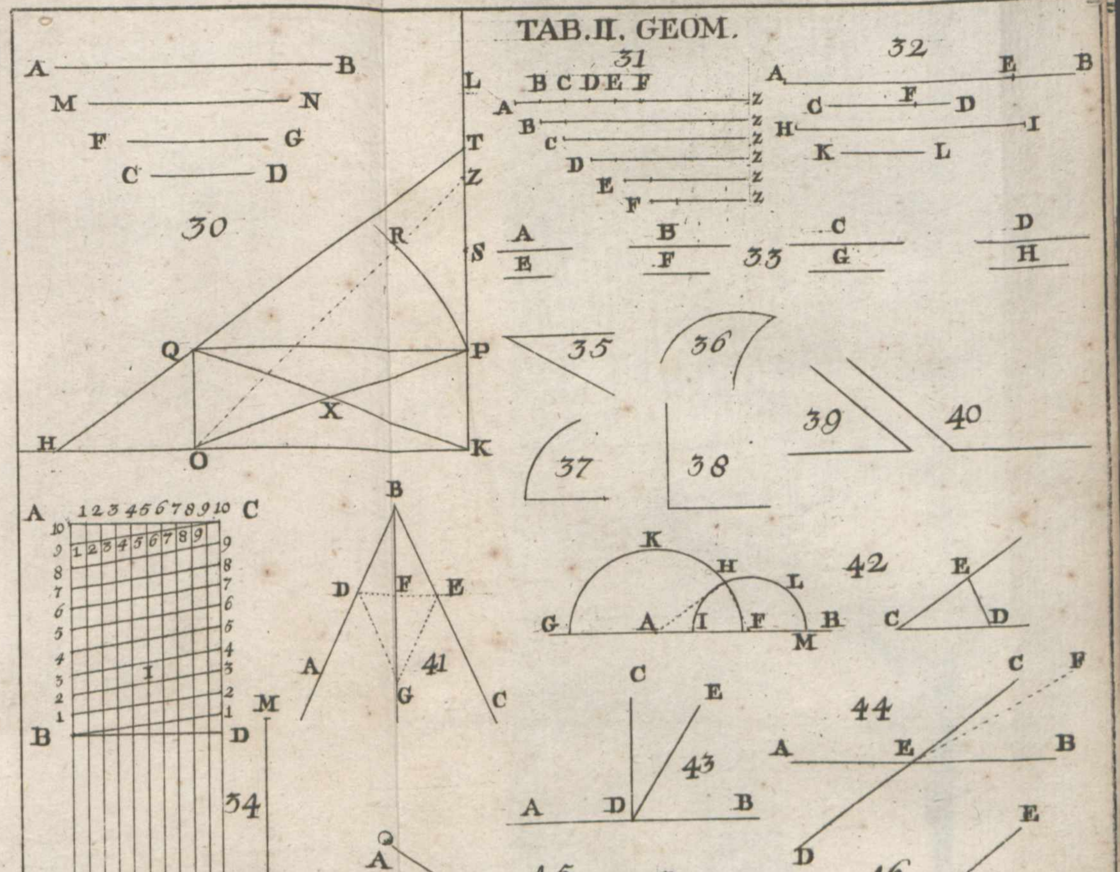


Se-

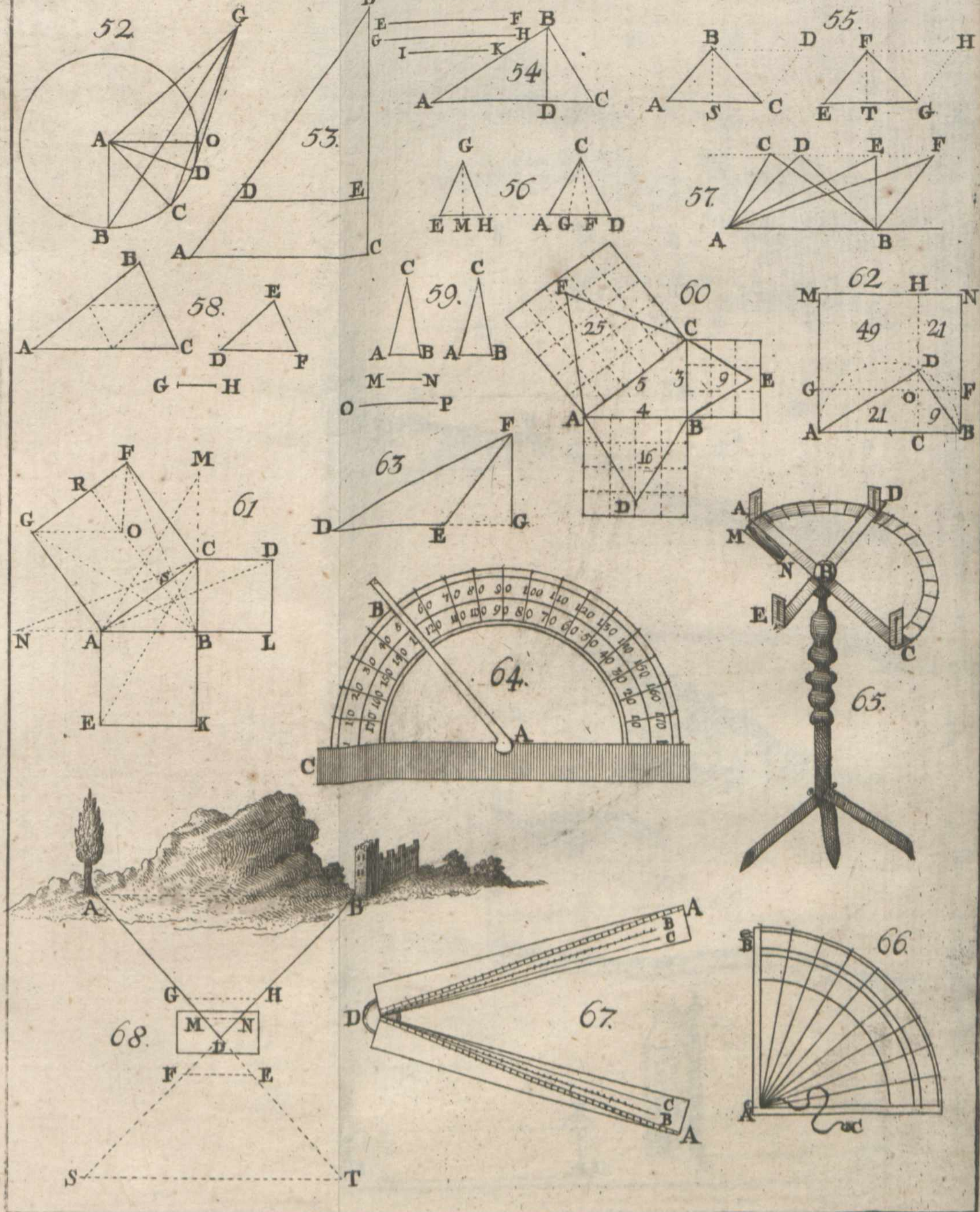
F I N I S.


