INSTITUTIONES
ANALYTICÆ
EARUMQUE USUS
IN GEOMETRIA
CUM APPENDICE
De Constructione Problematum solidorum

AUCTORE
PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI
Cler. Reg. Scholar. Piar. & in Archigymn. Romano
Eloquentiæ Professore.

EDITIO PRIMA VENETA.

VENETIIS

APUD SIMONEM OCCHI.
SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.
MDCCLXIII.

CANDIDÆ ATQUE INGENUÆ

MATHEMATUM

STUDIOSÆ JUVENTUTI

Has de Analysi Institutiones
Præceptis breves, at exemplis
uberrimas,
De summorum Analystarum
penu depromptas,
Auctas iterumque illustratas
Auctor libens ultroque

D. D. D.

AD LECTOREM

MIRABERIS fortasse, Eloquentiæ professorem, de ALGEBRA scribere, cum illa amænitates, elegantiam & dicendi copiam amet, hæc sicca, austera & tota ad severitatem composita esse videatur. At mirare potius, me his temporibus de Algebra ipsa scribere, in quibus tot præclara de illa extant Clarissimorum Virorum volumina; quibus quicquam addere arrogantiæ, quicquam demere temeritatis est. Hoc quidem me, ut verum fatear, diu ancipitem habuit, diuque prohibuit, quominus publici juris facerem, quæ meo tantum privato studio selegeram. At vero cum animadverterem magna illa Analyticæ Artis Autographa, quæ nobis incomparabiles viri Vieta, Cartesius, Wallisius, Newtonus, Reinau, ac Wolfius denique tradiderunt, ægre in omnium manibus posse versari, cum ob exemplorum pauci-

cita-

citatem & pretium, tum ob multam ea percipiendi difficultatem, quæ in his subtiliora de Mathematicis & Physicis continentur; illa mihi potius conscripta esse videbantur viris jam in calculi scientia exercitatis, quam tyronibus, qui faciliora, tum etiam pauciora petunt: quamobrem his saltem hunc libellum non inutilem fore, judicavi. Itaque id perpetuo præ oculis habens, me non viris doctis aliquid de Analysi novum promere, sed juventutem a primis ejusdem disciplinæ rudimentis instituendam suscepisse, quæ scilicet ultra communem Arithmeticam, Euclidis elementa, & pauca Archimedis theoremata progressa non esset: in id totus incubui, ut quæ minus dilucide ab aliis essent explicata, aut ad tyronum captum haud satis apta viderentur, ea magis explanarem, magisque ordinate disponerem. Idcirco etiam minima, quæ ad id conferrent, consectatus sum: quorum defectus sæpe solet ab incepto cursu discentes non sine multo temporis dispendio retardare. Neque enim juvenes omnes summo ingenio & acriori mentis vi donatos cogitare debemus. Sunt complures mediocri intellectu præditi, quibus tamen ad ejusmodi studia, unde eorum mens mirum in modum perfici ac roborari possit, iter omnino intercludi non debet. Adde, plerosquealiis quoque disciplinis addictos haud posse diem integrum in calculo & Mathematicis meditationibus ponere. Quid si illis divinatione opus sit, ut auctoris men-

tem

tem assequantur, diuque subobscuri, vel ambigui sermonis sensum speculari cogantur? Quo quidem nihil est ab omni Mathesi magis alienum: in cujus laudibus Geometræ omnes perspicuitati & evidentiæ primas deferunt. Quocirca videant, quam longe a proposito aberrent, qui his de rebus obscure ac perplexe loquentes, se tamen in juventutis usum scribere, profitentur. Pugnare (pace eorum dicam) secum ipsi videntur, dum scientiam alioqui reconditam obscuritate verborum & ambagibus infuscant, quam potissimum susceperant illustrandam. At vero cum *in scientiis addiscendis*, ut magnus Newtonus (*a*) inquit, *exempla magis, quam præcepta prosint*, in iis tradendis brevitate, quam maxima potui, usus sum: omissis idcirco demonstrationibus, sicubi eas minus necessarias putaverim. Exempla vero congessi plurima, quæ facilitate non minus, ac elegantia cæteris antecellerent, ex quibus non pauca Clarissimis Mathematicis, quos paulo ante nominavi, tum aliis quoque accepta refero; quorum nomina, præsertim si pulcherrimæ alicujus methodi auctores extiterint, in Scholiis apposui, ut una simul tyrones in Historia Mathematica erudiantur, tum etiam, ut debita unicuique laus tribuatur. *Est enim benignum*, uti nos Plinius (*b*) admonet, *& plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris*. Cæterum quicquid sit

de

(*a*) Arithm. Univ. edit. 3. p. 179 (*b*) In præfat. hist. Natur.

de facilitate ac brevitate methodi a nobis susceptæ, illud sibi studiosi juvenes persuadeant, neminem triduo vel quatriduo fieri Algebristam; neque inter ambulandum & oscitanter posse calculi scientiam obtineri. Non emitur profecto tam vili disciplina illa, quam summi ingenii & subtilitatis vir Cardanus (*a*) *Artem Magnam*, quam *universæ Matheseos clavim* Ougthredus (*b*), quam denique Wolfius (*c*) *apicem totius humanæ eruditionis* appellat. An ludus tibi videtur paucis lineis posse difficillima quæque in omni naturali scientia problemata solvere, ac geometrice componere? Enimvero sedulo insistas, oportet in iis maxime accurate calculandis, quæ quatuor, aut quinque prioribus hujus libri capitibus comprehenduntur. Ubi ex his vadis emerseris, omnia fere tibi plana occurrent, præsertim si quempiam viæ ducem habeas: quod si neminem (quod sæpe usuvenit); at tute ipse tibi ductor sis & magister, macte animo, μελέτη τὸ πᾶν, inquit Periander. Quem tibi offero libellum, diligenter evolve, nec pigeat calamo excipere, & ad calculum revocare sigillatim, quæ inibi traduntur: cito progressus in hoc studio non pœnitendos experiere.

(*a*) Oper. Vol. 4. pag. 221. (*b*) Clavis Mathem. Oxonii an. 1631. & 1693. (*c*) In præfat ad Elem. Analys.

LECTORI TYPOGRAPHUS.

CUM paucis annis exemplaria omnia Institutionum harum Analyticarum distracta essent, eaque a multis in diem exquirerentur, rogavi sæpius Cl. Auctorem, ut, alteram harum editionem a me fieri, concederet, quod ille tandem annuit. Imo etsi publicis aliis studiis, & occupationibus impeditus, pro singulari tamen suo erga Mathematicas disciplinas amore, totum opus incudi reddere, politius limare, eique manum extremam admovere sibi sumpsit. Summa itaque diligentia, & haud mediocri labore plura correxit, non pauca illustravit, nova demum problemata addidit, ita ut opus ex majori parte recusum esse videatur. Fruere igitur si sapis, ac vale.

INSTITUTIONES ANALYTICÆ.

DEFINITIONES.

I. Algebra, seu Analysis Speciosa, quæ a quibusdam Mathesis Universalis dicitur, est methodus resolvendi problemata circa quantitatem.

II. *Quantum* dicitur omne id, quod augeri & minui potest, ut numerus, linea, superficies, corpus, tempus, motus, velocitas &c.

III. Quantitates Analyticæ exprimuntur per Alphabeti literas, sed hoc discrimine: literæ priores a, b, c, d, &c. adhibentur ad exprimendas quantitates *cognitas*, seu *datas*; postremæ vero x, z, y, v ad *incognitas* & *quæsitas*.

IV. Conducit etiam memoriæ quantitates tam cognitas, quam incognitas designare per primam literam rei, quam significant, ut numerum per n, summam per s, tempus per t, velocitatem per v, circuli radium per r, tangentem per t &c.

V. Multiplicia, vel submultiplicia quantitatum exprimi solent indeterminate, & in genere per literas m, n, r, ut mx, ny, rz, prout m, n, r numeros integros, vel fractos designant. In particulari vero, & in specie exprimuntur per numeros integros, vel fractos, ut $2x$, $3z$, $4y$, & significant duplum, triplum, quadruplum quantitatum x, z, y. Quemadmodum $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{4}c$, vel etiam $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ significant, partem aliquotam quantitatum a, b, c; hoc est dimidium a, tertiam partem b, quartam partem c.

VI. Quanta, quibus præmittitur signum Plus $+$, *affirmativa*, *ac positiva* dicuntur. Quæ vero præferunt signum Minus $-$, *negativa*, seu *privativa*. Quæ autem principio posita sunt, & omni signo carent, habentur pro affirmativis, & quasi signo $+$ affecta.

VII. Quantitates Analyticæ, quæ signis $+$ & $-$ non sunt connexæ, dicuntur *simplices*, *monomiæ*, & *incomplexæ*, ut ab, abc, $\frac{ab}{c}$. Contra vero $a + b$, $ab - bb$, $ac + m - r$ dicuntur *compositæ*, *complexæ*, seu *polynomiæ*; & si duobus terminis constant, ut $a + b$, vel $ab - bb$, *binomiæ*; si tribus, ut $ac + m - r$, *trinomiæ*, & sic deinceps, appellantur.

VIII. Nota *Æqualitatis* est $=$, ita ut $a = b$, vel $x = 6$ significet a & b esse æquales, item valorem x esse 6.

IX. Sed $a > b$ indicat, *a majorem* esse, quam b. Contra $a < b$ denotat, *a minorem* esse, quam b.

X. Proportionalitas Geometrica, seu quatuor terminorum Geometrice proportionalium ratio exprimitur per quatuor puncta hoc modo $a.b::c.d$, nempe a est ad b, ut c ad d. Si sit continuata, exprimitur per signum $\div$. Sic $\div\, a, b, c$ indicat, a esse ad b, ut idem b ad c. Item $\div$ 2, 4, 8, 16, 32 &c.

XI. Proportionalitas vero Arithmetica exprimitur per tria puncta hoc pacto $a.b\because c.d$, nimirum eadem est differentia inter a & b, quæ inter c & d, ut $6.8\because 10.12$.

XII. Numeri, qui quantitates analyticas præcedunt, ut $2x$, $3y$, & in trinomio $aa + 2b - 4c$ numeri ri 2 & 4 dicuntur *Coefficientes*. Ubi nullus eſt numerus, ſemper pro coefficiente intelligitur unitas. Sic ab intelligitur $1ab$, & $2a - b$ intelligitur $2a - 1b$.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Quantitates ſimplices addere.

I. SI quantitates addendæ eiſdem literis ſint expreſſæ, ſufficit numeros præfixos addere, & numerorum ſummam eidem literæ præfigere. Sic ut addam a ad a, ſcribo $2a$; ut addam b ad $2b$, ſcribo $3b$ &c.

II. Si vero literæ ſint diverſæ, additio fit ſigno $+$. Sic $a + b$ exprimit ſummam quantitatum a & b. Ecce exempla.

a	a	c	$\frac{2}{1}b$
$2a$	b	d	$2c$
a	a	e	$3x$
$4a$	$2a+b$	$c+d+e$	$\frac{1}{2}b+2c+3x$

SCHOLIUM. *Ordo literarum non attenditur. Summa* 2a + b *idem valet, ac* b + 2a. *Sicuti* 10 + 5 *idem valet, ac* 5 + 10, *nempe* 15.

PROPOSITIO II.

Quantitates ſimplices ſubtrahere.

I. SI quantitates iiſdem literis ſint expreſſæ, ſubtrahuntur numeri præfixi, & reſiduum eidem lite-

literæ præponitur. Ut ſubtraham $2a$ ex $5a$, ſcribo pro reſiduo $3a$. Similiter ſublato b ex $2b$, remanet b. Item ſublato x ab x, remanet o, ſeu nihil.

II. Si quantitates diverſis literis expreſſæ fuerint, ſubtractio fit ſigno —. Ut ſubtraham a ex b, ſcribo $b - a$. Similiter ſublatis $2a$ ex $4y$, reſiduum erit $4y - 2a$. Exempla.

$5a$	$5b$	a	$3c$
$3a$	$2b$	b	$4x$
$2a$	$3b$	$a - b$	$3c - 4x$

Schol. *Intelligenti prima Arithmeticæ communis elementa nulla difficultas eſſe poteſt de duabus præcedentibus propoſitionibus. Nam ſi ponatur* $a = 5$, *erit ſumma* $4a = 5 + 5 + 5 + 5$, *hoc eſt* $4a = 20$, *ut in primo exemplo. Si ponatur* $a = 10$, *&* $b = 4$, *erit ſumma* $2a + b = 20 + 4$, *hoc eſt* 24, *ut in ſecundo exemplo. Similiter ſi ponatur* $a = 10$, *& ſubtrahenda ſint* $3a$ *ex* $5a$, *nempe* 30 *ex* 50, *reſiduum erit* $2a = 20$. *Tandem ſi ponatur* $a = 20$, *&* $b = 15$, *erit* $a - b = 20 - 15$, *hoc eſt* 5, *ut ex primo, & tertio ſubtractionis exemplo habetur.*

PROPOSITIO III.

Quantitates ſimplices multiplicate.

I. Multiplicatio fit per ſimplicem literarum conjunctionem, nullo interpoſito ſigno. Sic ab, vel ba (ordo literarum non attenditur) ſignificat productum a in b, vel b in a; unde ſi ponatur $a = 5$ & $b = 6$, erit $ab = 30$.

II. Quantitates multiplicandæ a & b dicuntur *factores*, & ab *factum*. Si factoribus præfixi ſint numeri, hi inter ſe multiplicentur, ut in communi

Ari-

Arithmetica, eorumque productum præmittatur facto literarum. Ecce exempla:

ab	ac	$2cd$	$\frac{1}{2}afg$
c	b	$3a$	$\frac{1}{3}cm$
abc	abc	$6acd$	$\frac{1}{6}acfgm$

SCHOL. *Multiplicatio aliquando indicatur per Crucem, quam S. Andreæ vulgo vocant. Sic* a X b *indicat factum* a *in* b, *seu* ab. *Ceterum cum in omni multiplicatione sit unitas ad factorem unum, ut alter ad productum, erit productum quarta proportionalis, hoc est* 1 . a : : b . ab, *proinde optime exprimitur per* ab.

PROPOSITIO IV.

Quantitates simplices dividere.

I. REgula est, ex dividendo dele divisorem, & habebis quotum. Sic ad dividendum ab per a, deleto a ex dividendo, restat b quotus.

II. Si adsint coefficientes, hos seorsim divides, ut in vulgari Arithmetica. Sic dividendo $6ab$ per $3b$, quotus erit $2a$; & $\frac{4ax}{2x} = 2a$.

III. Quod si dividendus & divisor nullam habeant literam communem, tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut $\frac{ab}{c}$, $\frac{ax}{n}$, $\frac{2a}{3c}$ &c.

SCHOL. *Divisio dissolvit id, quod fuit multiplicatione compositum, proinde divisor per quotientem multiplicatus restituit ipsum dividendum. Nam multiplicato quoto* b *per divisorem* a, *restituitur dividendum* ab. *Atque hinc apparet, cur in divisione, deleto divisore ex quantitate dividenda, habeatur quotus. Nam quotus &* di-

divisor sunt duo factores, qui producunt ab , *& eliso divisore* a, *remanet alter ex factoribus pro quoto, nempe* b.

L E M M A.

Quantitates complexas ad simpliciores expressiones reducere.

I. SI quantitates iisdem literis notatæ habent idem signum $+$, aut $-$, addantur earum coefficientes, & præponatur summæ idem signum. Sit reducenda ad simpliciorem expressionem quantitas $x + 3ab + 2x + 2ab$, additis coefficientibus terminorum similium, reducitur ad $3x + 5ab$. Simili ratione quantitas $y + 2xy - 2d + xy - d$, erit $y + 3xy - 3d$.

II. Cum vero quantitates iisdem literis expressæ habent signa diversa, subducendus est minor coefficiens a majori, & residuo præponendum signum majoris. Sit quantitas $4ac + bc - 3bc$, subducto $+ bc$ ex $3bc$, & præposito signo $-$ quantitatis majoris, erit per reductionem $4ac - 2bc$. Pariter $2ax - ax + 4b - 3b$ erit $ax + b$.

P R O P O S I T I O V.

Quantitates compositas addere.

I. SI quantitates eisdem literis notatæ habent idem signum $+$, aut $-$, adduntur simul, illo eodem præfixo signo.

$$\begin{array}{r|r|r} -a+3b & a-x & \frac{1}{2}cb+2b-3 \\ -a+2b & 3a-2x & \frac{1}{2}cb+3b-4 \\ \hline -2a+5b & 4a-3x & cb+5b-7 \end{array}$$

II.

II. Quod si eisdem literis notatæ habent diversa signa, minor quantitas a majori subtrahitur, & residuo apponitur signum majoris.

$3a + 5b$	$a + d$	$ab - 2ac - 5$
$2a - 2b$	$a - 4d$	$ab + 6ac + 2$
$5a + 3b$	$2a - 3d$	$2ab + 4ac - 3$

COROLL. *Manifestum est, ad addendum* $3a + 5b$ *ad* $2a - 2b$, *ut in primo exemplo, scribi posse unam quantitatem post aliam, nempe* $3a + 5b + 2a - 2b$, *&* *deinde reduci* per Lem. *ad simpliciorem expressionem; habebitur enim eodem modo* $5a + 3b$, *& sic de aliis*.

PROPOSITIO VI.

Quantitates compositas subtrahere.

QUantitas subducenda additur, mutatis signis, quantitati, ex qua subduci debet. Subducenda sit ex quantitate $x + b - c$ quantitas $a + y - d + 1$, erit differentia, seu residuum $x + b - c - a - y + d - 1$. Similiter in exemplis, quæ sequuntur, intelligantur mutata signa in quantitate subtrahenda, erit facile habere residuum

$3a + 2b$	$2x - b$	$4c - 3x - 2$
$a + 5b$	$x - 3b$	$2c - 2x + 5$
$2a - 3b$	$x + 2b$	$2c - x - 7$

COROLL. *Patet subtractionem quantitatum compositarum degenerare in additionem. Nam ad subtrahendam ex* $3a + 2b$ *quantitatem* $a + 5b$, *mutatis signis in* $a + 5b$, *erit* $- a - 5b$. *Habemus ergo* $3a + 2b - a - 5b$, *quæ* per Lem. *ad simpliciorem expressionem redacta dant residuum* $2a - 3b$, *ut in primo exemplo*.

Habeat enim quis aureos 100, *debeat autem alteri aureos* 100 + 50; *mutatis signis in summa subducenda, habebit ille aureos* + 100 — 100 — 50; *hoc est* — 50 *aureos de ære alieno*.

PROPOSITIO VII.

Quantitates complexas multiplicare.