TAB. I. GEO.
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20.
21
22
23
24
25
26
27
28
29
Nicolai Sculp.

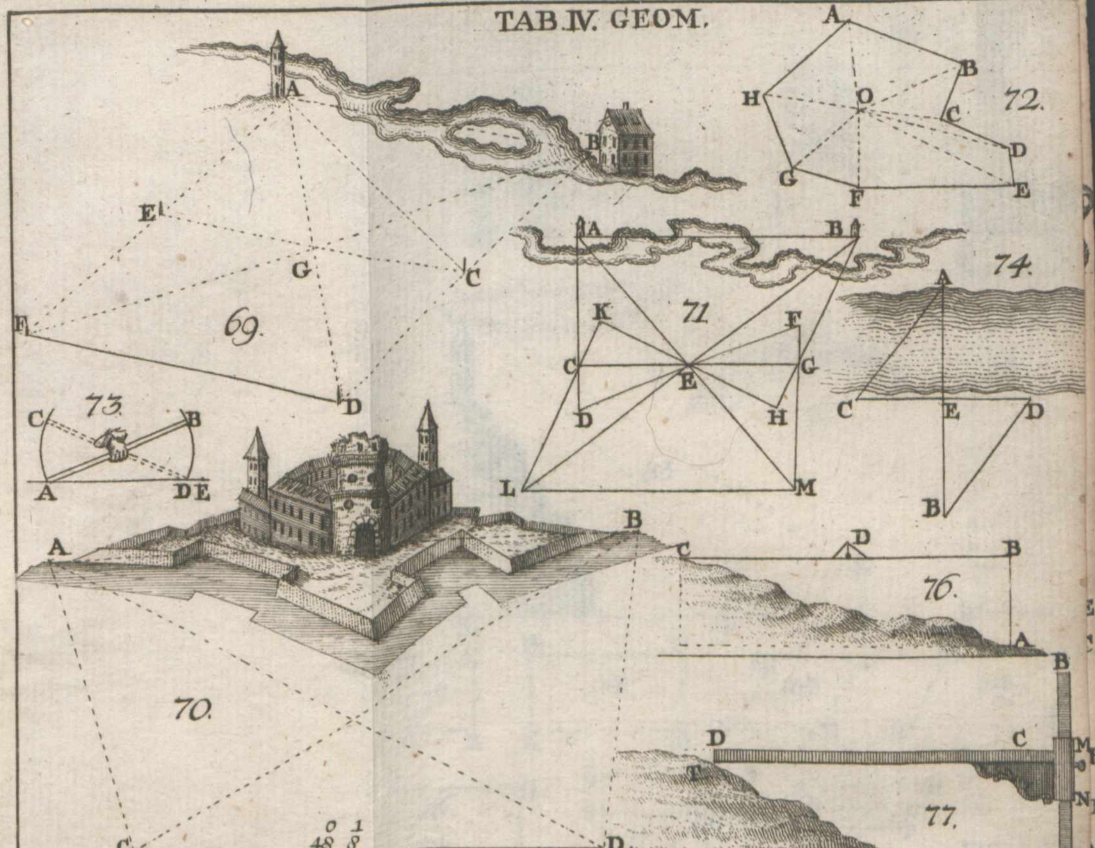
TAB. II. GEOM.



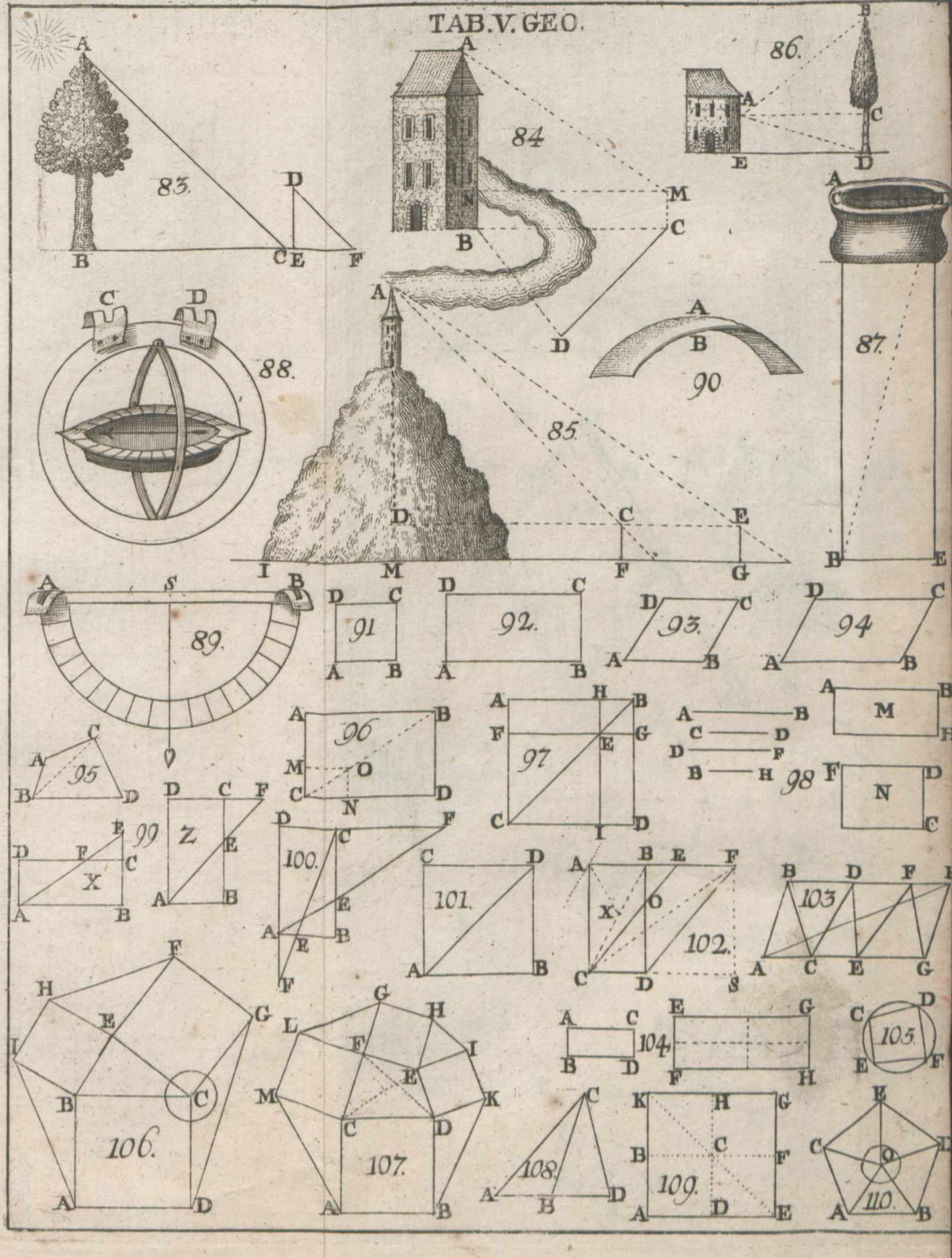
TAB.III. GEO.



TAB. IV. GEOM.

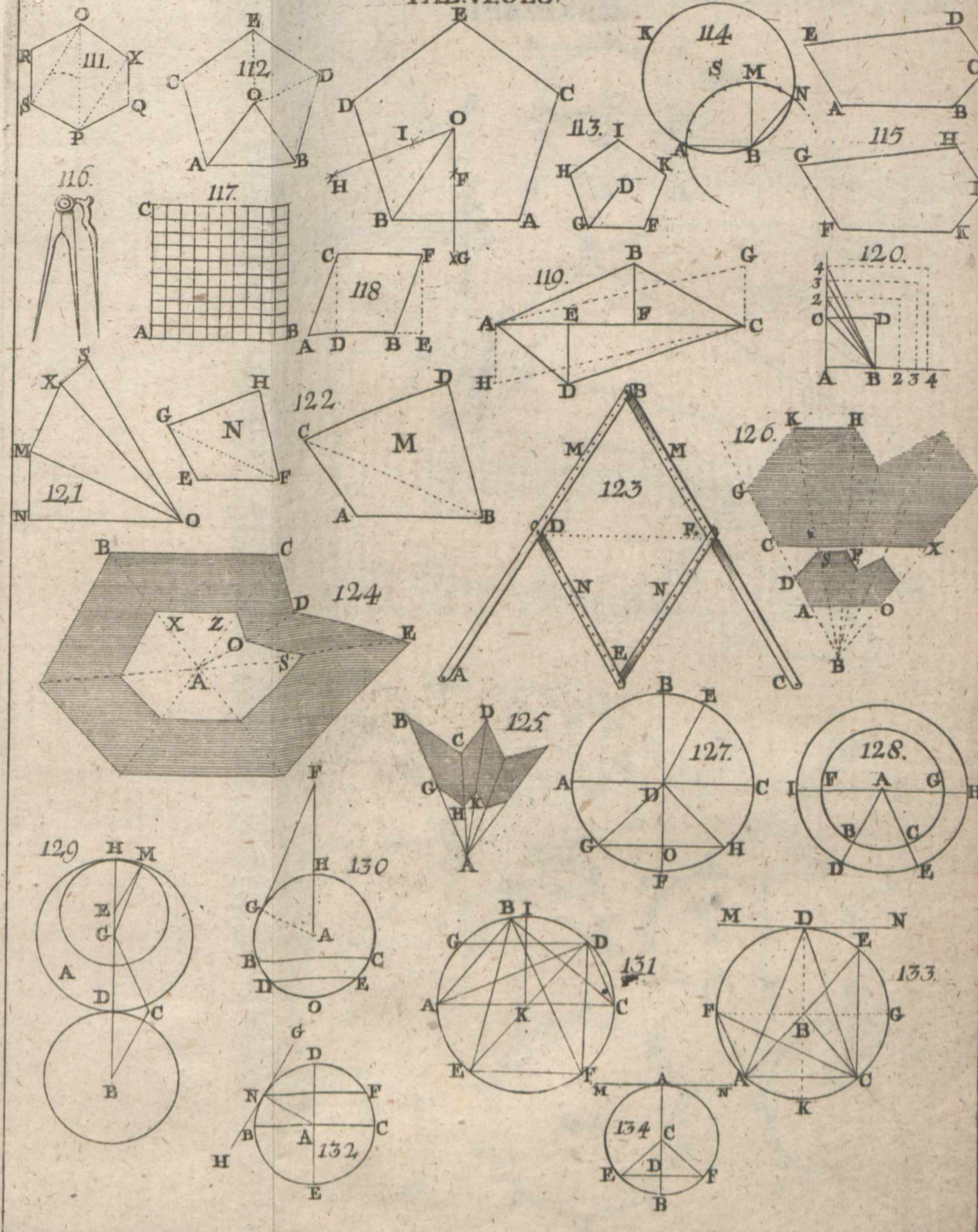


TAB. V. GEO.