DUcantur singuli unius quantitatis complexæ termini in singulos alterius terminos eo modo, quo factum est in multiplicatione simplicium; quod commode fit incipiendo a sinistra, & pergendo ad dexteram.

Pro signis hæc regula observetur, *eadem signa faciunt* +, *diversa* autem — .

Multiplicanda sint inter se A & B, dico factum esse E, resultans ex factis C & D simul additis. Nam primus terminus a quantitatis B multiplicans singulos terminos quantitatis A producit C; & secundus terminus $-x$ quantitatis ejusdem B multiplicans pariter singulos terminos quantitatis A producit D, ergo si facta C & D addantur *per Prop.* v. obtinebitur factum E. Quod &c.

Exempl. I.

$$\begin{array}{ll} A & a+b-c \\ B & \quad a-x \\ \hline C & aa+ab-ac \\ D & \qquad -ax-bx+cx \\ \hline E & aa+ab-ac-ax-bx+cx \end{array}$$

Exem-

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{l} 2a - 3bc + 1 \\ 3a - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a \\ \quad\; - 4ab + 6bbc - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b \end{array}$$

EXEMPL. III.

$$\begin{array}{l} x + ax - 2b + 3 \\ x - \frac{1}{2}a + 2b \\ \hline xx + axx - 2bx + 3x \\ - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a \\ \quad + 2bx + 2abx - 4bb + 6b \\ \hline xx + axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab \\ \quad - \frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + 6b. \end{array}$$

Demonstr. signorum regula. Omnis multiplicatio fit per numeros. Nam quantitatis per quantitatem multiplicatio non est nisi iterata ejusdem quantitatis additio; & per multiplicationis productum aliud non exprimitur, nisi quoties sumpta fuerit aliqua quantitas. Sic productum $6a$, quod oritur ex 3 in $2a$, exprimit bis ter, seu sexies a esse sumptum; proinde ducendo $+ 2a$ in $+ 3$, oritur $6a$, de quo nemini dubium est.

At vero ducendo $+$ *in* $-$, *vel* $-$ *in* $+$, *oritur* $-$. Nam multiplicare per numerum negativum est tollere, seu negare positivum, sicuti multiplicare per numerum positivum est aliquid ponere. Itaque ducendo $+ 3a$ in -2, fit $- 6a$, quia bis ter, seu

seu sexies negatur quantitas positiva a. Quod erat secundum.

Denique — *in* — *dat* +. Nam in hoc casu quantitas negativa per numerum pariter negativum tollitur, & aliquid ponitur. Sicuti tollere debitum est ipsum solvere ponendo aliquid; unde ducendo $-3a$ in -2, fit $+6a$, quia dum quantitas negativa bis ter negatur, bis ter aliquid ponitur. Ergo &c.

Vel sic — *in* — *dat* +. Nam multiplicando quantitatem negativam per aliam negativam v. g. $-3a \times -2b$, illa toties subtrahitur, quot sunt in altera unitates. Negatio enim subtractionem importat, sicuti affirmatio additionem. Hæc autem subtractio cum sit subtractio quantitatis negativæ, signum negativum mutari debet in affirmativum *per Prop.* VI. proinde residuum subtractionis (seu productum multiplicationis) erit affirmativum. Sic $-3a$ in $-2b$ dat $+6ab$. Nam quantitas $-3a$ bis subtrahi debet, quot scilicet sunt unitates in altera quantitate negativa $-2b$; & mutato signo negativo in affirmativum, habetur $+6ab$ multiplicationis productum.

Schol. I. *Hanc doctrinam si quis nunc penitus non percipiat, parum refert, percipiet postea. Interim ultra progrediatur.*

Schol. II. *Multiplicatio compositarum quantitatum exprimitur quoque aliquando per signum* $\times$, *ducta supra factores compositos linea sic*, $\overline{a+b-c} \times \overline{a-x}$. *Vel factores ipsi includuntur parenthesi, ut insigni calculi commodo excogitavit Leibnitius, quo Analystæ recentiores utuntur, nempe* $(a+b-c)(a-x)$. *Similiter* $(a+b-c)\,x$ *designat productum* $ax+bx-cx$.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Quantitates complexas dividere.

Hic etiam eadem ſigna ponunt $+$, diverſa $-$. Neque refert utrum a ſiniſtra, an vero a dextera initium ducas. Operatio eodem modo peragitur ac in vulgari Arithmetica. Exempla rem declarant. Dividendum eſt polynomium A per polynomium B, dico quotum eſſe C.

EXEMPLUM I.

$B\ a+b)$	$A\ an+bn-ar-br+a+b$	C
	$-an-bn+ar+br-a-b$	$+n$
		$-r$
	$0 \quad 0 \quad 0$	$+1$

Divido an per a & pono ad dexteram in C quotum $+n$, qui habetur *per Prop.* IV. Per hunc multiplico diviſorem $a+b$, ejuſque productum $an+bn$ (mutatis ſignis *per Prop.* VI.) ſubduco ex dividendo A & fit 0. Deinde eodem modo per a divido $-ar$, & pono in C quotum $-r$ inventum *per Prop.* IV. per quem multiplicato diviſore $a+b$, oritur productum $-ar-br$ ſubducendum (mutatis ſignis) ex dividendo $-ar-br$ & habetur 0. Demum dividendo a per a, quotus eſt 1, per quem multiplico diviſorem $a+b$, & productum $a+b$ (mutatis ſignis) ſubtraho ex dividendo, & nihil remanet. Quotus ergo C eſt $n-r+1$, per quem ſi multiplicetur diviſor $a+b$, reſtituitur dividendus A.

EXEM-

Exemplum II.

Dividendum eſt polynomium B per polynomium C, dico quotum eſſe D.

$$\begin{array}{lllllll|l}
C\ 3a - 1\ ) & B & 6aa & + 3ab & + 13a & - b & - 5 & D \\
 & & -6aa & & + 2a & & & + 2a \\
 & & \overline{} & & \overline{} & & & + b \\
 & & 0 & & + 15a & & & + 5 \\
\hline
\text{Reſid.} & E & & + 3ab & + 15a & - b & - 5 & \\
 & & & - 3ab & & + b & & \\
 & & & 0 & & 0 & & \\
\hline
\text{Reſid.} & F & & & + 15a & & - 5 & \\
 & & & & - 15a & & + 5 & \\
\hline
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Dividendo $6aa$ per $3a$ oritur quotus $2a$ *per Prop.* IV. quem pono in D, & per hunc multiplicans diviſorem C $3a - 1$, habeo productum $6aa - 2a$, ſubducendum (mutatis ſignis) ex dividendo ; quo facto habetur reſiduum E. Divido igitur $3ab$ per $3a$, quotus eſt b ponendus in D, per quem multiplicato diviſore C, oritur productum $3ab - b$, ſubtrahendum (mutatis ſignis) ex dividendo, ſeu reſiduo E: quo facto, habetur reſiduum $F + 15a - 5$ loco dividendi. Diviſo itaque $15a$ per $3a$, fit quotus 5, per quem multiplicato diviſore C, & producto $15a - 5$ ſubtracto ex reſiduo F, nihil remanet. Eſt ergo quotus $D\ 2a + b + 5$, per quem ſi multiplicetur diviſor C, oritur polynomium B.

Exem-

EXEMPLUM III.

Dividenda sit quantitas *A* per quantitatem *B*, dico quotum esse *C*.

$$\begin{array}{llll|l}
B\ x-2)\ A & & xxx+4x-17 & & C \\
 & & -xxx+2xx & & +xx \\
 & & \overline{\quad\quad} & & +2x \\
 & & 0 & & +8 \\
 & \text{Resid. } D & +2xx+4x-17 & & \\
 & & -2xx+4x & & \\
 & & \overline{\quad\quad\quad} & & \\
 & \text{Resid. } E & 0+8x-17 & & \\
 & & -8x+16 & & \\
 & & \overline{\quad\quad\quad\quad} & & \\
 & & 0-1 & &
\end{array}$$

Est ergo quotus C $xx+2x+8-\frac{1}{x-2}$

COROLL. *Si facta divisione aliquid remanet, illud ponitur post quotientem cum signo* $+$, *vel* $-$, *quo afficitur, ut in hoc tertio exemplo* $-\frac{1}{x-2}$ *supponendo illi divisorem, ut fit in communi Arithmetica.*

SCHOL. I. *Liberum est sumere ex divisore composito, quam libuerit, literam ad dividendum; quæ tamen semel assumpta semper adhibetur, nec mutari potest. Sic in primo exemplo pro litera* a *sumi potuisset litera* b. *In secundo exemplo loco* 3a *assumi poterat in divisorem quantitas* -1, *semper enim idem quotus obtinetur.*

SCHOL. II. *Sæpe numeri, qui præcedunt terminos dividendi, aut divisoris, impediunt, quominus fieri possit divisio. Tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut si dividenda sit* $3ab+c$ *per* $2a-c$, *erit quotus* $\frac{3ab+c}{2a-c}$. *Idem fit cum dividendus & divisor nullam habent literam communem; ut* $\frac{ad-ac}{d-r}$, *item* $\frac{dx-dc}{a+x}$ &c.

SCHOL.

Schol. III. *Aliquando etiam divisio quantitatum compositarum fit includendo divisorem & dividendum parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta ; ut* (a + b) : c *indicat* a + b *divisum esse per* c. *Similiter* (2ax — ab) : (a — c) *designat, polynomium* 2ax — ab *divisum esse per polynomium* a — c, *quod summo Leibnitii ingenio pariter debemus.*

PROPOSITIO IX.

Datæ quantitatis divisores omnes invenire.

I. Esto numerus 150, cujus singuli divisores quæruntur. Divide illum per 2, & quotum 75 pone sub ipso numero dividendo, ut in *A*, divisorem autem 2 in *B*. Deinde quia totus 75. dividi non poteſt per 2 ſine reſiduo, divide illum per 3 & pone quotum 25 in *A*, diviſorem autem in *B*. Poſtea quotum 25 (cum adæquate dividi nequeat per 3) divide per 5 & quotum pone in *A*, diviſorem in *B*. Demum quotus 5 diviſus per 5, dat quotum 1, ponendum in *A*, poſito diviſore 5 in *B*. Habentur jam omnes diviſores ſimplices dati numeri, hoc eſt 2, 3, 5, 5.

Ut habeantur diviſores compoſiti, multiplica primum diviſorem 2 per ſecundum 3, & pone productum 6 ad dexteram ejuſdem ſecundi diviſoris 3. Deinde duo primi diviſores & productum 6 multiplicentur per tertium diviſorem 5, & producta 10, 15, 30 ponantur ad dexteram ipſius diviſoris 5. Demum multiplicentur per quartum diviſorem 5 omnes numeri jam inventi, & habebis 25, 50, 75, 250, qui juxta ipſum ultimum diviſorem apponuntur, ut infra patet. Ex compoſitis idem numerus bis non ponitur.

A	B
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

II. Quærantur omnes divisores numeri *M* 120. Dispone, ut in superiori cxemplo factum est, omnes divisores simplices infra *N*, & omnes quotos sub dato numero infra *M*. Deinde duc primum divisorem in secundum, & productum pone ad latus secundi divisoris. Postea duo primi divisores & productum modo inventum ducantur in tertium divisorem, & singula producta, unum post aliud, ponantur ad latus ipsius tertii divisoris, & sic deinceps operando inveniuntur omnes dati numeri divisores, ut infra apparet.

M	N
120	2.
60	2. 4.
30	2. 8.
15	3. 6. 12. 24.
5	5. 10. 20. 40. 15. 30. 60. 120.
1	

III. Sit quantitas *aabcd*, cujus omnes divisores quæruntur. Inveniantur primo omnes divisores simplices *a*, *a*, *b*, *c*, *d*, qui ponantur infra *B*, singuli autem quoti infra *A*. Deinde ducendo divisorem primum in secundum, habetur productum *aa*, quod ponitur ad latus secundi divisoris *a*. Similiter ducendo tertium divisorem *b* in omnes quantitates supra existentes, habentur producta *ab*, & *aab*, quæ scribuntur ad latus ipsius divisoris *b*, & sic deinceps prosequendo habentur omnes divisores quæsiti, ut infra.

A

A	*B*
aabcd	*a*.
abcd	*a*. *aa*.
bcd	*b*. *ab*. *aab*.
cd	*c*. *ac*. *aac*. *bc*. *abc*. *aabc*.
d	*d*. *ad*. *aad*. *bd*. *abd*. *aabd*. *cd*.
1	*acd*. *aacd*. *bcd*. *abcd*. *aabcd*.

IV. Quæruntur omnes divisores quantitatis $2abb - 4ac$. Dividatur primo per 2, deinde diviso quoto $abb - 2ac$ per a, remanet quotus indivisibilis $bb - 2c$. Sunt ergo divisores primi 2, a, & $bb - 2c$, quibus multiplicatis ordine jam supra explicato, habentur omnes divisores, scilicet

$2abb - 4ac$	2.
$abb - 2ac$	a. $2a$.
$bb - 2c$	$bb - 2c$. $2bb - 4c$. $abb - 2ac$.
1	$2abb - 4ac$.

COROLL. *Hinc patet, quotum indivisibilem, ut in hoc tertio exemplo* bb—2c, *reponi debere inter divisores. Nam quælibet quantitas suimet divisor est. Unitas quoque primus omnium divisor intelligitur.*

SCHOL. I. *Divisoribus primis, ut supra, inventis, si singulos binos, ternos, quaternos &c. inter se ducas, habebis cum NeWtono omnes divisores compositos. Sic numeri* 60 *divisores primi sunt* per hanc Prop. 2.2.3.5. *Ex binis compositi sunt* 4.6.10.15; *ex ternis* 12.20.30; *ex quaternis* 60; *qui omnes conficiunt summam divisorum* 12.

SCHOL. II. *Quod si inquiratur tantum summa divisorum dati numeri ex. gr. quot divisores habeat numerus* 60, *incluso quoque divisore* 1; *inventis divisoribus primis, ut supra, sub singulis eorum ponitur* 2, *si sint inæquales: sub binis æqualibus ponitur* 3; *sub ternis æqualibus* 4, *& sic deinceps, eorumque productum dat sum-*

summam omnium divisorum. Primo divisori 1 *nihil subscribitur, quia* 1 *in reliquas quantitates ducta nihil novi producit.*

Divisores primi numeri 60 *sunt* 2 . 2 . 3 . 5
Pone sub illis numeros, nempe 3×2×2
quorum productum 12 *dat summam quæsitam. Similiter primi divisores numeri* 2310 *sunt* 2 . 3 . 5 . 7 . 11.
Sub singulis, quia sunt inæquales, pono 2, 2×2×2×2×2
quorum productum 32 *dat summam omnium divisorum numeri* 2310. *Ratio est, quia ubi plures sunt quantitates diversæ, si* duæ *(omissa* 1 *) inter se ducantur, habentur quatuor divisores, in quibus comprehenditur* 1, *reliquæ vero continuo duplicant ipsam divisorum summam. Sit productum* abc, *cujus divisores primi sunt* 1 . a . b . c. *Subscribe singulis (omisso divisore primo* 1 *) numerum* 2, *eorum productum* 2 × 2 × 2 = 8 *dat numerum omnium divisorum. Nam ducto* a × b *fiunt quatuor divisores, nempe* 1 . a . b . ab, *qui deinde duplicantur per quantitatem* c *in singulos ductam, & fiunt* 8, *scilicet* c . ac . bc . abc.

Quod si productum sit aabc, *cujus primi divisores sunt* 1 . a . a . b . c, *divisorum summa erit* 12, *hoc est* 3 × 2 × 2 = 12, *ut in primo exemplo. Nam quantitates similes* a, a *inter se ductæ non quatuor, sed tres duntaxat divisores efficiunt, nempe* 1 . a . aa, *qui duplicati per* b *fiunt* 6, *& iterum duplicati per* c *fiunt* 12.

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

OMnia fere peraguntur, ut in communi Arithmetica. Ne qua tamen tyroni difficultas in hoc calculi genere suboriatur, quæ præcipua sunt, & ad præsentem usum magis faciunt, breviter illustrabimus; adjecta in fine appendice de Calculo Decimali.

Axiomata.

1. Integra quantitas in fractionem degenerat, si loco denominatoris ponatur unitas, ut $\frac{ab}{1}$, $\frac{a+b}{1}$ &c.

2 Integrum in fractionem dati denominatoris convertitur, si multiplicetur per denominatorem datum, & producto supponatur ipsemet denominator, ut si a reducenda sit ad fractionem denominatoris b, erit $\frac{ab}{b}$. Item x si reducenda sit ad fractionem dati denominatoris $a+b$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}$.

3. Multiplicatis, aut divisis per eandem quantitatem tam numeratore, quam denominatore fractionis, fractio valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{a}{b}$ per c fit $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$. Item dividendo $\frac{bb}{bc}$ per b, fit $\frac{b}{c}$; & $\frac{ax+bx}{a+b}$ divisa per $a+b$, fit $\frac{x}{1}$.

4. Ut multiplicetur fractio per suum denominatorem, satis est delere ipsum denominatorem. Sic ad multiplicandum $\frac{ax}{c}$ per c, satis est scribere ax. Similiter $\frac{bc}{a-b}$ multiplicatum per $a-b$ erit bc; & $\frac{a}{2x}$ multiplicatum per $2x$ erit a; nam $\frac{2ax}{2x}=a$ per 3. *Axioma*.

PRO-

PROPOSITIO I.

Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.

Sit quantitas $a + \frac{bc}{n}$ reducenda ad unam fractionem. Multiplicetur quantitas integra a per denominatorem fractionis n, fiet fractio quæsita $\frac{an + bc}{n}$. Eadem ratione $\frac{aa}{c} - b$ erit $\frac{aa - bc}{c}$. Ratio patet ex 2. *Axiom.*

PROPOSITIO II.

Fractiones ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Sit fractio $\frac{aab}{ac}$ reducenda ad simpliciorem. Dividatur tam numerator, quam denominator per divisorem communem, nempe per a; quoti hinc inde orti dant fractionem simpliciorem, & priori æqualem per 3. *Axioma*, scilicet $\frac{ab}{c}$. Eadem ratione $\frac{2abc}{8acd}$ erit $\frac{1b}{4d}$.

II. Quod si communis divisor non ita facile in oculos incurret, ut in quantitatibus valde compositis contingere solet; tunc inveniantur per *Prop.* IX. *Cap.* I. omnes tam numeratoris, quam denominatoris divisores, ex quibus ille pro communi divisore seligatur, qui fuerit numeratori, & denominatori communis. Sit fractio reducenda $\frac{aac + abc}{aa - bb}$,

 omnes

omnes quidem numeratoris divisores sunt a, c, $a+b$; denominatoris autem sunt $a-b$ & $a+b$. Divisor ergo utrique communis $a+b$ est divisor quæsitus, per quem dividendo utrumque terminum datæ fractionis $\frac{aac+abc}{aa-bb}$ fit $\frac{ac}{a-b}$. Eadem ratione $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ fit $\frac{aa}{d}$, dividendo per $c-d$ divisorem communem inventum, ut supra per *Propos.* IX. *Cap.* I.