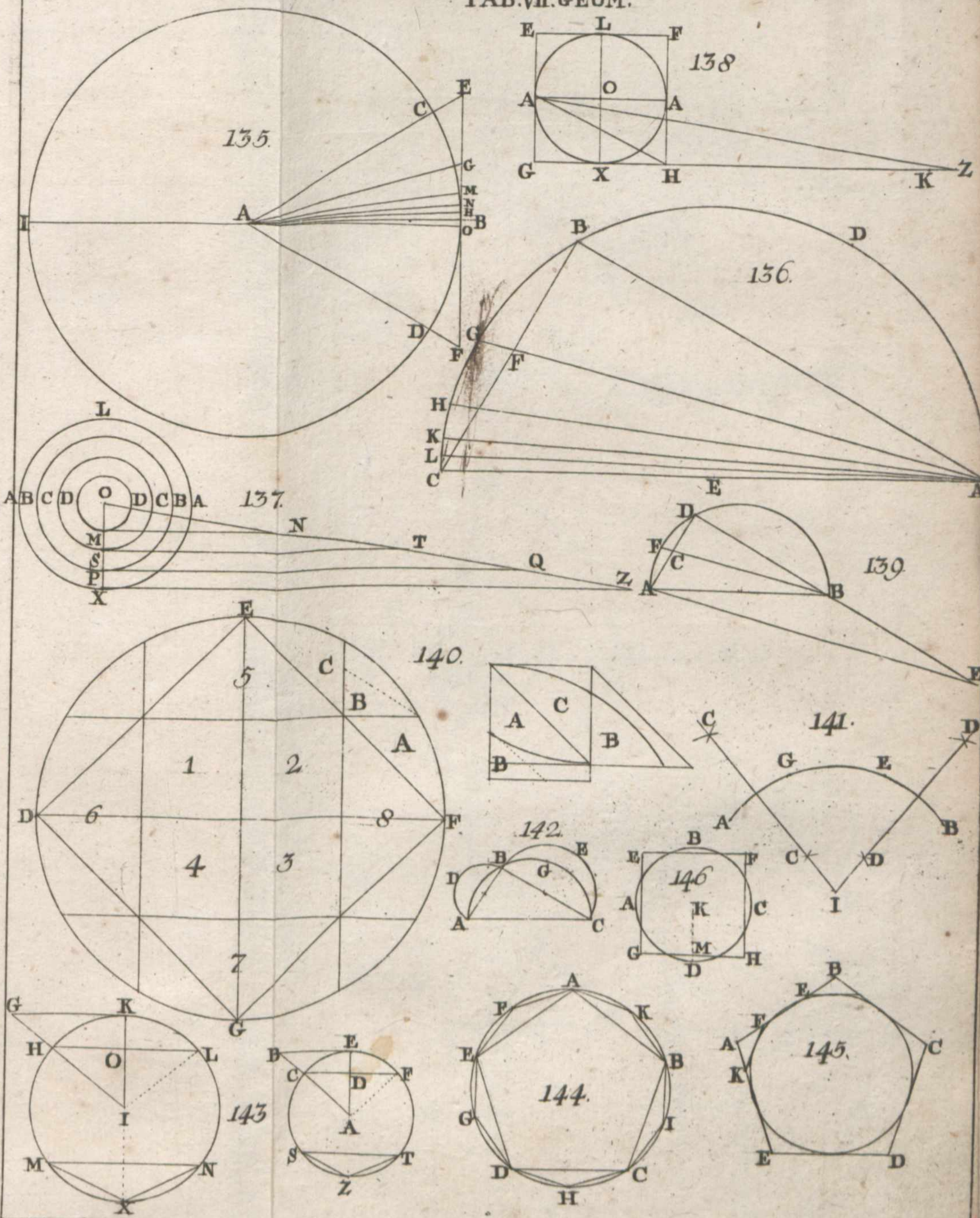
83.
84
85.
86.
87.
88.
89.
90
91
92.
93.
94
95
96
97
98
99
100.
101.
102.
103
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
X
Z
M
N

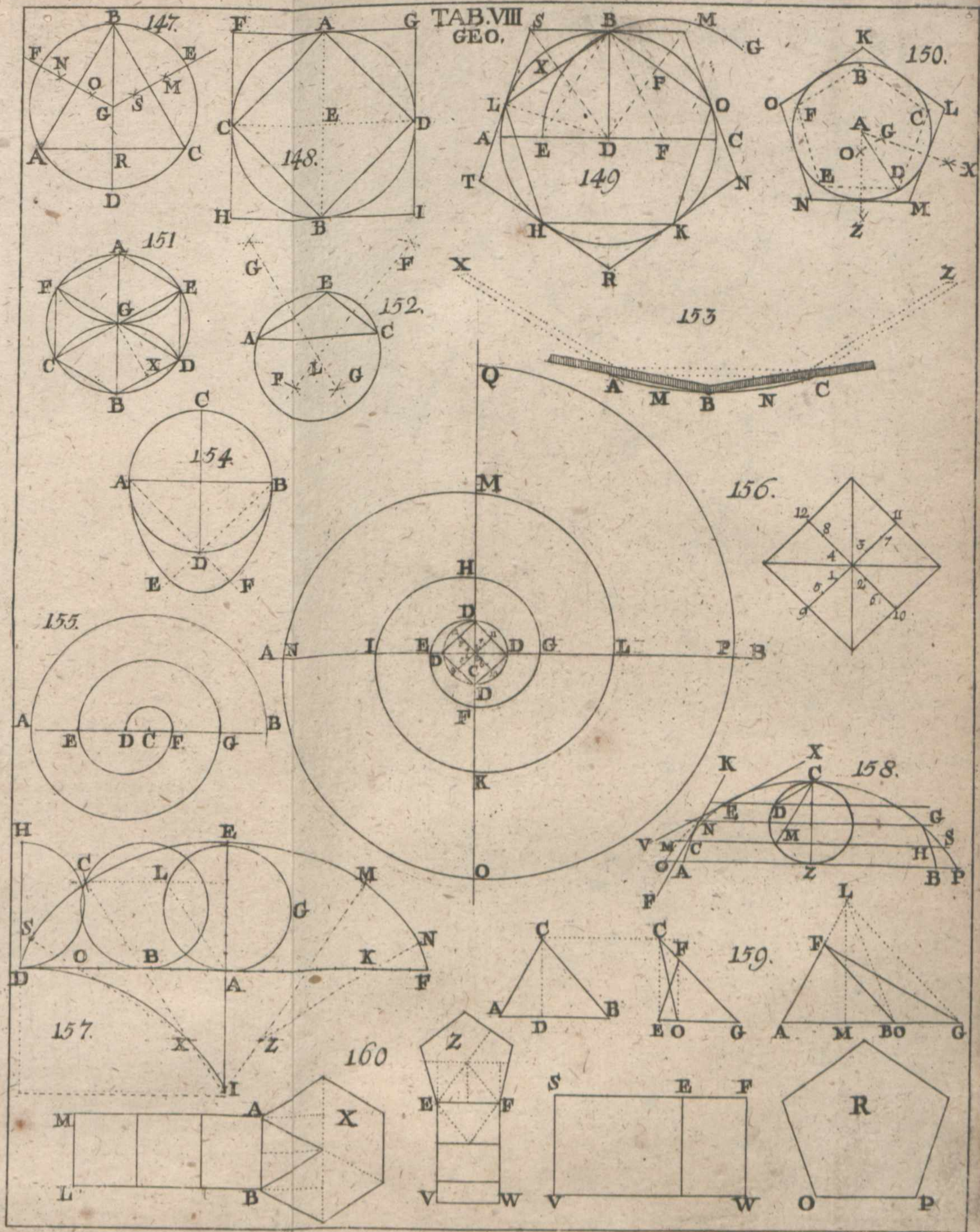
TAB.VI.GEO.