SCHOL. *Alias regulas inveniendi divisorem communem, utpote difficiliores, afferre, non putamus esse hujus loci.*

PROPOSITIO III.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

I. SInt duæ fractiones reducendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ducantur duo termini fractionis primæ in denominatorem alterius, nempe $\frac{a}{b}$ in d, & duo termini fractionis secundæ $\frac{c}{d}$ in b denominatorem primæ, seu (quod idem est) multiplicentur per crucem, ut numeri fracti; fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ ejusdem nominis, & æquales prioribus ex 3. *Axiom.*

II. Sint reducendæ plures; ducantur ambo termini cujusque fractionis in productum, quod ex ceterarum fractionum denominatoribus resultat, fient fra-

fractiones quæsitæ. Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, duc terminos primæ $\frac{a}{b}$ in df, deinde terminos secundæ $\frac{c}{d}$ in bf, item terminos tertiæ $\frac{e}{f}$ in bd, habebis $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$. Ratio sequitur ex eod. 3. *Axiom.*

COROLL. *Quando denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius fractionis, tunc illæ fractiones ad idem nomen satis commode reducuntur multiplicando per illum quotum numeratorem & denominatorem fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducendæ* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{ef}{c}$; *quia denominator* c *dividit exacte denominatorem* cd, *multiplico per quotum* d *utrumque terminum fractionis* $\frac{ef}{c}$, *& fiunt* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{edf}{cd}$ *ejusdem nominis. Ut si reducendæ sint* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{3}{4}$, *quia* 4 *dividit exacte* 8, *multiplicando per quotum* 2 *terminum utrumque fractionis* $\frac{3}{4}$, *erunt* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{6}{8}$ *ejusdem nominis, ut patet.*

PROPOSITIO IV.

Additio & subtractio fractionum.

I. ADdendæ sunt fractiones $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, summa erit $\frac{a+b}{c}$. Eadem ratione $\frac{ad}{a+b}$ & $\frac{cf}{a+b}$ simul additæ conficiunt summam $\frac{ad+cf}{a+b}$.

Si fuerint diversæ denominationis, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; reducantur ad eandem *per Prop.* III. fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$, earumque summa $\frac{ad+cb}{bd}$.

II. Quod si addenda sint integra cum fractis $a+\frac{ab}{c}$ & $b-\frac{ab}{b}$, addi possunt integra integris $a+b$, & fractiones fractionibus $\frac{ab}{c}$ & $-\frac{ac}{b}$ (quæ prius ad eandem denominationem reducendæ sunt *per Prop.* III.) eritque summa quæsita $a+b+\frac{abb-acc}{bc}$.

III. Vel possunt integra ad fractionem sibi annexam reduci *per Prop.* I. nempe $\frac{ac+ab}{c}$ & $\frac{bb-ac}{b}$, quæ redacta ad eandem denominationem *per Prop.* III. erunt $\frac{abc+abb}{bc}$ & $\frac{bbc-acc}{bc}$, earumque summa $\frac{abc+abb+bbc-acc}{bc}$.

IV. Si vero subtrahenda sit $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{b}$, differentia erit $\frac{c-a}{b}$. Si sint diversæ denominationis, sem-

per

per ad eandem prius reduci debent. Sicut $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{d}$ ſubtrahi poſſit, reducuntur ad eandem denominationem *per Propoſ.* III. eritque differentia quæſita $\frac{bc - ad}{bd}$.

V. Quod ſi ex integra quantitate x ſubduci debeat fractio $\frac{aa - ab}{a + b}$; reducta prius x ad fractionem ejuſdem denominatoris per 2. *Axioma*, habetur $\frac{ax + bx}{a + b}$, ex qua ſubducta $\frac{aa - ab}{a + b}$, erit reſiduum $\frac{ax + bx - aa + ab}{a + b}$. Similiter ſi ſubtrahenda ſit $b + \frac{cc}{b + d}$ ex $a + b$, redacta prima quantitate ad unam fractionem *per Propoſ.* I. & altera ad fractionem ejuſdem nominis cum prima *per Axioma* 2. erit reſiduum $\frac{ab + ad - cc}{b + d}$, hoc eſt $a - \frac{cc}{b + d}$ *per Prop.* VIII. *Cap.* I.

SCHOL. *Cum numerator fractionis pluribus conſtat terminis, juvat aliquando fractionem illam in plures dividere. Sic* $\frac{ab - cd + dd}{a - - b}$ *dividi poteſt in* $\frac{ab}{a - b}$, $\frac{-cd}{a - b}$, $\frac{+dd}{a - b}$. *Hoc autem præſertim fit, ubi aliqui termini numeratoris ſunt per denominatorem diviſibiles, alii vero non. Sit* *enim* $\frac{aa - 3ab - bb}{a + b}$, *dividatur in* $\frac{aa - bb}{a + b}$ & $\frac{-3ab}{a + b}$, *quia vero* $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$ per Prop. VIII. Cap. I. *erit fractio proposita* $a - b - \frac{3ab}{a + b}$.

PROPOSITIO V.

Fractiones multiplicare.

I. Sint multiplicandæ duæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, ducantur inter se numeratores, & denominatores pariter inter se, fiet productum quæsitum $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione fractio $\frac{a - b}{c}$ multiplicata per $\frac{ab}{x}$ producit $\frac{aab - abb}{cx}$.

II. Si multiplicanda sit fractio $\frac{a}{b}$ per integrum c, satis est numeratorem in integrum ducere, eritque productum $\frac{ac}{b}$. Nam integro supponitur unitas, & illud ad fractionem esse redactum, nempe $\frac{c}{1}$ *per* I. *Axiom.*

III. Vel dividatur (si quidem exacte fieri possit) denominator fracti per integrum, habebitur productum.

ctum. Sit $\frac{a}{bc}$ multiplicanda per c, divido bc per c, quotus $\frac{a}{b}$ dat productum quæsitum; nam $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, ut patet. Item sit multiplicanda $\frac{ab-cd}{ac-ad}$ per $c-d$, divido $ac-ad$ per $c-d$, quotus est a, & productum erit $\frac{ab-cd}{a}$.

IV. Si ducenda sit $a + \frac{aa}{b}$ in $b - \frac{cc}{d}$, reducantur integra ad fractiones sibi annexas *per Propos.* 1. nempe $\frac{ab+aa}{b}$ & $\frac{bd-cc}{d}$, eritque earum productum $\frac{\overline{ab+aa} \times \overline{bd-cc}}{bd}$ hoc est $\frac{abbd+aabd-abcc-aacc}{bd}$ seu $ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}$ *per Schol. Prop. præc.*

V. Fieri etiam potest multiplicatio non reductis integris in fractos, ducendo $a \times b$, & habetur ab, tum $\frac{aa}{b} \times b$, & oritur $\frac{aab}{b}$ &c.

$$a + \frac{aa}{b}$$
$$b - \frac{cc}{d}$$
$$\overline{ab + \frac{aab}{b} - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}}$$
$$\overline{ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}}, \text{ ut supra.}$$

COROLL.

Coroll. *Si fractio multiplicetur per suum denominatorem, productum est ipsius numerator. Sic* $\frac{aa}{a+b} \times a+b$ *dat* aa per 4. Axioma.

Schol. *Factum ex integro in fractum, ut* $\frac{ax}{b}$, *quod oritur ex* $\frac{a}{b} \times x$; *vel* $\frac{2ac}{3}$, *quod oritur ex* $\frac{2}{3} \times ac$, *exprimi etiam potest seorsum hoc pacto* $\frac{a}{b}$ x *&* $\frac{2}{3}$ac, *quod notetur.*

PROPOSITIO VI.

Fractiones dividere.

I. Ut dividatur $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, eliso communi denominatore, divide a per c, erit quotus $\frac{a}{c}$. Eadem ratione $\frac{1aab}{2c}$ diviso per $\frac{2ad}{3c}$, quotus erit $\frac{3ab}{4d}$. Nam in divisione fractionum omnia fiunt, ut in multiplicatione, inverso tamen denominatore minutiæ dividentis; proinde dividendo $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, inverso divisore, factaque multiplicatione, quam docuimus in *præc. Prop.*, erit quotus $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, ut in primo exemplo.

II. Si denominatores diversi fuerint, est eadem omnino regula. Sic $\frac{a}{b}$ divisa per $\frac{c}{d}$ dat quotum $\frac{ad}{bc}$.

Pari

Pari ratione $\frac{a-b}{c+d}$ divisa per $\frac{n}{a}$ dat quotum $\frac{aa-ab}{nc+nd}$.

III. Si fractio $\frac{ac}{b}$ dividenda sit per integrum c, divide (si fieri potest, ut in hoc exemplo) numeratorem ac per c, quotus quæsitus erit $\frac{a}{b}$. Similiter $\frac{ad-cd}{a-b}$ dividenda sit per $a-c$, divido $ad-cd$ per ipsum $a-c$, unde habetur d, & quotus quæsitus erit $\frac{d}{a-b}$.

IV. Vel si numerator fractionis dividendæ divisibilis non est, multiplicetur denominator ejusdem fractionis per integrum. Sit $\frac{ac}{b}$ dividenda per d, quia ac non est divisibilis per d, multiplico per ipsum d denominatorem, & habetur quotus quæsitus $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione $\frac{ad-cd}{a-b}$ divisa per $a+b$, dat quotum $\frac{ad-cd}{aa-bb}$, multiplicando scilicet $a-b \times a+b$. Ratio patet, si divisori integro supposita intelligatur unitas, nempe $\frac{a+b}{1}$ per 1. *Axiom.* quo inverso, fit multiplicatio, & producitur quotus, ut supra.

V. Si dividi oporteat $a+\frac{aa}{b}$ per $b-\frac{ce}{d}$, reducantur in-

integri ad fractos sibi adhærentes per *Propos.* 1. deinde $\frac{ab + aa}{b}$ dividatur per $\frac{bd - cc}{d}$, invertendo divisorem, & multiplicando modo supra explicato, erit quotus $\frac{abd + aad}{bbd - bcc}$.

SCHOL. *Si fractiones dividendæ sint valde compositæ, juvabit ad majorem facilitatem eas, antequam fiat divisio, ad terminos simpliciores reducere* per Prop. 11. hujus.

PROPOSITIO VII.

Polynomium cum fractionibus dividere.

I. Sit polynomium A cum fractionibus sibi annexis, quod dividendum sit per polynomium B pariter cum fractionibus, dico quotientem esse $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$.

$$A \quad \frac{1}{3}axx - \frac{1}{2}bxx + \frac{2}{3}abx - \frac{1}{8}aax + \frac{3}{16}abx - \frac{1}{4}aab$$
$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$B \quad \frac{1}{2}ax - \frac{3}{4}bx + ab$$
$$Q \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$$

Nam dividendo $\frac{1}{3}axx$ per $\frac{1}{2}ax$, quotus erit $\frac{2}{3}x$ *per Propos. præc.* quem pono in Q, & statim deletur $\frac{1}{3}axx$ supponendo illi zerum. Per quotum inventum mul-

multiplico divisoris B residuum, hoc est $-\frac{3}{4}bx+ab$; & primo quidem $-\frac{3}{4}bx \times \frac{2}{3}x = -\frac{6}{12}bxx = -\frac{1}{2}bxx$, quod (mutato signo) subtrahitur ex $-\frac{1}{2}bxx$, cui proinde suppono zerum. Deinde $\frac{2}{3}x \times ab = \frac{2}{3}abx$, quod pariter subtrahitur ex $\frac{2}{3}abx$, supposito zero.

Rursus per eundem divisorem $\frac{1}{2}ax$ divido $-\frac{1}{8}aax$, quotus erit $-\frac{1}{4}a$ *per Prop. præc.* quem pono in Q; & statim deleto $-\frac{1}{8}aax$ per zerum illi suppositum, multiplico per ipsum quotum residuum divisoris B, eritque primo $-\frac{1}{4}a \times -\frac{3}{4}bx = \frac{3}{16}abx$, secundo $-\frac{1}{4}a \times ab = -\frac{1}{4}aab$; quæ facta, mutatis signis, subtrahuntur ex dividendo, supponendo illi zerum, & nihil remanet; proinde habetur quotus $Q\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a = \frac{8x-3a}{12}$ *per Prop.* III. & IV. hujus.

II. Sit dividendum polynomium C per polynomium D, dico quotum esse $Q = \frac{1}{3}x - \frac{b}{c}$

$$
\begin{array}{llllllll}
C & \frac{x^3}{6b} & +\frac{axx}{126} & -\frac{xx}{2c} & -\frac{ax}{4c} & -\frac{1}{3}cx & +b \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
D & \frac{xx}{2b} & +\frac{ax}{4b} & -c & & & \\
 & & & & & & \\
Q & \frac{1}{3}x & -\frac{b}{c} & & & &
\end{array}
$$

Nam

Nam dividendo $\frac{x^3}{6b}$ (hoc est $\frac{xxx}{6b}$) per $\frac{xx}{2b}$, quotus erit *per Prop. præc.* $\frac{1}{3}x$, quem pono in Q, & statim deleto $\frac{x^3}{6b}$ (apponendo illi zerum) multiplico residuum divisoris D, nempe $+\frac{ax}{4b}-c$, eritque $\frac{1}{3}x \times \frac{ax}{4b} = \frac{axx}{12b}$ & $\frac{1}{3}x \times -c = -\frac{1}{3}cx$, quæ facta subtraho ex dividendo, supponendo zerum.

Rursus per eundem divisorem $\frac{xx}{2b}$ divido $-\frac{xx}{2c}$, & oritur quotus $-\frac{b}{c}$, quem pono in Q; & deleto $-\frac{xx}{2c}$ (supposito illi zero) multiplico per ipsum quotum residuum divisoris $\frac{ax}{4b}-c$, & duo facta $\frac{ax}{4b} \times -\frac{b}{c} = -\frac{ax}{4c}$, & $-c \times -\frac{b}{c} = +b$ subtraho ex dividendo, cumque nihil remaneat, patet quotum esse $\frac{1}{3}x-\frac{b}{c} = \frac{cx-3b}{3c}$ *per Prop.* III. & IV. *hujus*.

SCHOL. *Pro pleniori hujus secundi exempli & sequentis Propos. intelligentia sciant tyrones*, x^2, *vel* x^3, x^4 *&c. idem esse, ac* xx, *vel* xxx, xxxx *&c. hoc est quantitatem* x *elevatam ad quadratum, ad cubum, quadrato quadratum &c. prout infra explicabitur Cap.* III. *At compendii causa pro* xx, xxx, *scribitur* x^2, x^3 *&c.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Valorem fractionis, cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.

DIvisa sit quantitas $aa - bb + c$ per $a + b$, quotus erit $a - b$, & remanet c, hoc est fractio $\frac{c}{a+b}$ *per Propos.* III. *Cap.* I cujus fractionis valor per infinitos terminos designari potest hoc pacto.

Dividatur c per a, erit quotus $\frac{c}{a}$ *per Prop.* VI. *hujus*, quem duc in divisorem $a + b$, & factum $\frac{ac + bc}{a}$ seu $c + \frac{bc}{a}$ *per Schol. Propos.* IV. *hujus* subtrahe (mutatis signis) ex dividendo c, residuum erit $-\frac{bc}{a}$ *per Prop.* IV. *hujus*.

Deinde hoc residuum $-\frac{bc}{a}$ divide per eundem divisorem a, quotus erit $-\frac{bc}{aa}$ *per Prop.* VI. *hujus*, quem duc in divisorem $a + b$, & factum $-\frac{abc - bbc}{aa}$, seu $-\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$ subtrahe (mutatis signis) ex dividendi residuo $-\frac{bc}{a}$, remanet $+\frac{bbc}{aa}$.

Rursus hoc residuum dividatur per a; & quotus

tus $\frac{bbc}{a^3}$ ducatur in $a+b$, erit factum $\frac{abbc + b^3c}{a^3}$, seu $\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$ subtrahendum (mutatis signis) ex residuo $+ \frac{bbc}{aa}$, & relinquitur $- \frac{b^3c}{a^3}$, & sic deinceps.

Unde apparet ratio divisionem continuandi per infinitos terminos, qui sunt proportionales, & seriem Geometricam constituunt, nempe

$$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \&c. = \frac{c}{a+b}.$$

COROLL. I. *Si fiat* a $=$ 2, b $=$ 1, *&* c $=$ 1, *ita ut* $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$, *& hi valores substituantur in terminis seriei jam inventis, aut fractio* $\frac{1}{2+1}$ *eodem pacto dividatur, quo divisa fuit fractio* $\frac{c}{a+b}$, *oritur series Geometrica* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ *&c. Similiter si fiat* a $=$ 3, b $=$ 1, *&* c $=$ 1, *nempe* $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3+1}$, *oritur series* $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ *&c. Quæ quidem series terminorum Geometrice decrescentium, ut patet, exprimere valent quotum quam proxime verum datæ fractionis, modo talis fractionis numerator sit unitas.*

COROLL. II. *Series fractionum hujusmodi continuo decrescentium, quæ ad verum valorem semper magis accedunt, dicuntur* convergentes. *Quod si termini continuo crescant, tunc a vero valore continuo recedunt, ac*

di-

divergentes *appellantur*. *Ut si ponatur* a $=$ 1, b $=$ 2, *&* c $=$ 1, *hoc est* $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+2}$, *fit series divergens* $1 - 2 + 4 - 8 + 16$ *&c. quæ a valore fractionis* $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ *tanto magis recedit, quanto magis continuatur, ut rem consideranti patet*.

SCHOL. I. *Hanc doctrinam, quam tanquam inutilem Cruzas in sua Algebra* Cap. XIV. num. 40. *taxavit, plurimi fecerunt Cl. Viri* Leibnitius (*a*), Jac. Bernullus (*b*), Guido Grandus (*c*), Wolfius (*d*), & alii.

SCHOL. II. *Cum fractiones Decimales in omni fere Mathesi magni sint usus, easque nobis in approximatione radicum* Cap. XI. *adhibere mens sit, brevem de illis notitiam in sequenti Appendice subjicimus*.

APPENDIX

De fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO I.

FRactiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in 10 æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias 10 partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit: oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *secundæ*, *tertiæ*

(*a*) Acta. Erudit. Pf. ann. 1682. & 1683. (*b*) De Ser. infinit. p. m. 267. (*c*) Theor. Hugen. p. 126. (*d*) Elem. Analy. Cap. 1. Prob. 7.

tiæ, *quartæ &c.* iisque distinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cyphra o. Sic fractio decimalis $\overset{0}{5}.\overset{I}{8}\ \overset{II}{6}\ \overset{III}{4}\ \overset{IV}{2}$ significat qninque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed satis est virgulam ultimam apponere, & integra puncto distinguere, ut $5.864\overset{IV}{2}$. Quæ quidem fractio idem valet, ac $5+\frac{8}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}$ seu $\frac{58642}{10000}$. At commodi gratia decimales scribuntur instar integrorum, omisso denominatore, modo supra explicato, nempe $5.864\overset{IV}{2}$.

Coroll. I. *Hinc sequitur, virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum; ut in decimali* $5.\overset{I}{8}\ \overset{II}{6}\ \overset{III}{4}$ *apex unus importat denominatorem* 10, *duo apices denominatorem* 100, *tres denominatorem* 1000 *&c. hoc est* $\frac{8}{10}\ \frac{6}{100}\ \frac{4}{1000}$.

Coroll. II. *Hinc facile decimales ad eandem denominationem reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis* $3.\overset{I}{5}$ *reducenda sit ad secu ndas, ad tertias, vel quartas &c. scribitur* $3.5\overset{II}{0}$, $3.50\overset{III}{0}$, $3.500\overset{IV}{0}$. *Valor enim non mutatur; nam* $\overset{I}{5}=5\overset{II}{0}$, $\overset{I}{5}=\overset{II}{5}\overset{III}{0}$ *&c. ut julii* 5 *sunt asses* 50.

Coroll. III. *Si integro cyphræ quotcunque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet, ut si ad* 3 *addas* $00\overset{III}{0}$, *ut fiat* $3.00\overset{III}{0}$, *non mutatur integri valor. Significat enim,*

enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000; *nam* $\frac{3000}{1000} = 3$.

SCHOL. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$; *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0. 8, 0. 24, 0. 725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$ *&c.*

DEFINITIO II.

FRactionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0. 5679, & 0. 045 notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Corol.* 1.

DEFINITIO III.

PRogressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut $4.\overset{\text{I}}{2}\overset{\text{IV}}{5}$, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cyphris interpositis supplentur: sic eadem decimalis, interpositis duabus cyhpris, erit $4.200\overset{\text{IV}}{5}$. Similiter $3.\overset{\text{II}}{5}\overset{\text{V}}{7}$ fiet $3.0500\overset{\text{V}}{7}$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ scribitur $0.00\overset{\text{III}}{5}$, & $3 + \frac{45}{10000}$ scribitur $3.004\overset{\text{IV}}{5}$. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll.* 2. *&* 3. fuit explicatum.

PROPOSITIO I.

Decimales addere, & subtrahere.

FRactiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant *per Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per Defin.* 3. deinde additio & subtractio fiant, ut in communi Arithmetica additio & subtractio integrorum.

ADDITIONIS EXEMPLA.

A 3.245^{III}	$5.\overset{\text{I}}{2}\,\overset{\text{III}}{7} = 5.207^{\text{III}}$
B 7.39^{II}	$6.\overset{\text{I}}{4}\,\overset{\text{II}}{5} = 6.45^{\text{II}}$
C 10.635^{III}	Summa 11.657^{III}

COROLL. *Patet ratio ex dictis: nam si decimales* A & B *fiant ejusdem denominationis* per Coroll. 2. *erunt* per Coroll. 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$, *proinde* $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C\ 10.635^{\text{III}}$ *per Defin.* 1.

SUBTRACTIONIS EXEMPLA.

A 4.572^{III}	$7.\overset{\text{I}}{4}\,\overset{\text{III}}{2} = 7.402^{\text{III}}$
B 1.29^{II}	$\overset{\text{II}}{3}\,\overset{\text{III}}{5} = 0.035^{\text{III}}$
C 3.282^{III}	differentia 7.367^{III}

CO-

COROLL. *Ratio est eadem, ac additionis. Nam si decimales* A & B *ad eandem denominationem reducantur per* Coroll. 2. *erunt per* Coroll. 1. $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{1190}{1000}$; *hinc* $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1190}{1000} = \frac{3282}{1000} = C\ 3.28\overset{III}{2}$ *per Defin.* 1.

SCHOL. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, adduntur integro tot zeri, quot sunt apices decimalis subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex* 8 *integris tres centesimas, hoc est* $0.0\overset{II}{3}$, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* $8.0\overset{II}{0}$ *eritque residuum* $7.9\overset{II}{7}$, *ut patet.*

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRactiones decimales multiplicantur, ut integra in communi Arithmetica, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

EXEMPLA.

I.	II.	III.
$4.0\overset{II}{5}$	$0.74\overset{III}{5}$	$0.00035\overset{VI}{6}$
$3.\overset{I}{2}$	$4\overset{II}{2}$	$0.004\overset{IV}{8}$
810	1490	2848
1215	2980	1424
$12.96\overset{III}{0}$	$0.3129\overset{V}{0}$	$0.000001708\overset{X}{8}$

COROLL. I. *Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo* $4.\overset{\mathrm{II}}{05} = \frac{405}{100}$ & $3.\overset{\mathrm{I}}{2} = \frac{32}{10}$ *per* Defin. 1. *Ex communi autem Arithmetica* $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000}$ $= 12.\overset{\mathrm{III}}{960}$ Per Defin. 1. & Coroll. 1., *quod est ejusdem exempli primi productum*.

COROLL. II. *Patet etiam ex primo exemplo, tres tantum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot desunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.*

COROLL. III. *Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta, ut si multiplicari oporteat* $\overset{\mathrm{I}}{4}\ \overset{\mathrm{III}}{5}$ *per* $3.\ \overset{\mathrm{II}}{2}$, *primo progressio interpositis zeris fiat integra per* Defin. 3., *hoc est fiat* $\overset{\mathrm{I}}{4}\ \overset{\mathrm{III}}{5} = \overset{\mathrm{III}}{405}$, & $3.\ \overset{\mathrm{II}}{2} = 3.\overset{\mathrm{II}}{02}$, *deinde multiplicando* $\overset{\mathrm{III}}{405} \times 3.\overset{\mathrm{II}}{02}$ *habetur productum* $1.\ \overset{\mathrm{V}}{22310}$.

SCHOL. *Si factorum unus sit numerus integer sine ullo sibi decimali annexo, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus.*

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cyphræ, ut in III. exemplo.

EXEMPLA.

I. $\overset{II}{3}$) $0.1356\overset{V}{3}$ | $4.52\overset{III}{1}$. II. $5.2\overset{III}{4}$) $18.86\overset{II}{4}$ | $3.\overset{I}{6}$

3144

—00

III. $27.58\overset{III}{9}$) $0.35\overset{III}{4}\ldots\ldots$ | $0.0128\overset{V}{3}$

27589

—78110

55178

229320

220712

—86080

82767

3313 &c.

COROLL. *Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo* per Defin. 1. *habetur* $\overset{II}{3} = \frac{3}{100}$ & $0.1356\overset{V}{3} = \frac{13563}{100000}$, *proinde dividendo numeratorem per numeratorem & denominatorem per denominatorem, ac si essent numeri integri, habetur nova fractio* $\frac{4521}{1000} = 4.52\overset{III}{1}$ per Defin. 1. *nempe quotus in primo exemplo inventus. In tertio exemplo cum quinquies addita sit cyphra* 0, *dividendi apex fit* VIII, *a quo divisoris apice* III *subtracto, residuum* V *dat quoti apicem.*

SCHOL. *Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per* Defin. 3. *deinde instituatur divisio, ut supra dictum est.*

PROPOSITIO IV.

Fractionem quancumque in partes decimales reducere.

SIt data fractio $\frac{3}{5}$ reducenda in partes v. g. millesimas; Fiat $5.\ 3 :: 1000.\ x$; erit per regulam proportionum $x = \frac{3000}{5} = 600$: unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.600$ *per Defin.* 1.

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858, defectu existente minori, quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem, nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

SCHOL. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractioue radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis per se manifesta est.*

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur, quot uncias unius pedis romani conficiant particulæ decimales $\overset{111}{750}$. Quia pes romamanus dividitur in uncias 12, infertur, particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem per *Defin.* 1. particulæ $\overset{\text{III}}{750} = \frac{750}{1000}$. Fiat jam 1000. 750 :: 12. x; erit per regulam proportionum $x = \frac{9000}{1000} = 9$. Habentur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $\overset{\text{III}}{750} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{3}{4}$ unius pedis romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti romani, quod in asses 100 dividitur, contineant decimales particulæ $\overset{\text{IV}}{5610}$. Cum *per Defin.* 1. sint $\overset{\text{IV}}{5610} = \frac{5610}{10000}$; si fiat 10000. 5610 :: 100. x, erit per regulam proportionum $x = \frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses $56 + \frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis romani semissem. Ratio per se patet.

SCHOL. Simon Stevinus (a) *decimalium auctor ingeniosissimus eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo; cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici* Tacquetus (b), Præstetus (c), Reyneau (d), Wolfius (e), & alii *hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.*

(a) Oeuvres Mathemat. in f. p.m. 200. (b) Arith. pract. l. 2. Cap. 9.
(c) Elemens des Mathemat. Tom. 1. l. 9. (d) Science du Calcul.
(e) Elem. Matheseos edit. 2. Tom. 1. Cap. 9.

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

DEFINITIONES.

I. Si quantitas ex gr. a seipsam multiplicet, ex dictis *Propos.* 3. *Cap.* 1. fit aa, quod etiam exprimitur per a^2, & dicitur *quadratum*, seu *secunda potestas*. Cujus radix, seu latus est ipsa a, quæ prima etiam potestas dicitur. Si aa multiplicetur per idem latus a, oritur aaa, seu a^3, nempe *cubus*, aut *tertia potestas*. Si aaa rursus per a multiplicetur, oritur $aaaa$, seu a^4, nempe *quadrato-quadratum*, aut *quarta potestas*, & sic in infinitum. Atque hinc habetur series continue proportionalium a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, &c.

II. Numerus potestati adscriptus dicitur *Index*, seu *Exponens* illius potestatis. Exponit enim, quo dimensionis gradu gaudeat talis potestas, & indicat locum, quem occupare debet in serie proportionalium. Ut index 4 indicat quatuor dimensiones ipsius a, & quartum illi locum competere in ordine proportionalium illius seriei.

III. Literæ m, n, r, s indicant exponentem potentiæ indeterminatæ, ut a^m, a^n, a^r, a^s, quæ possunt determinari ad quamlibet potentiam, tertiam, quartam, quintam &c.

IV. Series potestatum constituit progressionem geometricam, quæ procedit in ratione unitatis ad radicem. Exponentes vero progressionem Arithmeticam naturalem numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.

V. Potestas, cujus exponens est numerus fractus, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ &c. designat radicem ejus potestatis, quæ indicacatur a denominatore fractionis; nempe $a^{\frac{1}{2}}$ radicem secundam, $a^{\frac{1}{3}}$ radicem tertiam, seu cubicam &c. unde oritur alia series $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}$; &c. potestatum, quæ dicuntur *imperfectæ*; & idem revera significant, ac $\sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}$ &c. quæ signa dicuntur *Radicalia*.

VI. Potestas, cujus exponens est cum signo negativo, ut $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ &c. significat unitatem divisam per talem potestatem. Sic a^{-1} idem est, ac $\frac{1}{a}$, a^{-2} idem, ac $\frac{1}{aa}$, a^{-3} significat $\frac{1}{aaa}$ &c. Nam si fuerit ex. gr. $\frac{aa}{aaaa}$, eliso aa tam in numeratore, quam in denominatore, habetur 1, (nam $\frac{aa}{aa} = 1$) & remanet $\frac{1}{aa}$, quod æquivalet ipsi a^{-2}. Atque hinc oritur series potestatum, quæ dicuntur negativæ, ut $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$ &c. huic æqualis $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ &c.

VII. Zero, seu nihilum dicitur exponens unitatis, ita ut a^0 significet idem, ac unitatem. Hinc posita progressione geometrica ab 1 incipiente, nempe 1, 2, 4, 8, 16 &c. erit $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 = 16$ &c.

COROLL. *Calculus potestatum, de quo agitur in hoc* *capite, fit per* Exponentes *ipsarum; proinde* Calculus Exponentialis *nuncupatur: qui ob potestates imperfectas* Defin. 5. *explicatas extractionem quoque radicum complectitur.*

SCHOL. I. *Nota, magnum esse discrimen inter* 2a *&* aa, *seu* a^2. *Nam* 2a *significat duplum ejusdem* a, *seu* a + a; *at vero* a^2 *significat secundam potestatem ipsius* a. *Hinc posita* a = 3, *erit* 2a = 6, *at vero* $a^2 = 9$.

SCHOL. II. *Etsi nullum existat in natura solidum, quod pluribus, quam tribus dimensionibus constet; in Algebra tamen alia atque alia concipiuntur solida, quorum dimensionum numerus in infinitum extenditur, ut superiora exempla docent. Usus autem est frequentissimus in seriebus Geometricis, & generatim in doctrina Curvarum.*

PROPOSITIO I.

Potentiam quamcumque per aliam ejusdem radicis multiplicare, aut dividere.

I. ADde simul exponentes, habebis factum.

a^2	$a^{\frac{1}{2}}$	a^{-2}	x^m	y^m
a^3	$a^{\frac{1}{3}}$	a	x^m	y^n
a^5	$a^{\frac{5}{6}}$	a^{-1}	x^{2m}	y^{n+n}

II. Pro divisione subtrahe exponentem potentiæ dividentis ab exponente potentiæ dividendæ, habebis quotum.

a^5	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{-3}}$	y^{m+n}	x^{2n}
a^2	$a^{\frac{1}{3}}$	a	y^n	x^r
a^3	$a^{\frac{1}{6}}$	a^5	y^m	x^{2n-r}

De-

Demonstratio. $a^2 = aa$, & $a^3 = aaa$ ex *Defin.* 1. sed factum ex aa in aaa, si per extensum scriberetur, esset $aaaaa$, ergo $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. Similiter $a^{-2} = \frac{1}{aa}$ per *Defin.* 6, & $a^1 = \frac{a}{1}$ per *Ax.* 1. *Cap.* 2. Sed $\frac{1}{aa} \times \frac{a}{1} = \frac{a}{aa}$, per *Prop.* 5. *Cap.* 2. & $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Ergo multiplicando a^{-2} per a, factum erit a^{-1}. Quod &c.

Simili ratione a^5 divisum per $a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ hoc est, si per extensum fractio scribatur, $= \frac{aaaaa}{aa}$; & ablatis hinc inde aa, residuum est $aaa = a^3$; ergo ut dividatur a^5 per a^2, quotus erit $a^{5-2} = a^3$. Pariter dividere a^2 per a^{-3} idem est, ac dividere $\frac{aa}{1}$ per $\frac{1}{a^3}$; sed $\frac{aa}{1}$ divisum per $\frac{1}{a^3} = \frac{aa \times a^3}{1}$ per *Prop.* 6. *Cap.* 2. ergo dividendo a^2 per a^{-3} provenit quotus a^5. Quod &c.

PROPOSITIO II.

Potestatem quamcunque ad aliam dati exponentis elevare.

Exponens potestatis ducatur in exponentem datum, factum erit exponens potestatis quæsitæ. Sit elevanda a^2 ad potentiam tertiam; ductis inter se exponentibus 2 & 3, habebis potestatem quæsitam a^6. Similiter sit elevanda potestas y^2 ad potestatem 6; multiplicatis exponentibus 2 & 6, habebis y^{12} potestatem sextam quæsitam. Si elevanda

sit

sit ad secundam, tertiam, quartam &c. potestatem scribitur x^{2n}, x^{3n}, x^{4n} &c.

Demonstratio patet ex *Defin.* 1. Nam perspicuum est $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2\times 3} = a^6$; sic etiam $x^{n\times 2} = x^{2n}$, & $x^{n\times 3} = x^{3n}$ &c.

Coroll. *Eodem modo elevantur ad potestatem dati exponentis quantitates, quæ constant facto duarum, vel plurium quantitatum. Sic si* ab *elevetur ad potestatem secundam, erit* $a^2 b^2$, *vel* $\overline{ab}^2$. *Potestas tertia quantitatis* $a^2 b^1 c^3$ *erit* $a^6 b^3 c^9$. *Nam* $a^{2\times 3} b^{1\times 3} c^{3\times 3} = a^6 b^3 c^9$. *Potestas* m *quantitatis* abcd *erit* $\overline{abcd}^m$.

Schol. *Potestates dissimiles adduntur, subtrahuntur, multiplicantur &c. ut cæteræ quantitates. Sint enim duæ potestates* a^m *&* b^n, *earum summa erit* $a^m + b^n$, *differentia* $a^m - b^n$, *factum* $a^m b^n$, *quotus* $\frac{a^m}{b^n}$.

PROPOSITIO III.

Binomium ad quamcunque potentiam elevare.

I. Sit binomium $a+b$ elevandum ad potentiam v. gr. sextam. Scribantur in primo termino prima radicis pars evecta ad potestatem quæsitam, ut hic, ad 6, quæ erit a^6. In secundo termino scribatur eadem a evecta ad potentiam unitate minorem, & ducta in alteram radicis partem b, quæ erit $a^5 b$. In tertio scribantur eadem radix a evecta ad potestatem rursus unitate minorem ducta in quadratum alterius partis radicis, nempe in b^2, quæ erit $a^4 b^2$, & sic deinceps minuendo unitate in quolibet termino potestatem primæ partis radicis, & contra augendo unitate potestatem secundæ partis

ra-

radicis, donec veniatur ad terminum, in quo prima pars radicis unica tantum dimensione constet, qui erit terminus penultimus, & in ultimo reperiantur secunda radicis pars evecta ad eandem potestatem quæsitam. Erit igitur potestas 6^a dati binomii $a+b$.

$$a^6.\, a^5b^1.\, a^4b^2.\, a^3b^3.\, a^2b^4.\, a^1b^5.\, b^6.$$

II. Pro faciliori autem methodo fieri solent ex duabus dati binomii literis duæ progressiones Geometricæ, quarum altera a potentia quæsita incipiens descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usque ad eandem potentiam, & multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, habetur dati binomii potentia quæsita. Quæritur potentia sexta ipsius $a+b$.

Series I.	$a.^6$	$a.^5$	$a.^4$	$a.^3$	$a.^2$	$a.^1$	1.
Series II.	1.	$b.^1$	$b.^2$	$b.^3$	$b.^4$	$b.^5$	b^6

Potestas VI. $a^6+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$.

III. Coefficientes potentiarum, quos Ougtrhedus *uncias* vocat, sic reperiuntur. Exponens primi termini dat unciam secundi termini, ut in superiori exemplo 6 erit uncia secundi termini a^5b. Pro uncia tertii termini duc unciam modo inventam secundi termini, nempe 6, in exponentem 5, quem habet prima pars radicis in eodem secundo termino, & productum 30 divide per 2, quotus 15 est uncia tertii termini. Deinde duc hanc ipsam unciam 15 in exponentem 4, quem habet in tertio termino radicis prima pars, nempe a^4, & productum 60 divide per 3, quotus dat unciam quarti termini, & sic deinceps. Itaque potentia sexta binomii $a+b$ cum unciis suis erit $a^6 + 6a^5b + 15\, a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

IV.

IV. Alii vero pro ejusmodi unciis inveniendis duas Geometricas progressiones numerorum componunt, ita ut ex terminis sibi ordine respondentibus fiat fractio, & multiplicando numeratores inter se, & denominatores pariter inter se, habentur numeri unciales quæsiti. Ecce exemplum pro eadem potentia sexta.

Series I.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Series II.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ est uncia secundi termini.

$\frac{6}{1}.\frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia tertii termini.

$\frac{6}{1}.\frac{5}{2}.\frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$ uncia quarti.

$\frac{6}{1}.\frac{5}{2}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4} = \frac{30}{2} = 15$ uncia quinti.

$\frac{6}{1}.\frac{5}{2}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4}.\frac{2}{5} = \frac{6}{1} = 6$ uncia sexti.

$\frac{6}{1}.\frac{5}{2}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4}.\frac{2}{5}.\frac{1}{6} = 1$ uncia ultimi.

Hac methodo repertæ sunt unciæ potentiarum 1.æ, 2.æ 3.æ 4.æ &c. binomii $a+b$, ut ex sequenti exemplo apparet.

1.æ $a+b$
2.æ $a^2+2ab+b^2$
3.æ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4.æ $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
5.æ $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
6.æ $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Schol. I. *Si binomium sit positivum, omnia signa sunt affirmativa; ut patet ex superiori exemplo. Si vero secunda binomii pars sit negativa, ut* a — b; *termini, in quibus radix* — b *evecta erit ad potestatem imparem* 1, 3, 5 *&c. afficiendi sunt signo* —, *reli-*

qui

qui omnes signo $+$. *Sic potestas tertia binomii* $a - b$ *in superiori exemplo fieret* $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *ob exponentes impares* b^1, b^3.

SCHOL. II. *Si numerus aliquis sive integer, sive fractus praecedat alterutrum, vel utrumque binomii terminum, ex. gr. si elevari debeat ad tertiam potentiam* $a + 2b$, *elevetur primo binomium ipsum* $a + b$ *ad tertiam potentiam, quod secundum methodum superius allatam erit* $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Deinde numerus* 2, *qui afficit* b, *elevetur ad eandem potentiam, ad quam in singulis terminis elevata existit quantitas* b, *erit pro secundo termino* $= 2$, *pro tertio* $= 4$, *pro ultimo* $= 8$. *Duc postea hos numeros, seu potestates coefficientes terminorum, in quibus* b *aequali potestate gaudet, habebis* $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ *pro tertia potestate quaesita binomii* $a + 2b$. *Similiter si elevanda sit ad quartam potestatem* $2ax + b$, *erit* $16a^4x^4 + 32a^3bx^3 + 24a^2b^2x^2 + 8ab^3x + b^4$.

SCHOL. III. *Aliquando juvat binomium ad datam potestatem elevare scribendo ad ejus dexteram exponentem potestatis quaesitae, ducta desuper linea. Sic ut elevetur* $a + b$ *ad quadratum, scribitur* $\overline{a+b}^{\,2}$; *ut ad cubum,* $\overline{a+b}^{\,3}$, *& in genere ad quamcumque potestatem indeterminatam* m, *scribitur* $\overline{a+b}^{\,m}$.

COROLL. I. *Hinc sequitur, ut potestas hoc modo efformata ad aliam potestatem dati exponentis elevetur, satis esse exponentem unius ducere in exponentem alterius. Elevanda sit* $\overline{a+b}^{\,2}$ *ad tertiam potestatem, scribitur* $\overline{a+b}^{\,2\times 3} = \overline{a+b}^{\,6}$. *Similiter elevanda sit* $\overline{a+b}^{\,m}$ *ad potestatem* n, *scribitur* $\overline{a+b}^{\,mn}$.

COROLL. II. *Item sequitur, ut duae potestates ejusdem*

dem quantitatis inter se multiplicentur, sufficere earum exponentes simul addere. Sic $\overline{a+b}^{\,2} \times \overline{a+b}^{\,3}$ *erit* $\overline{a+b}^{\,2+3} = \overline{a+b}^{\,5}$. *Similiter* $\overline{a-b}^{\,m} \times \overline{a-b}^{\,n} = \overline{a-b}^{\,m+n}$. *Contra vero ut dividantur, satis est exponentem dividentis ab exponente dividendi subtrahere. Sic* $\overline{a-x}^{\,5-2} = \overline{a-x}^{\,3}$, *significat potentiam* $\overline{a-x}^{\,5}$ *divisam per potentiam* $\overline{a-x}^{\,2}$. *Item* $\overline{a+b}^{\,m-n}$ *est quotus resultans ex divisione* $\overline{a+b}^{\,m}$ *per* $\overline{a+b}^{\,n}$.

PROPOSITIO IV.

Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quamcumque elevando assignare.

Sit binomium $p+q$ elevandum ad quamlibet potestatem indeterminatam m. Fiant duæ progressiones Geometricæ sequentes:

I.	p^{m}.	p^{m-1}.	p^{m-2}.	p^{m-3}.	p^{m-4}.	&c.
II.	1.	q^{1}.	q^{2}.	q^{3}.	q^{4}.	&c.

Quibus inter se ductis, habetur formula, seu Canon generalis $p^m + p^{m-1}q + p^{m-2}q^2 + p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4$ &c. Ut inveniantur coefficientes, seu unciæ, fiant aliæ duæ series Geometricæ, nempe

I.	m.	$m-1$.	$m-2$.	$m-3$.	$m-4$.	&c.
II.	1.	2.	3	4.	5.	&c.

Fiat fractio, & multiplicatis terminis, ut in *Prop. præc.* erit $\frac{m}{1}$ uncia secundi termini: $\frac{m.\,m-1}{1.\,2}$ uncia tertii termini: $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3}$ uncia quarti ter-

termini &c. quibus suo loco in superiori Canone generali dispositis, habetur formula generalis pro quocumque binomio, aut polynomio ad quamlibet potestatem elevando, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4$ &c.

Patet exponentem m continuo decrescere, proinde ubi fit $= 0$, ibi erit ultimus terminus potentiæ quæsitæ. Nam fiat ex. gr. $m = 3$, in quarto Canonis termino erit $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$.

Sit igitur elevandum ad tertiam potestatem binomium $2ax + bb$. Supponatur $2ax = p$, $+ bb = q$ & $m = 3$. Loco ipsorum p, q, m substituantur eorum valores, nempe $2ax$, $+ bb$ & 3; adhibitaque formula generali, erit $p^m = 8a^3x^3$, $mp^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$, $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 = 6ab^4x$, demum $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 = b^6$. Est igitur tertia potestas quæsita $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

Sit secundo trinomium $a + b - c$ elevandum ad quartam potestatem. Suppono $a = p$, $+ b - c = q$, $m = 4$ factaque, ut modo docuimus, debita valorum substitutione, erit quarta potestas quæsita $a^4 + 4a^3b - 4a^3c + 6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$.

PROPOSITIO V.

Potestates compositas multiplicare.

Multiplicatio potestatum compositarum nullam habet difficultatem, bene perceptis iis, quæ

Propos. VII. *Cap* I. & *Prop.* I. *hujus* dicta sunt, ideoque unum, vel alterum exemplum hoc loco afferre satis erit.

I. Multiplicanda sit quantitas *A* per *B*, productum erit C, nempe:

$$\begin{array}{lllllll}
A & a^2 & -2ab & +b^2 & & & \\
B & a^2 & +2ab & -b^2 & & & \\
\hline
 & a^4 & -2a^3b & +a^2b^2 & & & \\
 & & +2a^3b & -4a^2b^2 & +2ab^3 & & \\
 & & & -a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4 & \\
\hline
C & a^4 & 0 & -4a^2b^2 & +4ab^3 & -b^4 &
\end{array}$$

II. Multiplicari oporteat quantitas *M* $x^2+2ax-a^2+3bx-b^2$ per *N* x^3-2a. Facilitatis gratia disponentur termini, ut sequitur, productum erit *P*.

$$\begin{array}{lllllllll}
 & x^2 & +2ax & -a^2 & & & & & \\
M & & 3bx & -b^2 & & & & & \\
\hline
N & & x^3 & -2a & & & & & \\
\hline
 & x^5 & +2ax^4 & -a^2x^3 & & & & & \\
 & & +3bx^4 & -b^2x^3 & & & & & \\
 & & & & -2ax^2 & -4a^2x & +2a^3 & & \\
 & & & & & -6abx & +2ab^2 & & \\
\hline
P & x^5 & +2ax^4 & -a^2x^3 & -2ax^2 & -4a^2x & +2a^3 & +2ab^2 & \\
 & & +3bx^4 & -b^2x^3 & & -6abx & & &
\end{array}$$

Ubi videre est, terminos, in quibus *x* ad aliquam potestatem elevatur, ordinatim unum sub alio collocari, ita ut dignitates æquales sibi respondeant.

PROPOSITIO VI.

Potestates compositas dividere.

NEque multum negotii facessit potestatum compositarum divisio, si, quæ dicta sunt *Prop.* VIII. *Cap.* I. & *Propos.* I. *hujus* ante oculos habeantur.

I. Sit

I. Sit dividenda quantitas A $6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$ per B $2a^2 - 3ab$. Diviso primo termino $6a^3$ per $2a^2$, quotus est $3a$ *per Propos. 1. hujus*, quem pone in C, & per hunc multiplica totum divisorem B: productum $6a^3 - 9a^2b$ subtrahitur (mutatis signis) ex dividendo A, & remanet $-6a^2b + 9ab^2$; quod divide pariter per $2a^2$, quotus est $-3b$ *per Prop. cit.*, quem pone in C, & per ipsum multiplica, ut antea, totum divisorem B: producitur $-6a^2b + 9ab^2$ subtrahendum (mutatis signis) ex residuo prædicto, & nihil remanet. Habetur ergo quotus C $3a - 3b$.

$$
\begin{array}{lllll|l}
B\ 2a^2 - 3ab)\ A & 6a^3 & -15a^2b & +9ab^2 & & C \\
 & -6a^3 & +9a^2b & & & +3a \\
\cline{2-4}
 & 0 & -6a^2b & +9ab^2 & & -3b \\
 & & +6a^2b & -9ab^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

II. Dividere oporteat M per N, quotus est P, ut sequenti exemplo patet.

$$
\begin{array}{llllll|l}
N\ yy - 16)\ M & y^6 & -8y^4 & -124y^2 & -64 & & P \\
 & -y^6 & +16y^4 & & & & +y^4 \\
\cline{2-5}
 & 0 & +8y^4 & -124y^2 & & & +8y^2 \\
 & & -8y^4 & +128y^2 & & & +4 \\
\cline{2-5}
 & & 0 & +4y^2 & -64 & & \\
 & & & -4y^2 & +64 & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

PROPOSITIO VII.

Ex potestatibus radicem extrahere.

I. Ut extrahatur radix ex potestate data, dividatur exponens potestatis per exponentem radicis quæsitæ, quotus erit quæsita radix. Quæritur radix secunda potestatis a^3, diviso exponente 3

 per

per 2, habetur radix quæsita $a^{\frac{3}{2}}$. Similiter radix tertia ejusdem potestatis erit $a^{\frac{3}{3}} = a^1$. Item radix quinta potestatis a^7 erit $a^{\frac{7}{5}}$, seu $a^{1+\frac{2}{5}}$ & generaliter $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; eademque ratione $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

II. Si radix sit extrahenda ex facto plurium quantitatum, ut a^6b^2c, eodem modo operandum. Nam divisis exponentibus ejusdem a^6b^2c per exponentem radicis quæsitæ, habetur radix. Erit ergo ipsius a^6b^2c radix secunda $a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, hoc est $a^3bc^{\frac{1}{2}}$, ita ut $\sqrt{a^6b^2c} = a^3bc^{\frac{1}{2}}$. Sic $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, seu $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$.

Ratio deducitur ex ipsa potestatum compositione. Nam sicuti una potestas ad aliam elevatur multiplicando earum exponentes *per Prop.* 2. *hujus*; sic ut radix extrahatur, contrario modo agitur, dividendo scilicet exponentem potentiæ per exponentem radicis quæsitæ.

SCHOL. I. *Sed juvabit tyronem sequentes expressiones, quæ apud auctores non raro occurrunt, hic adnotare.* $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, *seu* $a^1b^{\frac{1}{2}}$; *nam* a *est radix ipsius* a^2 & $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. *Pariter* $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^1a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$; *ubi patet, quantitatem partim esse rationalem, partim irrationalem. Item* $\sqrt{a^3b^3} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} = ab\sqrt{ab}$. *Hæc pauca cæteris dignoscendis facem præferunt.*

SCHOL. II. *Hanc novam radices exprimendi rationem excogitavit* Newtonus (a) *magno calculi commodo. Nam*

(a) Epist. ad Oldenburg. apud Wallisium Tom. III. pag. 622.

Nam sic quantitates irrationales ad formam rationalium reducuntur, & eodem modo pertractantur, de quo in Cap. sequenti.

PROPOSITIO VIII.

Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.

Methodus extrahendi radices ex compositis quantitatibus non differt ab ea, qua in vulgari Arithmetica uti solemus. Sed claritatis gratia sit quantitas A, cujus radix quadrata quæritur.

		A	$a^2 + 2ab + b^2$		$+ 2ac + 2bc + cc$			B
C	a		$-a^2 - 2ab - b^2$		$-2ac - 2bc - cc$			$a+b+c$
D	$2a+b$		———	———	———			
E	$2a+2b+c$		o	o	o			

Primo radix quadrata quantitatis a^2 est a, hanc pone dextrorsum in B, & sinistrorsum in C, ejusque quadratum a^2 subtrahe ex a^2, remanet o. Duplica deinde inventam radicem a, quam pone in D, & per $2a$ divide $+ 2ab$ datæ quantitatis residuum, habebis quotum b, quem adde in B priori radicis termino, & sinistrorsum in D, habebis $2a+b$, quo ducto in radicem b, fit $2ab + bb$, mutatisque signis, subtrahe ex quantitate A, remanet o.

Rursus duplicata radice $a + b$, habebis in E $2a + 2b$ divisorem, per quem divide quantitatem $2ac$, quotus erit c, quo posito tam in B, quam in E, multiplica per hanc radicem c modo inventam totam quantitatem E, & productum $2ac + 2bc + cc$ subtrahe, mutatis signis, ex quantitate residua ipsius A, nihil remanet. Proinde $\sqrt{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc} = a + b + c$.

Sit rursus extrahenda radix quadrata ex quantitate M. Operare ut supra, invenies radicem $x + b - 1$, ut in N.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \quad M & \\
x & x^2 + 2bx - 2x + b^2 - 2b + 1 & \quad N \\
x2 + b & -x^2 - 2bx \qquad\quad - b^2 & x + b - 1 \\
2x + 2b - 1 & \quad 0 \qquad 0 \qquad\qquad 0 & \\
 & \text{Resid.} - 2x - 2b + 1 & \\
 & \qquad + 2x + 2b - 1 & \\
 & \qquad\quad 0 \qquad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

COROLL. *Patet, ex compositione potestatum, tum etiam ex earum resolutione, in omni quadrato quantitatis compositæ contineri quadrata partium quantitatum peculiarium, ex quibus constat radix, ut in primo exemplo* a^2, b^2, c^2, *unde radix est* $a+b+c$, *&* *ulterius contineri duplum rectanguli earundem partium, hoc est* 2ab, 2bc, 2ac.

SCHOL. I. *Omne quadratum duplicem habet radicem, unam positivam, negativam alteram. Nam* aa *tam oritur ex* a×a, *quam* —a×—a. *Proinde in primo exemplo radix* a+b+c *fieri potest negativa* —a—b—c, *&* *in secundo* x+b—1 *fieri potest* —x—b+1, *&* *tamen idem quadratum habebitur. Quod pro solutione problematum secundi gradus scire juvabit. Ex quantitate autem negativa radix quadrata extrahi non potest. Nam* —aa *neque oriri potest ex* a×a, *neque ex* —a×—a, *ut patet* ex Propos. VII. Cap. I. *idcirco dicitur quadratum* imaginarium, *quod dari revera non potest.*

SCHOL. II. *Si ex data quantitate radix quadrata extrahi nequit, designatur ipsa radix præfigendo quantitati propositæ signum radicale* $\sqrt{\ }$. *Sic ad extrahendam radicem secundam ex* aa+bb, *scribitur* $\sqrt{aa+bb}$; *&* *hinc oriuntur quantitates radicales, de quibus in sequenti Cap.*

PRO-

PROPOSITIO IX.

Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.

I. SIt quantitas A, cujus radix cubica inquiritur.

1. Radix cubica extracta ex a^3 est a *per Prop.* VII. quæ ponatur seorsim, ut in B, & per ejus quadrati triplum $3aa$ positum in C dividatur secundus terminus, nempe $-3aab$, oritur quotus $-b$ pro altera radicis parte ponenda in B.

2. Ex $a-b$ fiat cubus, quem subtrahe ex quantitate data A; & cum nihil remaneat, erit radix quæsita $a-b$.

$$\begin{array}{llllll|l} & A & a^3 - 3aab & + 3ab^2 & - b^3 & & B \\ C\ 3aa\ ) & & -a^3 + 3aab & - 3ab^2 & + b^3 & & a - b \\ \hline & & 0 \quad\ 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

II. Sit extrahenda radix cubica ex quantitate F.

1. Radix cubica primi termini $8a^3$ *per Prop.* VII. est $2a$, quam pone in G, & per ejus quadrati triplum $12a^2$ divide secundum terminum quantitatis F, nempe $-36a^2$, quotus -3 dat alteram radicis partem ponendam in G.

2. Ex radice $2a-3$ fiat cubus $8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$, quem subtrahe ex quantitate data F; & cum nihil remaneat, signum est, radicem cubicam esse $2a-3$.

$$\begin{array}{l|l|l} 12a^2\ ) & F\quad 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27 & G \\ & \quad\ -8a^3 + 36a^2 - 54a + 27 & 2a - 3 \\ \hline & \quad\ \ 0 \qquad\ 0 \qquad\ 0 \qquad 0 & \end{array}$$

Si radix tribus, vel pluribus constet terminis, quod ex ipsa terminorum inspectione facile dignoscitur, tunc præstat cubicam radicem inquirere per formulas generales, de quibus in sequenti Propos.