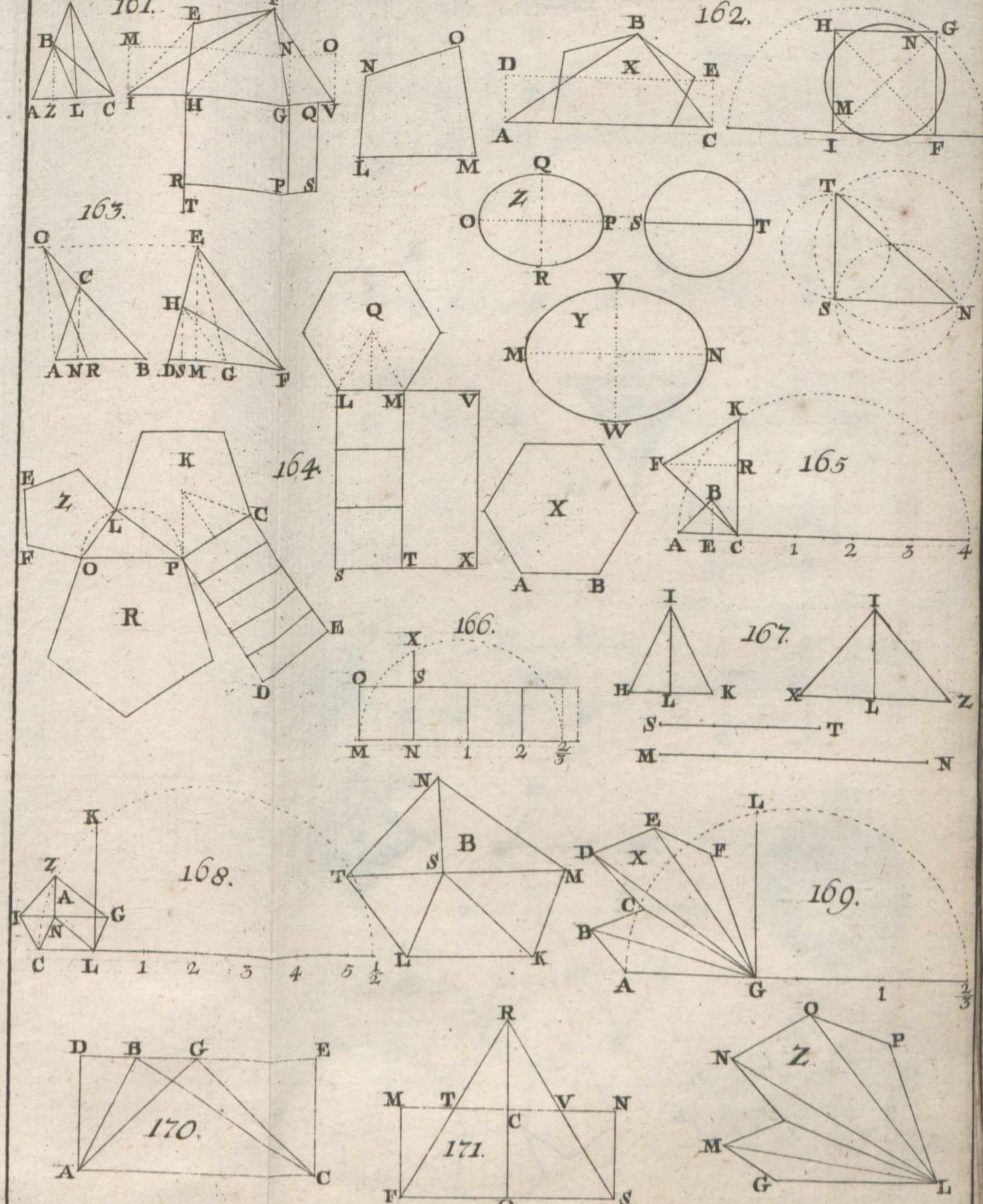
111.
112.
113.
114
115
116.
117.
118
119.
120.
121
122
123
124
125
126.
127.
128.
129
130
131
132
133.
134

TAB. VII. GEOM.

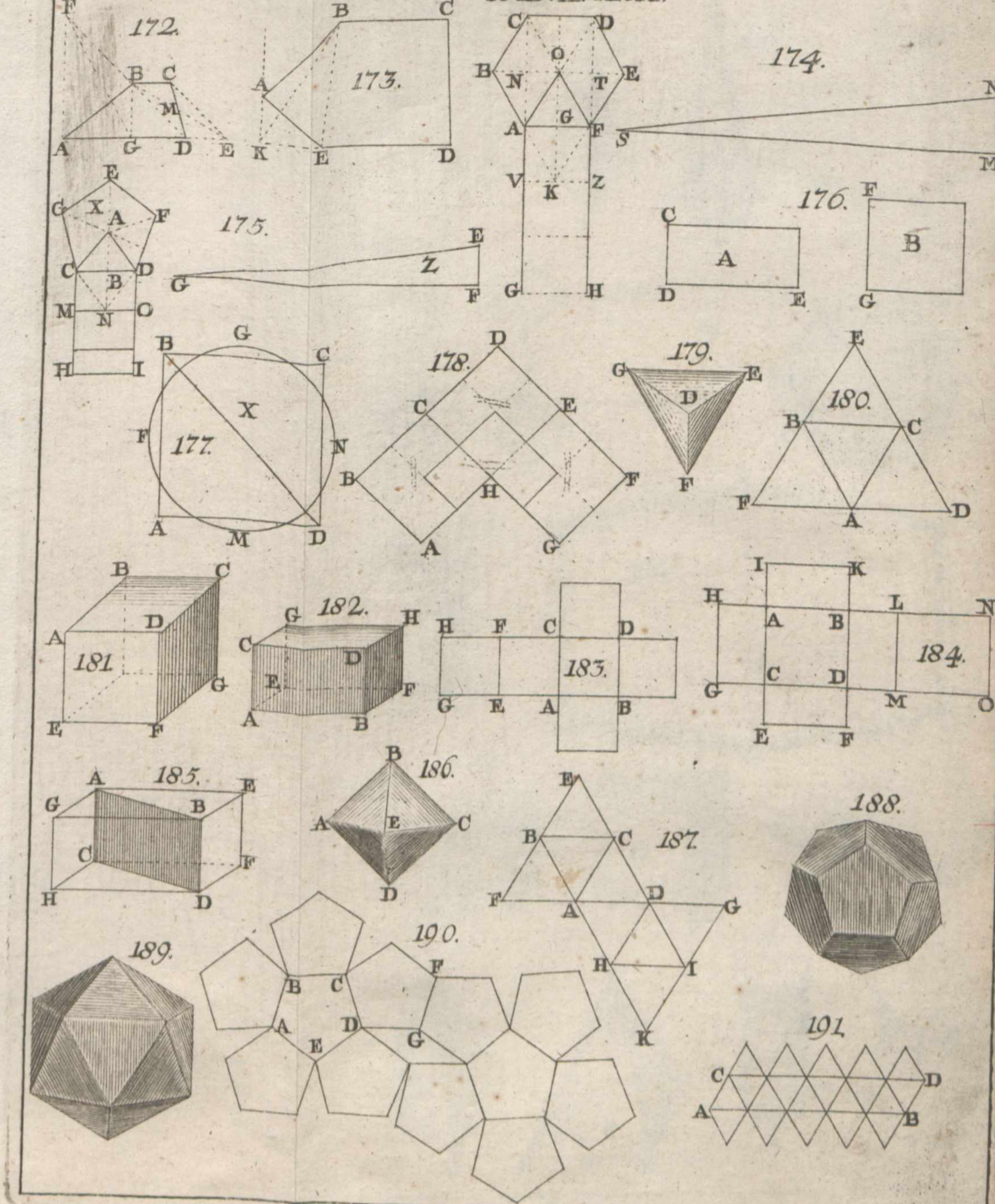



TAB. VIII
GEO.
147.
148.
149
150.
151
152.
153
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160

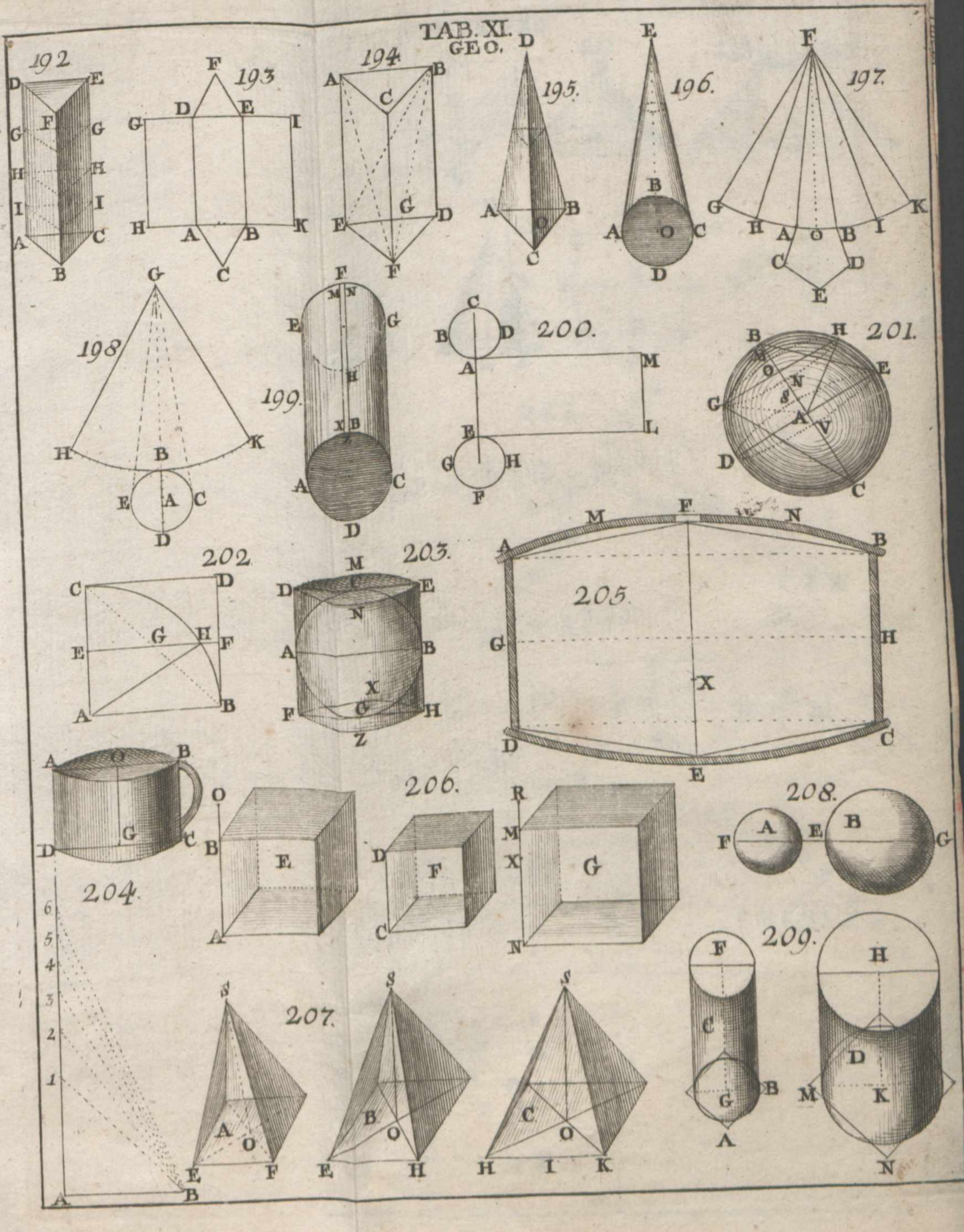
TAB. IX. GEO.