Co-

Coroll. *Latere non potest methodi hujus ratio nisi eos, qui cuborum genesin prorsus ignorant. Patet enim, cubum ex binomio ex. gr. efformatum constare cubis utriusque quantitatis, & ulterius triplo quadrati primæ in secundam, & vicissim secundæ in primam quantitatem ducti, ut in primo exemplo constat cubis* a^3, b^3, *tum etiam* $3a^2b$, & $3b^2a$. *Signa autem, quibus cubi illi sunt affecti, produnt signa eorum radicis, ut in secundo exemplo cubus* -27 *indicat radicem negativam* -3.

Schol. I. *Quod si ex data quantitate radix extrahi non possit modo prædicto*, ex. gr. *ex* $aa-bb$; *indicatur signo radicali cubico, nempe* $\sqrt[3]{aa-bb}$, *quod de aliis quibuscunque radicibus dictum intelligatur.*

Schol. II. *Fractionum radices habentur, si separatim ex numeratore, & denominatore eodem modo extrahantur. Juvabit tamen tyronem ad expressiones sequentes animum advertere. Radix quadrata quantitatis* $\frac{xx+2ax+aa}{bb}$ *erit* $\frac{x+a}{b}$. *Similiter* $\frac{aa}{bc}$ *erit* $\frac{a}{\sqrt{bc}}$. *Radix cubica quantitatis* $\frac{a^3}{b^3c^3}$ *erit* $\frac{a}{bc}$. Item $\frac{a}{\sqrt[3]{dm}}$ *est pariter cubica quantitatis* $\frac{a^3}{dm}$.

Schol. III. *Si fractio, ex qua radix extrahenda est, integro adhæreat, tunc primo integrum ad fractionem ejusdem nominis reducatur* per Prop. 1. Cap. 2. *Deinde extrahatur, si fieri possit, radix quæsita ex numeratore & denominatore. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate* $6+\frac{1}{4}$, *facta reductione* per Prop. cit. *habetur* $\frac{25}{4}$,

cu-

cujus radix est $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Similiter sit quantitas $\frac{c^2 - 4c}{4}$ $+ 1$, facta reductione per Prop. cit. oritur $\frac{c^2 - 4c + 4}{4}$, cujus radix $= \frac{c - 2}{2}$ per Prop. 8. hujus.

PROPOSITIO X.

Radices quascumque extrahendi methodum generalem assignare.

Consideretur quantitas, ex qua radix eruenda est, uti quantitas elevanda ad eam potestatem, cujus radix inquiritur. Exponens pro radice quadrata ex *Defin.* 5. erit $= \frac{1}{2}$, pro cubica $= \frac{1}{3}$, pro quadrata $= \frac{1}{4}$. Exemplis nonnullis res fiet clarissima.

I. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + cc$. Ex formula generali *Prop.* 4. huius $p^m + mp^{m-1} q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2$ &c. sumantur duo priores termini (nam alii sunt inutiles, cum radices extrahendæ sunt rationales) & ponatur $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac$ &c. $= q$, & (quia agitur de radice quadrata) erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque primus terminus radicis $= p^m = a^2 \times \frac{1}{2} = a$. Secundus erit $mp^{m-1} q = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} a^2 \times -\frac{1}{2} q$, hoc est $\frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab - 2ac}$, nempe $\frac{1}{2} a^{-1} \times 2ab = a^{-1+1} = a^0 b = 1b$. Similiter $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1+1} c = -a^0 c = -1c$; ideoque radix quæsita est $a + b - c$. Neque enim ulterius est progrediendum, ubi m fiat $= 0$; proinde cum hic habeatur $a^0 b$, & $- a^0 c$, habentur duo ultimi radicis termini.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex quantitate

$$9a^2 - 12ab + 6a + 4bb - 4b + 1.$$

Ex eadem formula generali $p^m + mp^{m-1} q = 0$, pone $p = 9a^2$, $q = -12ab + 6a$ &c. $m = \frac{1}{2}$; erit $p^m = 9^{\frac{1}{2}} \times a^{2 \times \frac{1}{2}} = 3a$, nam $9^{\frac{1}{2}} = 3$, *per Defin.* 5., *& Propos.* 7. Est igitur $3a$ primus terminus. Deinde $mp^{m-1} = \frac{1}{2} \times 9^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times a^{2m-1} = \frac{1}{6} a^{-1} \times q = \frac{1}{6} a^{-1} \times -12ab = -\frac{12}{6} a^{-1+1} \times b = -2a^0 b = -2b$, qui erit secundus radicis terminus. Pariter $\frac{1}{6} a^{-1} \times 6a = a^{-1+1} = 1a^0$. Unde habetur tertius terminus radicis $+ 1$. Est ergo radix quæsita $3a - 2b + 1$.

II. Quæritur radix cubica quantitatis $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$. Pone $a^3 = p$, & $- 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$-b^3 = q$, erit (ob radicem cubicam) $m = \frac{1}{3}$. Positis igitur valoribus p & q in duobus formulæ generalis terminis $p^m + mp^{m-1} q$, habebis $p^m = a^{3 \times \frac{1}{3}} = a$ primum radicis terminum. Deinde $mp^{m-1} q = \frac{1}{3} a^{3 \times -\frac{2}{3}}$, hoc est $\frac{1}{3} a^{-2} q = \frac{1}{3} a^{-2} \times -3a^2 b = -a^{-2+2} b = -a^0 b = 1b$. Atque hic sistendum, ut supra monuimus. Radix ergo cubica est $a - b$.

III. Quæritur radix quadratoquadrata quantitatis $a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$. Pone $a^4 = p$, & $-4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4 = q$, erit $m = \frac{1}{4}$ ob radicem quadrato-quadratam. Positis jam valoribus in duobus formulæ generalis terminis, habebis primum terminum radicis $p^m = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a^1$. Pro secundo erit $mp^{m-1} q = \frac{1}{4} a^{4 \times -\frac{3}{4}}$, hoc est $\frac{1}{4} a^{-3} q = \frac{1}{4} a^{-3} \times -4a^3 b$; unde oritur productum $-a^0 b$, ex quo admonemur, haberi jam secundum radicis terminum b, nec esse ulterius progrediendum. Est ergo radix quæsita $a - b$.

SCHOL. *Cum valor exponentis* m *nullibi occurrit* $= 0$, *tunc radix datæ quantitatis erit irrationalis*, & *extractio radicis continuari poterit in infinitum, seu per infinitos terminos*, *id quod* approximatio radicum *dicitur, de quo in Prop. sequenti*.

PROPOSITIO XI.

Extractiones radicum per infiinitos terminos continuare.

I. EXtrahenda sit ex quantitate $a^2 - b^2$ radix ex. gr. quadrata per terminos infinitos A, B, C, D &c. Adhibeantur formulæ generalis tot termini, per quot continuatam vis extractionem radicis, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3$ &c. Pone $p = a^2$, $q = -b^2$, & (ob radicem quadratam) $m = \frac{1}{2}$, erit

$$A(= p^m = a^{2\times\frac{1}{2}}) = a^1.$$

$$B(= mp^{m-1}q = \tfrac{1}{2}a^{2\times-\frac{1}{2}}, \text{ hoc est } \tfrac{1}{2}a^{-1}q) = -\frac{b^2}{2a}$$

$$C(= m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = \tfrac{1}{2} \times -\tfrac{1}{4}, \text{ hoc est } -\tfrac{1}{8}a^2 \times -\tfrac{2}{3},$$

$$\text{hoc est } -\tfrac{1}{8}a^{-3}q^2) = -\frac{b^4}{8a^3}.$$

$$D(= m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = \tfrac{1}{2} \times -\tfrac{1}{4} \times -\tfrac{1}{2},$$

hoc eſt $\frac{1}{16} a^2 \times -\frac{5}{2}$, hoc eſt $\frac{1}{16} a^{-5} q^3) = -\frac{b^6}{16a^5}$.

Et ſic deinceps in infinitum. Eſt ergo radix quæſita $A + B + C + D$ &c. $= a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9}$ &c.

II. At pro hac formula, qua utitur *Cl. Guiſneus* (a), atque alii, adhibere præſtat formulam Newtonianam magis quidem expeditam, & moleſtiæ fractionum minus obnoxiam, videlicet $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ$ &c. in qua P ſignificat primum terminum quantitatis illius, cujus radix inveſtigatur; Q reliquos terminos diviſos per primum; $\frac{m}{n}$ indicem dimenſionis, ſeu radicis quæſitæ. Termini jam inventi exprimuntur literis A, B, C, D &c. nempe A exprimit primum radicis terminum $= P^{\frac{m}{n}}$; B ſecundum $= \frac{m}{n} AQ$; C tertium $= \frac{m-n}{2n} BQ$, & ſic deinceps. Sed ecce exemplum.

Extrahenda ſit radix ſecunda ex quantitate $\sqrt{c^2 + x^2}$ ſeu

---

(a) Application de l'Algeb. a la Geometr ie, edit. 2. Paris pag. xxx.

seu $\overline{c^2+x^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Prop.* 7. *hujus*; dico, radicem esse $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$ &c. Nam erit in hoc casu $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$; proinde habetur

$$A\ (= P^{\frac{m}{n}} = c^2 \times \tfrac{1}{2}) = c.$$

$$B\ (= \frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2}) = \frac{x^2}{2c}.$$

$$C\ (= \frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} \times \frac{x^2}{2c} \times \frac{x^2}{c^2}) = -\frac{x^4}{8c^3}.$$

$$D\ (= \frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{1}{2} \times -\frac{x^4}{8c^3} \times \frac{x^2}{c^2}) = \frac{x^6}{16c^5}.$$

$$E\ (= \frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} \times \frac{x^6}{16c^5} \times \frac{x^2}{c^2}) = -\frac{5x^8}{128c^7}.$$

Radix ergo quæsita $= A + B + C + D$ &c. $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$ &c.

Similiter extrahenda sit radix tertia ex quantitate $\sqrt{a^3 - b^3}$, seu $\overline{a^3 - b^3}^{\frac{1}{3}}$ per *Prop. cit.* Procedendo eadem methodo, erit $P = a^3$, $Q = -\frac{b^3}{a^3}$, $m = 1$, $n = 3$, proinde

$$A\ (= P^{\frac{m}{n}} = a^3 \times \tfrac{1}{3} =)\ a^1.$$

$$B\ (=\frac{m}{n}AQ)=-\frac{b^3}{3a^2}.$$

$$C\ (=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{b^6}{9a^5}.$$

$$D\ (=\frac{m-2n}{3n}CQ)=-\frac{5b^9}{81a^8}.$$

$$E\ (=\frac{m-3n}{4n}DQ)=-\frac{10b^{12}}{243a^{11}}.$$

Est ergo radix quæsita $=A+B+C+D+E$ &c. $=a-\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}-\frac{5b^9}{81a^8}-\frac{10b^{12}}{243a^{11}}$ &c.

SCHOL. I. *Hac formula uti quoque possumus in divisione fractionis per terminos infinitos. Sit dividenda* $\frac{1}{a+b}$ (*hoc est* $\overline{a+b}^{-\frac{1}{1}}$ per Def. 6.) *Pone* $P=a$, $Q=\frac{b}{a}$, $m=-1$, $n=1$; *erit* $A\ (=P^{\frac{m}{n}}=a^{-\frac{1}{1}}=a^{-1}=\frac{1}{a}.$

$$B\ (=\frac{m}{n}AQ)=-1\times\frac{1}{a}\times\frac{b}{a}=-\frac{b}{a^2}.$$

$$C\ (=\frac{m-n}{2n}BQ)=-1\times-\frac{b}{a^2}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^3}\ \&c.$$

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}$ *&c. ut in* Prop. 8. Cap. 2.

SCHOL. II. *Patet jam, ex duplici fonte oriri series infinitas terminorum proportionalium, scilicet ex divisione, & extractione radicum. Primo modo quæsitæ fuerunt a*

Nicolao Mercatore Holsato (a); *secundo a* Newtono (b). *Earum usus est ad obtinendam radicum approximationem, ut vidimus; ad inveniendas areas & longitudines Curvarum, ad Solidorum superficies dimetiendas, aliaque magni momenti circa curvas Mechanicas expedienda. Nos aliquem ipsarum usum in resolutione æquationum experiemur.*

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

DEFINITIONES.

I. Quantitas, sive numerica, sive literalis, ex qua radix extrahi non potest, dicitur potentia imperfecta, quantitas surda, & irrationalis; & a signo $\sqrt{}$, quod *radicale* dicitur, *radicalis* denominatur, ut $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{ax+bb}$; sive, ut aliis placet scribere, $\sqrt[3]{}(a-b)$, $\sqrt[4]{}(ax+bb.)$

II. Signa radicalia præfixos habent exponentes ejus potentiæ, cujus radicem designant. Ubi nullus est exponens, pro radice secundæ potentiæ accipitur, ut $\sqrt{a}$ indicat radicem secundam quantitatis a. At $\sqrt[3]{a-b}$ significat radicem tertiam, seu cubicam quantitatis $a-b$.

III. Si radicale signum præcedat numerus, aut quan-

(a) Logarithmo-tecnia Londini 1668. Acta Erudit. Lipf. an. 1693.

(b) Epist. ad D. Oldenburgium an. 1676. in Tom. 3. Operum Wallisii Analy. per quantit. series &c. in Tom. Philosophiæ Natur. Amstælod. ann. 1723.

quantitas literalis, ut $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ &c. quantitas, quæ præcedit; dicitur esse *extra signum*; nempe 2 & a: A quibusdam vero quantitates illæ vocantur *Coefficientes*: Cum quantitas nulla præcedit, ibi semper intelligitur unitas, ut $1\sqrt{2}$; & $1\sqrt{a}$ &c.

IV. Ut quantitas extra signum sub signo radicali poni possit; elevari prius debet ad illam ipsam potestatem, quam indicat exponens signi radicalis, & multiplicari per quantitatem sub signo radicali existentem. Sic $2\sqrt{3}$ fiet $\sqrt{12}$. Item $a\sqrt[m]{b-c}$ erit $\sqrt[m]{a^2b-a^2c}$. Demum $a\sqrt{bc}$, erit $\sqrt[m]{a^mbc}$.

V. Contra vero quantitas sub signo radicali existens, & eundem exponentem habens, quem habet signum radicale, est quantitas rationalis; & ponitur extra signum, extracta radice. Sic $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{am^3}=m\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$. Relinquitur sub signo id, quod radicale est.

VI. Quantitas negativa sub signo radicali; cujus exponens est numerus par, dicitur radix *imaginaria*, seu impossibilis, ut $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$; similiter $\sqrt[2]{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ &c. nam impossibile est quadratum negativum ex dictis in *Schol.* 1. *Prop.* 8. *Cap.* 3.

VII. Duæ quantitates radicales dicuntur *commensurabiles* inter se, seu *communicantes*, cum ad simplicem expressionem redactæ habent sub signo radicali quantitatem eandem, ut $3\sqrt{5}$, & $2\sqrt{5}$; pariter $b\sqrt{a-b}$, & $c\sqrt{a-b}$. Nam exprimi potest ratio, quam inter se habent; est enim $3\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{5}::3\,.\,2$. Item $b\sqrt{a-b}\,.\,c\sqrt{a-b}::b\,.\,c$, ut patet.

VIII. Si radicale signum quodcunque comprehen-

 dat

dat sub se aliam quantitatem radicalem, ut $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, vel $\sqrt[3]{a^2-b\sqrt{c}}$, radix *universalis* dicitur; & denominatur a signo, quod totam illam quantitatem, linea superducta, seu vinculo, complectitur. Sic $\sqrt[3]{2+3\sqrt{5}}$ dicitur radix universalis cubica: hoc est ex quantitate $2+3\sqrt{5}$ radicem cubicam esse extrahendam eo pacto, quo inferius docebitur.

PROPOSITIO I.

Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.

I. Reducendæ sint radicales $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem. Erit ex *Defin.* 5. *Cap.* 3. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[3]{b}=b^{\frac{1}{3}}$, redactisque fractionibus ex communi Arithmetica ad eandem denominationem, fiunt $a^{\frac{3}{6}}$ & $b^{\frac{2}{6}}$; proinde *a* elevari debet ad tertiam potestatem, & *b* ad secundam, ut indicant novi numeratores fractionum. Signis autem radicalibus præfigendus exponens 6, communis scilicet ipsarum fractionum denominator. Erunt ergo $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$.

Similiter reducendæ sint $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ad eandem denominationem. Quia $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[6]{20}=20^{\frac{1}{6}}$ per *Defin. cit.* redactis fractionibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ad idem nomen, habentur $\frac{6}{12}$ & $\frac{2}{12}$, quibus ad minores terminos reductis, dividendo per 2, habentur $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$; unde patet, 2 ad tertiam potestatem esse elevandum

dum, & 20 ad primam; erunt ergo $\sqrt[6]{8}$, & $\sqrt[6]{20}$.

II. Vel sic: reducendæ sint ad idem signum $\sqrt[2]{c}$, & $\sqrt[6]{a}$; quia exponens 6 præcise divisibilis est per exponentem 2, multiplico per quotum 3 tam exponentem 2, quam quantitatem sub signo existentem c, eam elevando ad potentiam tertiam, eritque $\sqrt[6]{c^3}$ ejusdem nominis cum $\sqrt[6]{a}$. Eadem ratione $\sqrt[2]{3}$, & $\sqrt[4]{5}$ reductæ ad idem signum fiunt $\sqrt[4]{9}$, & $\sqrt[4]{5}$. Praxis oritur ex *Coroll. Prop.* 3. *Cap.* 2.

Ratio autem est, quia una radix non fit major, etiamsi ejus potentia major fiat, hoc est ad altiorem gradum elevetur. Est enim a radix tam potentiæ a^2, quam potentiæ a^3, a^4, a^5 &c. proinde si $\sqrt{a^2}$ per multiplicationem fiat $\sqrt[3]{a^3}$, remanet idem valor, & $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3}$.

SCHOL. I. *In reducendis ad eandem denominationem, sive ad idem signum radicalibus, quantitates, quæ sunt extra signum, non immutantur, sed manent eædem. Reducendæ sint ad idem signum* $3\sqrt[2]{2}$, *&* $4\sqrt[3]{5}$; *fient* $3\sqrt[6]{8}$, *&* $4\sqrt[6]{25}$. *Similiter* $a\sqrt[2]{b}$, *&* $c\sqrt[3]{n}$ *fient* $a\sqrt[6]{b^3}$, *&* $c\sqrt[6]{n^2}$. *Nam* $a\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a^2b}$ per Defin. 4. *hujus, sed* $\sqrt[2]{a^2b} = \sqrt[6]{a^6b^3}$ per hanc Propos., *&* $\sqrt[6]{a^6b^3} = a\sqrt[6]{b^3}$ per Prop. 7. Cap. 3. *Ergo* $a\sqrt[2]{b} = a\sqrt[6]{b^3}$. *Eadem ratione* $c\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{c^3n} = \sqrt[6]{c^6n^2} = c\sqrt[6]{n^2}$, *adeoque radicalium coefficientes non mutantur. Demon-*

strationem licet per se claram tyrones ex dicendis magis intelligent.