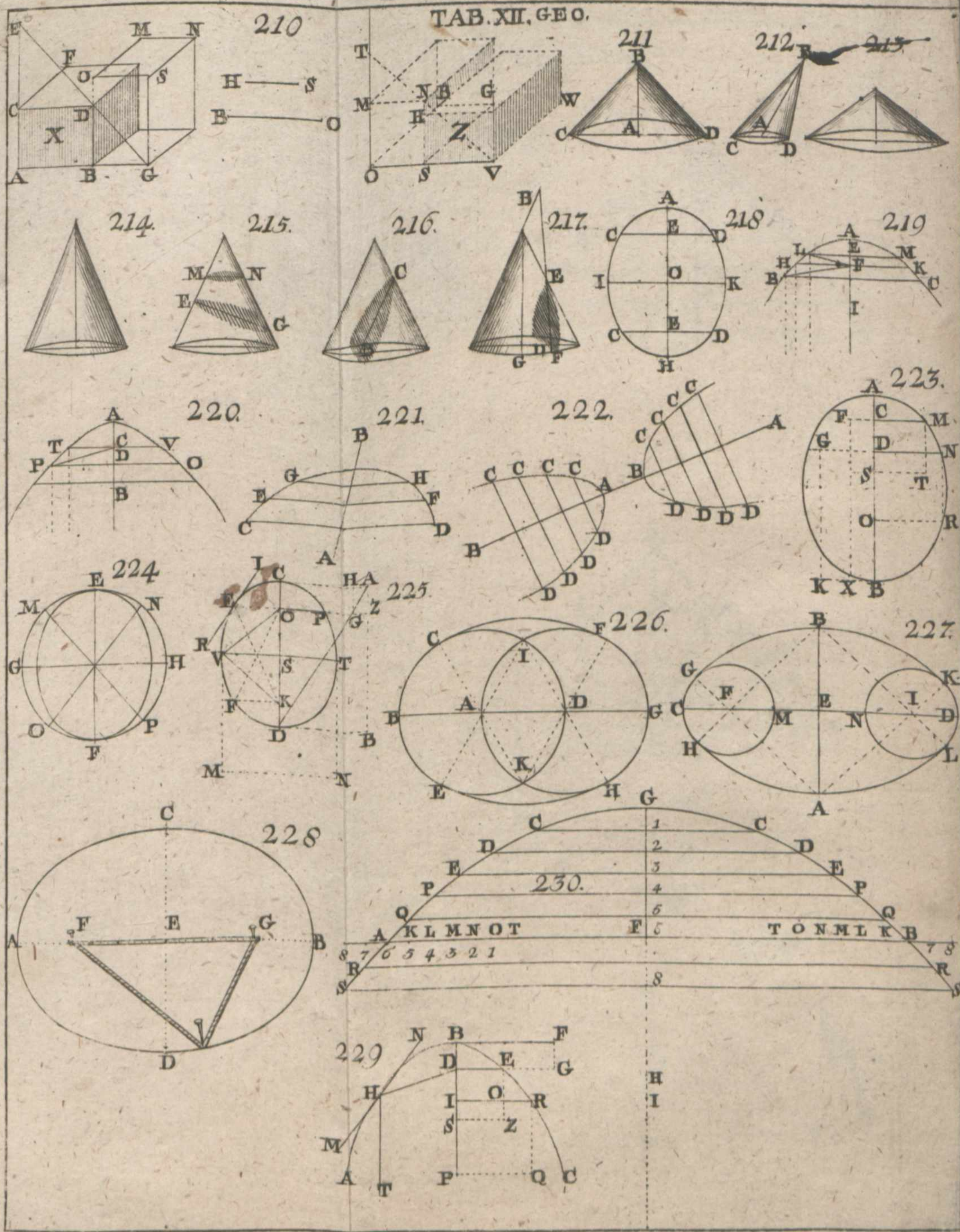


TAB. X. GEOM.

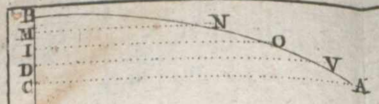

172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
191.

TAB. XI.
GEO.

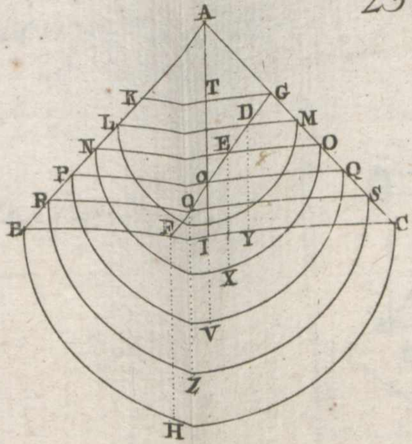

192
193
194
195.
196.
197.
198
199.
200.
201.
202
203.
205.
204.
206.
208.
207.
209.


TAB. XII. GEO.
210
211
212
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230

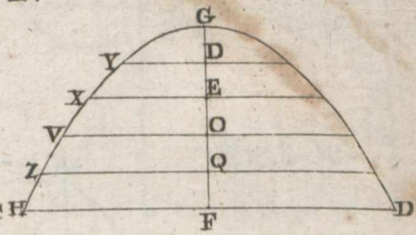
# TAB XIII. GEOM.



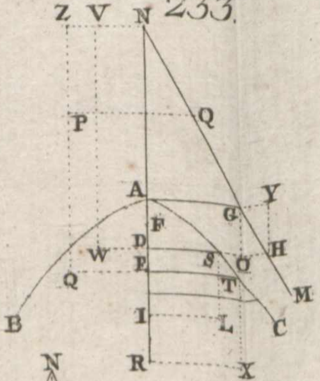

231.

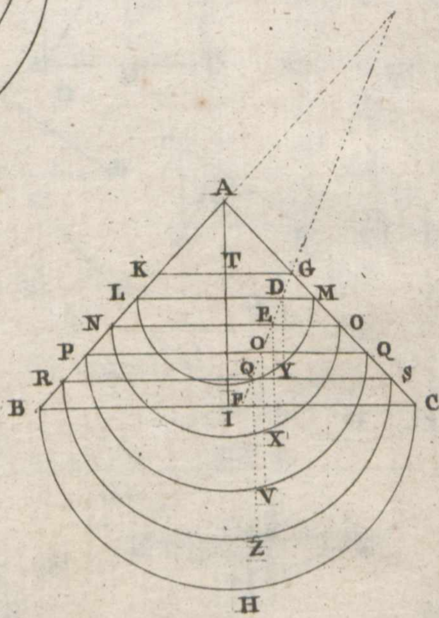



232.

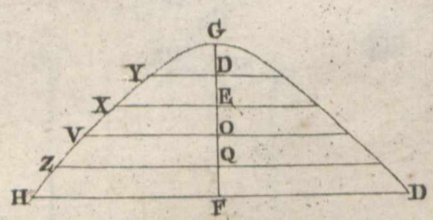


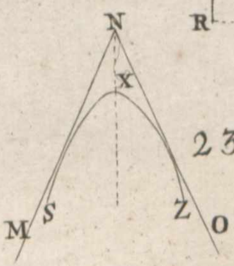

233.