SCHOL. II. *Ut radicales addi, subtrahi, multiplicari, aut dividi invicem possint, eas ad idem signum prius reducere necesse est, quod notetur.*

PROPOSITIO II.

Radicales ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Dividatur quantitas sub signo existens per potestatem ejusdem gradus, seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale, & relicto quoto sub signo, radix potestatis, per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum: hoc est extrahatur a quantitate radicali id, quod est rationale, & ponatur extra signum. Sit $\sqrt{aac+aab}$; divide per a^2, & quoto $c+b$ sub signo relicto, pone extra signum radicem potestatis dividentis, nempe a: erit radicalis ad simpliciorem expressionem redacta $a\sqrt{c+b}=\sqrt{aac+aab}$.

Sit pariter $\sqrt[3]{54}$ reducenda ad simpliciorem expressionem. Divide 54 per cubum 27, & relicto quoto 2 sub signo, pone extra signum radicem ejusdem cubi, nempe 3; erit $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{54}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{8a^3b}$ erit $2a\sqrt[3]{b}$, & $\sqrt[n]{ab^n}$ erit $b\sqrt[n]{a}$.

II. Quod si quantitas radicalis sit valde composita, ita ut sola terminum inspectione non innotescat, an per maximam ejusdem gradus potestatem sit divisibilis, quærantur *per Prop. 9. Cap.* 1. omnes illius divisores: ex illis necessario apparebit, an sit potestas requisita. Quæritur ex. gr., an $\sqrt[3]{120}$ sit reduciducibilis ad simpliciorem expressionem. Inter ejus divisores apparet 8, qui est tertia potestas requisita. Divide ergo 120 per 8, & relicto quoto 15 sub signo, habebis $2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$. Item si $\sqrt[4]{48}$ reducenda sit ad simpliciorem, erit $2\sqrt[4]{3}$; nam inter divisores numeri 48, est 16, qui est potestas quarta quæsita, ac ter dividit ipsum 48.

COROLL. I. *Pro faciliori praxi divide quantitatem radicalem sub signo existentem per 2, per 3, per 4 &c. successive, & examina, an quoti illi sint potestas quæsita: quod facile agnosces, si ex illis radicem extrahas. Sit $\sqrt{392}$: divide 392 per 2, quotus 196 est quadratum ex radice 14, per quod si dividas 392, habebis 2, proinde $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$. Similiter sit reducenda $\sqrt[3]{192}$; divide per 3, quotus 64 dat cubum ex latere 4, per quem cubum dividendo 192, habebis 3: ideoque $\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3}$, & sic de aliis.*

COROLL. II. *Ex hac propositione dignoscitur, an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles & communicantes. Nam si scire velim, an $\sqrt{8}$, & $\sqrt{18}$ sint communicantes, reduco illas ad simpliciorem expressionem $2\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$, quæ ex* Defin. 6. hujus *erunt inter se, ut 2 ad 3. Ita $\sqrt{50}$, & $\sqrt{18}$ redactæ, fiunt $5\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$; erit ergo $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: 5 . 3$.*

SCHOL. *Ut id facile obtineatur, ex quantitatibus sub signo radicali existentibus fiat fractio, quæ ad minimos terminos reducatur. Sic in superiori exemplo $\sqrt{8}$, & $\sqrt{18}$ facile dignoscuntur esse commensurabiles. Nam fractio $\frac{8}{18}$ ad minimos terminos redacta fit $\frac{4}{9}$ Sunt ergo $\sqrt{8} . \sqrt{18} :: \sqrt{4} . \sqrt{9} :: 2 . 3$. Similiter ex $\sqrt{50}$, &*

$\sqrt{18}$ *fiat fractio* $\frac{50}{18}$, *quæ reducitur ad minimos terminos* $\frac{25}{9}$; *unde* $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: \sqrt{25} . \sqrt{9} :: 5 . 3$. *Demum* $\sqrt[3]{a^3b}$, *&* $\sqrt[3]{bc^3}$ *eadem ratione inveniuntur esse, ut* a *ad* c.

PROPOSITIO III.

Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.

I. RAdicales addendæ, aut ſubtrahendæ reducantur, ſi fieri poteſt, ad ſimpliciorem expreſſionem *per Prop. antec.* Si communicantes ſint, quantitates rationales extra ſignum addantur, vel ſubtrahantur, ut fieri ſolet in quantitatibus rationalibus, & earum ſumma, aut differentia præponitur ſigno radicali. Sint addendæ quantitates $\sqrt{50}$, & $\sqrt{18}$, quæ redactæ *per Prop. cit.* ſunt $5\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$; additis quantitatibus extra ſignum 5 & 3, earum ſumma erit $8\sqrt{2}$. Subtrahenda ſit $\sqrt{18}$ ex $\sqrt{50}$, hoc eſt $3\sqrt{2}$ ex $5\sqrt{2}$ *per Prop. antec.* ſubtrahe 3 ex 5, reſiduum erit $2\sqrt{2}$.

II. Quod ſi radicales addendæ, aut ſubtrahendæ non ſint communicantes, ſed incommenſurabiles, ſumma fit per ſignum $+$, ſubtractio per ſignum $-$. Sic duarum $\sqrt{2}$, & $\sqrt{5}$ ſumma erit $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; differentia vero $\sqrt{2} - \sqrt{5}$. Similiter duarum $\sqrt{\overline{a+b}}$, & $\sqrt{\overline{a-b}}$ ſumma erit $\sqrt{\overline{a+b}} + \sqrt{\overline{a-b}}$; differentia autem $\sqrt{\overline{a+b}} - \sqrt{\overline{a-b}}$.

III. Quod ſi radicales addendæ, vel ſubtrahendæ ſint compoſitæ, eadem ratione operandum, ut exempla ſequentia indicant.

AD-

ADDITIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6} \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \end{array}$$

SUBTRACTIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{6} + 5\sqrt{7} \\ \hline 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{6} - 8\sqrt{7} \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

Quantitates radicales multiplicare.

I. Multiplicentur inter se quantitates extra signum, tum seorsim quantitates sub signo existentes, habebis productum quæsitum, ut $5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$. Similiter $m\sqrt[3]{a} \times n\sqrt[3]{a} = mn\sqrt[3]{aa}$.

II. Quod si radicales habeant signum radicale quadraticum $\sqrt{}$, & sint communicantes, operatio fit brevior. Nam satis est productum, quod fit ex quantitatibus extra signum existentibus, ducere in quantitatem sub signo radicali positam. Sint multiplicandæ $3\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$: duc primo inter se 3 & 5, earumque factum 15 duc in 2, erit productum 30. Oritur enim quantitas rationalis; nam $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, adeoque $15 \times 2 = 30$.

Sint pariter multiplicandæ $\sqrt{x^4 + x^2 a^2}$, & $\sqrt{x^2 a^2 + a^4}$, quæ ad simpliciores terminos redactæ *per Prop. 2. hujus* sunt $x\sqrt{x^2 + a^2}$, & $a\sqrt{x^2 + a^2}$, proinde communicantes *per Defin.* 6. Duc itaque pro-

productum $ax \times x^2 + a^2$, in quantitatem scilicet sub signo existentem, perinde ac forent quantitates rationales, habebis productum rationale $ax^3 + a^3 x$.

III. Si radicalis per rationalem, aut rationalis per radicalem sit multiplicanda (idem enim est) ex. gr. $\sqrt{a+b} \times \overline{c+d}$; reducatur primo rationalis $c+d$ ad idem signum radicale, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, ita ut fiat $\sqrt{c^2+2cd+d^2}$: multiplicetur deinde $c^2+2cd+d^2$ per $a+b$, perinde ac essent quantitates rationales; erit productum quæsitum $\sqrt{ac^2+2acd+ad^2+bc^2+2bcd+bd^2}$, quod etiam exprimi poterat hoc modo $\overline{c+d}\sqrt{a+b}$. Multiplicando pariter $3\sqrt[n]{5}$ per 2, aut per $\frac{1}{2}$, productum erit $6\sqrt[n]{5}$, aut $\frac{3}{2}\sqrt[n]{5}$.

IV. Si quantitates multiplicandæ compositæ sint ex radicalibus, vel ex radicalibus simul & rationalibus; ducantur singuli termini unius per singulos alterius secundum regulas radicalium simplicium superius explicatas, servata consueta signorum + & − ratione. Exempla rem satis declarant.

I.	II.
$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$3+2\sqrt{5}$
$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$5-3\sqrt{5}$
$5+\sqrt{15}$	$15+10\sqrt{5}$
$-\sqrt{15}-3$	$-9\sqrt{5}-30$
$5-3=2$	$+\sqrt{5}-15$

III.

$$\text{III. } 2a + \sqrt{a+x}$$
$$b - \sqrt{a+x}$$
$$\overline{2ab + b\sqrt{a+x}}$$
$$- 2a\sqrt{a+x} - a + x$$
$$\overline{2ab + b\sqrt{a+x} - 2a\sqrt{a+x} - a + x}$$

Ratio multiplicandi quantitates radicales ita generatim demonſtratur. Sit multiplicanda $\sqrt{3}$ per $\sqrt{2}$; dico, productum eſſe $\sqrt{6}$. Nam ex definitione multiplicationis ita debet eſſe unitas ad multiplicantem ($\sqrt{2}$), ut multiplicandus ($\sqrt{3}$) ad productum, quod voco P; erit ergo $1 . \sqrt{2} :: \sqrt{3} . P$; & in eadem ratione erunt eorum quadrata, nempe $1 . 2 :: 3 . P^2$, ſed $1 . 2 :: 3 . 6$, ergo $P^2 = 6$, & $P = \sqrt{6}$. Quod erat &c.

COROLL. I. *Quod ſi binomium radicale quadraticum multiplicetur per ſe ipſum, mutato tamen in alterutro factore ſigno* $+$ *in* $-$, *vel contra* $-$ *in* $+$, *oritur monomium rationale, ut in primo exemplo* $\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3}$ *producit quantitatem rationalem* 2, *&* *hoc dicitur binomium multiplicari* per ſui contrarium, *de quo inferius.*

COROLL. II. *Si trinomium radicale quadraticum, ex. gr.* $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ *multiplicetur per ſeipſum, mutato aliquo ex ſignis, ut per* $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, *oritur binomium partim radicale, partim rationale, ut* $3 + \sqrt{48}$, *quod per* Coroll. 1. *ad monomium omnino rationale facile reducitur.*

SCHOL. *Si radicales ſignum diverſum habeant, prius reducentur ad idem ſignum ex dictis* Schol. 3. Prop. 1. *hujus, deinde fiet multiplicatio ut ſupra. Sint multi-*

pli-

plicandæ $\sqrt[2]{5} \times \sqrt[3]{7}$, *erunt reductæ* per Propos. 1. *hujus* $\sqrt[6]{125}$, & $\sqrt[6]{49}$, *earumque productum* $\sqrt[6]{6125}$.

PROPOSITIO V.

Quantitates radicales dividere.

I. Si divisor & dividendus sint communicantes, satis est dividere quantitates extra signum; quotus est quantitas rationalis. Sic ad dividendum $6\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, diviso 6 per 3, quotus est 2. Similiter $4\sqrt{2}$ diviso per $2\sqrt{2}$, habetur quotus 2. Eadem ratione $a\sqrt{a+b}$ diviso per $b\sqrt{a+b}$, habetur pro quoto $\frac{a}{b}$.

Quod sic demonstratur. Ponantur sub signo qu antitates 6 & 3: erit $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$ & $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Dividatur jam $\sqrt{108}$ per $\sqrt{27}$, hoc est 108 per 27, quotus est $\sqrt{4} = 2$. Quod &c. Similiter positis sub signo a & b, erit $a\sqrt{a+b} = \sqrt{a^3+a^2b}$, & $b\sqrt{a+b} = \sqrt{ab^2+b^3}$, & dividendo $\sqrt{a^3+a^2b}$ per $\sqrt{ab^2+b^3}$ (hoc est a^3+a^2b per ab^2+b^3, ut fit in rationalibus), erit quotus $\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}} = \frac{a}{b}$. Quod &c.

II. Si divisor & dividendus non fuerint communicantes, dividantur seorsim quantitates extra signum, & seorsim, quæ sub signo existunt. Sic ad dividendum $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$ habetur quotus $3\sqrt{b}$. Item dividendo $\sqrt{9}$

per

per $2\sqrt{3}$, quotus erit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Demum $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$ dat quotum $\sqrt{5}$

III. Quod si dividenda sit quantitas radicalis per rationalem, vel e contrario: semper quantitas rarationalis ad radicalem reducatur, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, & ponendo illam sub signo radicali. Ut si dividenda sit a per $\sqrt[3]{ab}$, elevetur a ad tertiam potestatem, ita ut fiat $\sqrt[3]{a^3}$, quæ divisa per $\sqrt[3]{ab}$ dabit quotum $\frac{\sqrt[3]{aa}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt{\frac{aa}{b}}$, ut in sequenti *Schol.* 1. *hujus*.

Ratio dividendi radices ita generatim demonstratur. Dividenda sit radicalis $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$; dico, quotum esse $\sqrt{5}$. Nam ex communi divisionis definitione divisor ad dividendum est, ut unitas ad quotum, quem voco Q: hoc est, $\sqrt{3} . \sqrt{15} :: 1 . Q$; & in eadem ratione sunt eorum quadrata, $3 . 15 :: 1 . Q^2$. Sed $3 . 15 :: 1 . 5$, ut patet; proinde $Q^2 = 5$, & $Q = \sqrt{5}$. Quod erat &c.

SCHOL. I. *Si radicalium divisio exprimatur per modum fractionis; (quod nonraro fit) tunc signum radicale vel seorsim numeratori, & seorsim denominatori præponitur, ut superiora exempla docent; vel toti fractioni, scilicet* $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}$ *&c.*

SCHOL. II. *Si ex denominatore tantum, vel ex solo numeratore extrahi possit radix, utique extrahitur, sed alteri signum radicale præfigitur. Sit* $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}}$; *facta di-*

visio-

visione, erit $\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{b}}$, *extractaque ex numeratore radice, fit* $\frac{x}{\sqrt{b}}$. *Similiter ex* $\sqrt{\frac{cb}{a^2b}}$ *facta divisione, oritur* $\sqrt{\frac{c}{a^2}}$, *& extracta ex denominatore radice, habetur* $\frac{\sqrt{c}}{a}$.

PROPOSITIO VI.

Radicales compositas dividere

I. Dividenda sit radicalis composita $\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}$ per $\sqrt{3}$. Dividantur singula trinomii membra per $\sqrt{3}$, ut radicales simplices *per Prop. præc.* erit quotus $\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$. Eadem ratione dividendo per $\sqrt{5}$ radicalem $\sqrt{20} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$, erit quotiens $2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Rursus dividendum sit trinomium $10\sqrt{2} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{35}$ per 4, erit quotus $\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{3}{4}\sqrt{35}$.

II. Quod si dividere oporteat binomium *A* ex rationali quantitate & radicali compositum per aliud binomium simile *B*, divisa quantitate rationali 8 per rationalem 2, habetur quotus *C*, per quem multiplicando totum divisorem *B*, productum $8 + 4\sqrt{1}$ subducitur (mutatis signis) ex dividendo *A*, & nihil remanet. Idem fit in secundo exemplo. In tertio autem per eundem divisorem *N* dividitur fractionis *M* tam numerator, quam denominator,

tor, ut habeatur fractio in minimis terminis, ut in Q, quo exemplo infra utemur.

EXEMPL. I.
$$\begin{array}{l} \qquad\qquad B \qquad\qquad A \qquad\qquad C \\ 2+\sqrt{1}\,)\; 8+4\sqrt{1}\;)+4 \\ \qquad\quad\; \underline{8+4\sqrt{1}\qquad} \\ \qquad\quad\;\; 0 \quad\;\; 0 \end{array}$$

EXEMPL. II.
$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}\,)\; 2-2\sqrt{-\tfrac{3}{4}}\;(-2 \\ \qquad\qquad\quad\; \underline{2-2\sqrt{-\tfrac{3}{4}}} \\ \qquad\qquad\quad\;\; 0 \qquad\; 0 \end{array}$$

EXEMPLUM III.
$$N\; aa+cc\,)\overset{M}{\frac{a^3\sqrt{aa+cc}+acc\sqrt{aa+cc}}{2aa+2cc}} \;\Bigg|\; \overset{Q}{\frac{a\sqrt{aa+cc}}{2}} \text{ seu } \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$$

III. At si divisor sit binomium radicale ex. gr. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, per quod dividenda sit quantitas $\sqrt{18}$; tunc binomium illud reducatur ad monomium rationale per *Cor.* 1. *Prop.* 4 *hujus*, multiplicando illud per sui contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, habebitur novus divisor $5-2=3$. Deinde per idem contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ multiplicetur quoque quantitas dividenda, nempe $\sqrt{18}$, ut inter ipsam & divisorem maneat idem valor, qui antea, *per Axiom.* 2. *Cap.* 2. Exemplo res fit manifesta.

$$\begin{array}{rl|ll} \text{Divisor} & \sqrt{5}-\sqrt{2} & \text{Dividen.} & +\sqrt{18} \\ & \underline{\sqrt{5}+\sqrt{2}} & & \underline{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \\ & 5-\sqrt{10} & 3\,) & \sqrt{90}+6 \\ & \underline{+\sqrt{10}-2} & \text{Quotus} & \tfrac{1}{3}\sqrt{90}+2 \\ & 5-2=3 & & \end{array}$$

Ra-

Ratio clara est, si ex divisore & dividendo fiat fractio, & tam numerator, quam denominatur multiplicentur per eandem quantitatem. Sit enim dividenda radicalis quantitas *A* per trinomium radicale *B*; fiat fractio, nempe

$$\frac{A}{B} \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}+\sqrt{2}}$$

Multiplicato utroque fractionis termino per denominatorem *B* (uno tantum signo mutato), oritur nova fractio æqualis priori *per Axiom.* 2. *Cap.* 2. hoc est

$$\frac{C}{D} \quad \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2+\sqrt{12}}$$

Multiplicetur pariter uterque terminus hujus novæ fractionis per denominatorem *D* (mutato signo), oritur nova fractio priori æqualis *per Axiom. cit.*, in qua divisor est quantitas rationalis, scilicet

$$\frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{180}-\sqrt{60}+\sqrt{120}}{-8}$$

Factaque actu divisione, erit quotus

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{15}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{1}{4}\sqrt{10}+\tfrac{1}{8}\sqrt{180}+\tfrac{1}{8}\sqrt{60}-\tfrac{1}{8}\sqrt{120}.$$

Item, ut dividatur $a-b$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, fit fractio $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, cujus termini per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ multiplicati dant $\frac{\overline{a-b}\times\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}$: fiat divisio, erit quotus $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

SCHOL. I. *Si divisor sit binomium, aut trinomium constans radicalibus cubicis, aut altiorum potestatum, hæc regula non sufficit. Tunc invenienda est aliqua quantitas, quæ* divisor contrarius *dicitur, per quam si tale binomium, aut trinomium multiplicetur, fiat rationale.*

En

En methodus generalis inveniendi ejusmodi divisores contrarios . *Quantitates sub signo radicali existentes , mutato aliquo signo , eleventur ad potestatem , cujus exponens sit unitate minor exponente radicali , neglectisque coefficientibus , habetur quantitas quæsita . Sit binomium* $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, *elevetur* a − b (*mutato scilicet signo*) *ad potestatem secundam , quæ neglectis coefficientibus , erit* $a^2 - ab + b^2$, *eaque posita sub signis radicalibus dati binomii , habetur* divisor contrarius $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Similiter sit datum binomium $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$, *elevetur* a − b *ad tertiam potestatem , & abjiciantur coefficientes , oritur quantitas* $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, *qua sub signis radicalibus binomii posita , habetur* divisor contrarius $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}$; *& sic de aliis.*

SCHOL. II. *Cæterum hujusmodi divisiones radicalium compositarum , ut monet* Cl. Wolfius ([a]), *aut vix , aut perraro occurrunt . Sed quia ejus methodus , quam* Nicolao Tartaleæ ([b]) *debemus , est non inelegans , haud erat omnino negligenda .*

PROPOSITIO VII.