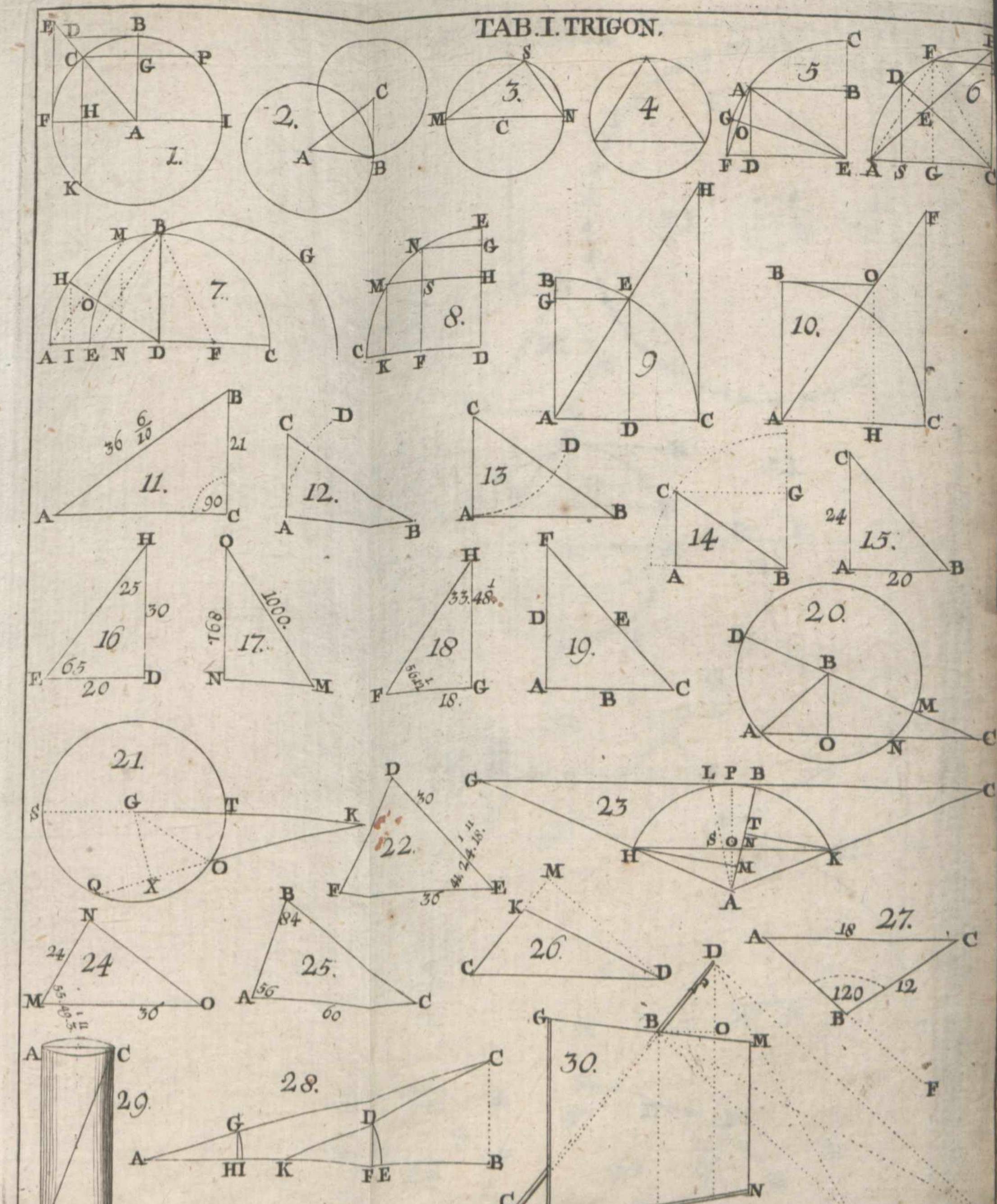

234.



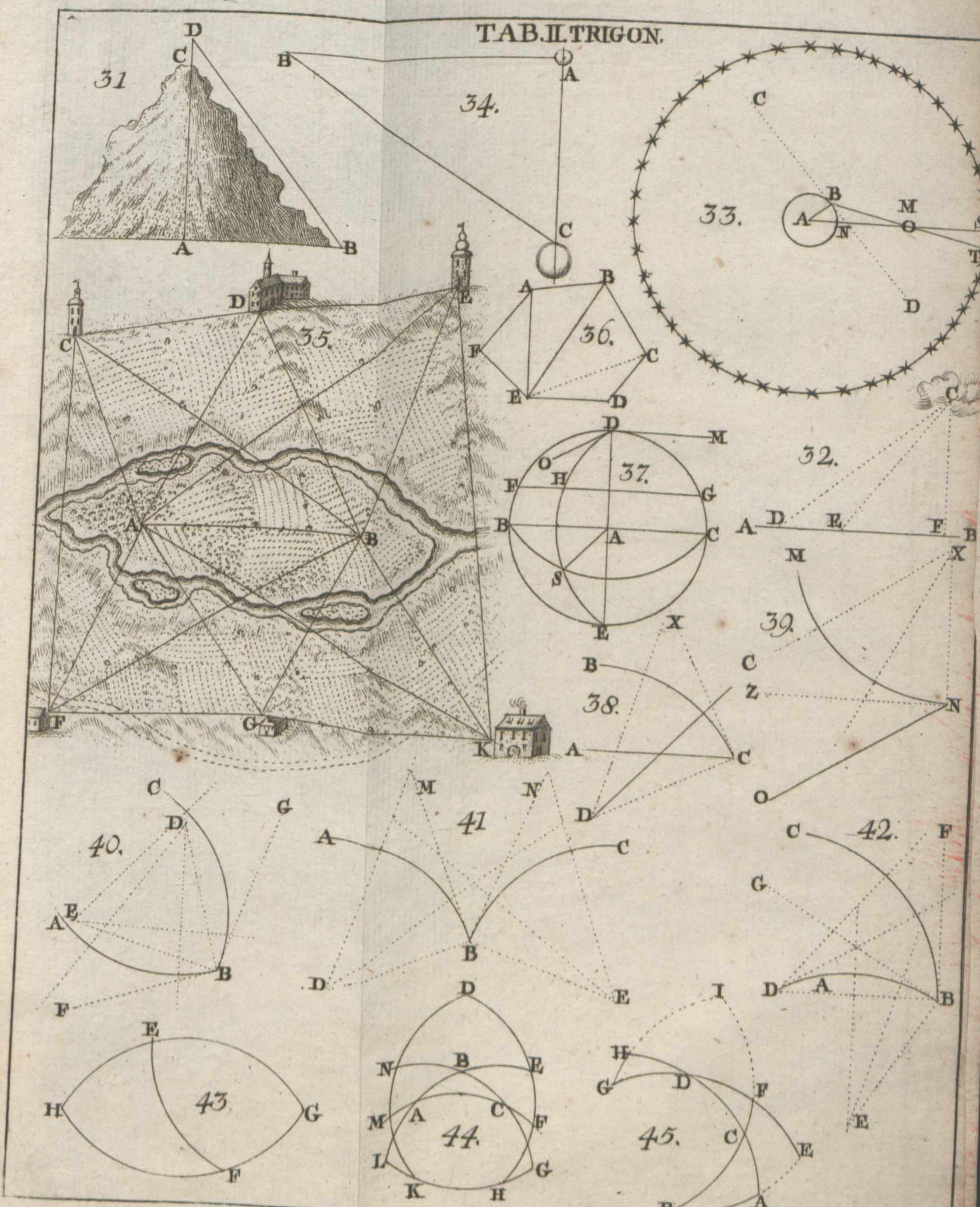

235.

TAB. I. TRIGON.




Nicolai Sculp.

1


TAB.II.TRIGON.
31
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41
42.
43
44.
45.