Radicales ad datam potestatem elevare .

I. Regula est : quantitates sub signis existentes ad datam potestatem attolluntur *per Prop.* 2., *vel* 3. *Cap.* 3. radicali signo minime variato . Sic radicalis $\sqrt[3]{a}$ elevata ad quadratum erit $\sqrt[3]{a^2}$. Radicalis $\sqrt[2]{b}$ elevata ad cubum erit $\sqrt[2]{b^3}$. 2 Item

(a) Elemen. Analy. edit. 2. Probl. 13. schol. 1.
(b) De Num. & mensuris par. 2. l. 5. Cap. 4.

$\sqrt[2]{3}$ elevata ad quartam potestatem fit $\sqrt[2]{81}$.

Ratio est, quia ex communi lege multiplicationis radicalium $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2}$. Similiter $\sqrt[2]{b}\times\sqrt[2]{b}\times\sqrt[2]{b}=\sqrt[2]{b^3}$ *per Prop.* 4. *hujus*.

II. Si adsit quantitas extra signum, illa quoque ad datam potestatem elevatur *per Prop.* 2., *vel* 3. *Cap.* 3. Si cradicalis $a\sqrt[3]{c}$ ad quadratum elevata erit $a^2\sqrt[3]{c^2}$. Nam $a\sqrt[3]{c}\times a\sqrt[3]{c}=a^2\sqrt[3]{c^2}$. Eadem ratione $2\sqrt[2]{a}$ ad cubum evecta erit $8\sqrt[2]{a^3}$. Nam $2\sqrt[2]{a}\times 2\sqrt[2]{a}\times 2\sqrt[2]{a}=8\sqrt[2]{a^3}$ *per Prop.* 4. *hujus*.

III. Si radicales ad datam potestatem elevandæ sint complexæ, elevantur ad illam eadem omnino ratione, qua elevantur quantitates rationales; hoc est, si elevandæ sint ad quadratum, sumi debent quadrata partium, & duplum ejus, quod oritur ex mutua earundem partium multiplicatione *per Cor. Prop.* 8. *Cap.* 3. Si ad cubum, sumi debent cubi partium, triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum primæ per secundam, & triplum ejus, quod oritur multiplicando vicissim quadratum secundæ per primam *per Cor. Prop.* 9. *Cap.* 3. Atque ita deinceps. Sic radicalis $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c}$, ut ad secundam potestatem elevetur, fiant per primam partem *Prop. hujus* quadrata partium, nempe $\sqrt[3]{a^2}$, & $\sqrt[3]{c^2}$, earumque factum duplum $2\sqrt[3]{ac}$, proinde erit $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{c^2}$. Similiter $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ad secundam potestatem evecta erit $a+b-2\sqrt{ab}$. Si vero $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ elevanda sit

ad

ad cubum, fiant primo per primam partem *Prop. hujus* cubi ex $\sqrt{a}$, & $\sqrt{b}$, nempe $\sqrt{a^3}$, & $\sqrt{b^3}$; ſumatur triplum ex multiplicatione quadrati primæ radicalis, nempe a, in ſecundam, hoc eſt $3a\sqrt{b}$, & viciſſim triplum quadrati ſecundæ, nempe b, ducti in primam, hoc eſt $3b\sqrt{a}$, iiſque additis, erit $\sqrt{a^3}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}$. Eadem ratione $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ad cubum evecta erit $\sqrt{27}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-\sqrt{8}$;

SCHOL. I. *Cum radicales ſimplices conſiderari poſſint, ut potentiæ imperfectæ* per Defin. 5. Cap. 3. *elevari poſſunt ad quamcunque datam poteſtatem, ſumendo duplum, triplum, quadruplum &c. earum exponentium, ſi ad ſecundam, ad tertiam, vel quartam poteſtatem elevandæ ſint. Nam ſit* $\sqrt[2]{a}$ *ad tertiam poteſtatem elevanda*, per Defin. cit. *eſt* $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$, *& ſumendo triplum hujus exponentis, erit* $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{a^3}$. *Hoc autem ſequitur* ex Prop. 1. Cap 3. *Nam* $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$.

SCHOL. II. *Si radicalis elevanda ſit ad poteſtatem, cujus exponens idem ſit cum exponente ejuſdem radicalis, oritur quantitas rationalis. Proinde ſatis eſt delere ſignum radicale. Nam* $\sqrt[2]{3}\times\sqrt[2]{3}=\sqrt[2]{9}=3$. *Sic etiam* $\sqrt[3]{2}$ *ad cubum evecta erit* 2. *Nam* $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=2$. *Quod etiam* ex Schol. 1. *infertur. Nam* $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$, *proinde* $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{2}}=a$. *Pariter* $\sqrt[3]{c}=c^{\frac{1}{3}}$, *quæ ad tertiam poteſtatem evecta fit* $c^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=c^{\frac{3}{3}}=c$.

PROPOSITIO VIII.

Ex simplici radicali radicem extrahere.

I. Extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt{a}$. Quia *per Defin.* 5. *Cap.* 3. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, dividatur per exponentem radicis quæsitæ exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix quadrata quæsita $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt[3]{a}$. Quia *per Defin. cit.* $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, dividendo per exponentem radicis quæsitæ exponentem ejusdem $a^{\frac{1}{3}}$, erit radix quæsita $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

II. Demum quæritur radix cubica quantitatis $\sqrt{a}$. Quia $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ si dividatur per exponentem radicis quæsitæ 3 exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix cubica $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

COROLL. *Hinc patet, ad extrahendas ejusmodi radices satis esse multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem radicis quæsitæ. Sic radix quinta quantitatis* $\sqrt[2]{2}$ *erit* $\sqrt[10]{2}$. *Vel etiam exprimi potest sic* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ &c.

PROPOSITIO IX.

Ex binomio radicem quadratam extrahere.

I. Extrahenda sit radix quadrata ex binomio dato $7 + \sqrt{48}$. Primo auferatur quadratum mi-

minoris termini ex quadrato majoris, hoc eſt 48 ex 49 quadrato, quod fit ex termino rationali 7. Secundo extrahatur ex differentia horum quadratorum (quæ hic eſt 1) radix quadrata, nempe 1, quam adde termino rationali, habebis 8, & ab eodem ſubtrahe, habebis 6. Summæ hujus & differentiæ ſemiſſes, hoc eſt 4 & 3 dant radicem quadratam dati binomii, nempe $\sqrt{4+\sqrt{3}}$, ſeu $2+\sqrt{3}$.

Similiter quæritur radix quadrata binomii $8-\sqrt{60}$. Differentia quadratorum eſt 4, ejus radix quadrata 2. Hanc adde termino rationali, habebis 10: ſubtrahe ab eodem, habebis 6. Semiſſes ipſorum 10 & 6 dant radicem quæſitam $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

II. Sit pariter extrahenda radix quadrata ex binomio $a+b-2\sqrt{ab}$: ex quadrato $a^2+2ab+b^2$ primi termini aufer $4ab$ quadratum ſecundi termini $-2\sqrt{ab}$, erit differentia $a^2-2ab+b^2$, cujus radix quadrata eſt $a-b$. Hanc adde termino rationali $a+b$, ſumma erit $2a$: ſubtrahe ex eodem termino, differentia erit $2b$. Horum ſemiſſes a & b dant radicem quæſitam $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Ex hoc tertio exemplo facile eruitur demonſtratio. Nam ſi binomium $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ elevetur ad ſecundam poteſtatem, habetur $a+b-2\sqrt{ab}$; ubi apparent duo termini, alter rationalis continens ſummam radicum $a+b$, alter irrationalis continens duplum facti earumdem radicum. Ex quadrato autem $a^2+2ab+b^2$, quod fit ex termino rationali, ſi auferatur quadratum ſecundi termini, nempe $4ab$, reſiduum $a^2-2ab+b^2$ eſt pariter quadratum, cujus radix quadrata $a-b$ eſt differentia quadratorum a & b. Hæc igitur differentia $a-b$ addita ad eorum ſummam $a+b$ dat $2a$

duplum scilicet quadrati ex $\sqrt{a}$; eademque differentia $a - b$ subducta ex eorum summa $a + b$ relinquit $2b$, duplum quadrati alterius membri $\sqrt{b}$; proinde horum semisses a & b dant terminos radicis quæsitæ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

COROLL. *Hinc infertur, tria requiri, ut radix quadrata extrahi possit ex binomio radicali quadratico. Primo binomium constare non potest solis radicalibus, sed uno membro rationali, & altero radicali. Nam sive fiat quadratum ex duobus terminis radicalibus, ut* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, *sive ex rationali & radicali, ut* $3 + \sqrt{5}$; *semper oritur binomium continens terminum rationalem, & alterum radicalem. Secundo terminus rationalis, seu quadratum illius semper debet esse majus termino radicali, qui ab eo debet subtrahi. Tertio differentia quadratorum, quæ fiunt ex termino rationali & radicali, debet esse quadratum. Hæc omnia ex allatis exemplis satis patent.*

SCHOL. *De radice cubica, aliisque altioris gradus ex dato binomio, aut polynomio extrahendis, commodiori loco agemus. Cæterum si radix quadrata defectu earum conditionum extrahi nequeat ex dato binomio, tunc ejus binomii radix exprimitur signo radicali, quod utrumque binomii terminum comprehendit. Sic radix quadrata binomii* $1 + \sqrt{3}$ *erit* $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$. *Idem dicendum de cubica, aliisque altioribus radicibus, si extrahi nequeant. Tunc enim radix cubica binomii* $2 - \sqrt{7}$ *erit* $\sqrt[3]{2 - \sqrt[2]{7}}$ *&c. quæ quidem radices ita connexæ dicuntur* radices universales, *de quibus inferius.*

PROPOSITIO X.

Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.

I. Designet A majorem dati binomii partem, B vero partem minorem; erit ex Newtono in *Arithmetica Universali* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum majoris partis quæsitæ radicis, & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum partis minoris, quæ cum majori annectenda est cum signo ipsius B.

Extrahenda sit radix ex binomio $5+\sqrt{24}$: ponatur $A=5$, & $B=\sqrt{24}$, erit $\sqrt{AA-BB}=1$; proinde $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5+1}{2}$ hoc est 3, quadratum majoris partis radicis; & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5-1}{2}=2$, quadratum partis minoris. Horum radices dant radicem quæsitam $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

II. Rursus extrahenda sit radix ex binomio $rr+2x\sqrt{rr-xx}$. Ponatur $A=rr$, & $B=2x\sqrt{rr-xx}$; erit $AA-BB=r^4-4rrxx+4x^4$, cuius radix $rr-2x^2-\sqrt{AA-BB}$: proinde $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$

 =

$= \frac{2rr - 2xx}{2} = rr - xx$. Similiter $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ xx. Ex horum radicibus habetur dati binomii radix $x + \sqrt{rr - xx}$.

III. Sit polynomium $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$, seu in terminis simplicioribus $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$ *per Prop. 2. hujus*. Intelligatur divisum in duo binomia; & ponatur $10 + 2\sqrt{6} = A$, & $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = B$, erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Nam si quadratum secundi termini $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$, quod in terminis simplicioribus est $100 + 40\sqrt{6}$, auferatur ex quadrato primi termini $10 + 2\sqrt{6}$, quod pariter in terminis simplicioribus est $124 + 40\sqrt{6}$, residuum erit 24, hoc est $2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Addatur ergo hoc residuum $2\sqrt{6}$ ad primum terminum $10 + 2\sqrt{6}$, erit $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$.

Ex hoc autem binomio si ex prima parte *hujus Propos.* eruatur radix, habebitur $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Auferatur jam residuum ipsum $2\sqrt{6}$ ex primo termino $10 + 2\sqrt{6}$, erit $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10}{2} = 5$, cujus radix quadrata, hoc est $\sqrt{5}$, si priori jam inventæ addatur, erit polynomii propositi radix quæsita $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Demonstratio hujus methodi eadem est, ac superioris, ut consideranti patet.

PROPOSITIO XI.

Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Reducuntur ad idem nomen radicales universales eodem modo, quo aliæ radicales, ut in *Prop.* 1. *hujus*. Sed claritatis gratia reducendæ sint ad eamdem denominationem $\sqrt[2]{b+\sqrt[2]{cd}}$, & $\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{bc}}$. Fractiones radicalium exponentiales $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, ut fit in communi Arithmetica, erunt novi exponentes $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, qui docent, signum radicale commune esse $\sqrt[6]{}$, & quantitatem $b+\sqrt[2]{cd}$ elevandam esse ad tertiam potestatem; quantitatem vero $a-\sqrt[3]{bc}$ ad secundam. Facta itaque operatione, habentur aliæ duæ radicales universales æquales prioribus & ejusdem nominis nempe $\sqrt[6]{b^3+3cbd+\overline{3b^2+cd}\times\sqrt[2]{cd}}$, & $\sqrt[6]{a^2-2a\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{b^2c^2}}$.

Radicales autem illæ, quæ sub signo universali $\sqrt[6]{}$ comprehenduntur, hoc est $\sqrt[2]{cd}$, $\sqrt[3]{bc}$, & $\sqrt[3]{b^2c^2}$, reduci facile possunt ad idem signum $\sqrt[6]{}$ *per Schol. Prop.* 1. *hujus*: erunt $\sqrt[2]{cd}=\sqrt[6]{c^3d^3}$, $\sqrt[3]{bc}=\sqrt[6]{b^2c^2}$, & $\sqrt[3]{b^2c^2}=\sqrt[6]{b^4c^4}$.

II.

II. Reducenda sit ad simpliciorem expressionem radicalis universalis ex. gr. $\sqrt{a^2 b + a^2 c\sqrt{d}}$. Dividatur $a^2 b + a^2 c$ per a^2; & relicto quoto sub signo universali, ponatur a extra signum, fiet $a\sqrt{b + c\sqrt{d}}$ ad terminos simpliciores redacta.

Similiter sit radicalis universalis $\sqrt[2]{b^2 c + \sqrt{b^4 c^2 d}}$ reducenda ad simpliciorem. Reducatur primo $\sqrt{b^4 c^2 d}$, dividendo illam per $b^4 c^2$, fiet $b^2 c\sqrt{d}$, quæ si reponatur sub signo universali, erit $\sqrt[2]{b^2 c + b^2 c\sqrt{d}}$: hac demum ad simpliciorem radacta, eam scilicet dividendo per b^2, habebitur $b\sqrt{c + c\sqrt{d}}$, id quod quærebatur. Si fuerit $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$, erit eadem ratione $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Similiter $\sqrt{9\sqrt{12}}$ fiet $3\sqrt{2\sqrt{3}}$.

COROLL. I. *Si habeatur radicalis universalis* $a\sqrt[2]{b + c\sqrt{d}}$, *& ponenda sit sub signo universali quantitas* a, *multiplicari debet per secundam potestatem ipsius* a, *nempe per* a^2, *tota quantitas* $b + c$; *unde oritur* $\sqrt{a^2 b + a^2 c\sqrt{d}}$. *Quod si iterum quantitas* $a^2 c$ *ponenda esset sub secundo signo, elevanda hæc esset pariter ad secundam potestatem, & tunc haberetur* $\sqrt{a^2 b + \sqrt{a^4 c^2 d}}$. *Hinc luculenter apparet ratio explicatæ reductionis.*

COROLL. II. *Hoc totum convenit tam radicalibus universalibus*

versalibus, *quæ habent idem signum radicale* $\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{b}}$, *quam iis*, *quarum exponens est diversus*, *ut* $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$, *habita tamen ratione eorum*, *quæ dicta sunt* in Prop. 2. hujus *de reductionibus*.

PROPOSITIO XII.

Radicalium universalium calculus.

I. Ut addantur, vel subtrahantur, reduci semper debent ad idem nomen, & ad simpliciorem expressionem, si fieri possit, *per Prop. antec.* Deinde per signa $+$ & $-$ habetur additio, vel subtractio, ut in cæteris radicalibus. Sint addenda $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ & $2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$, summa erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}} + 2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$; residuum erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}} - 2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$.

II. Quod si radicales habeant sub signis quantitates easdem, adduntur, vel subtrahuntur earum coefficientes. Sic $\sqrt{8+\sqrt{96}}$, & $\sqrt{18+\sqrt{6}}$ (quæ sunt $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$, & $3\sqrt{2+\sqrt{6}}$ *per Propos. antec.*) summa erit $5\sqrt{2+\sqrt{6}}$; residuum vero (subtrahendo primam ex secunda) erit $1\sqrt{2+\sqrt{6}}$.

III. Sit multiplicanda $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, deleto signo universali, multiplicantur mutuo quantitates, & facto præfigitur signum radicale universale.

EXEM-

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{2} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ \quad +3\sqrt{2}+\sqrt{10} \\ \hline \sqrt{6+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}} \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} \\ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} \\ \hline \frac{1}{4}q^2+\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3} \\ \quad +\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}+\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3 \\ \hline \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{27}p^3+q\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} \end{array}$$

IV. Si vero radix universalis per se ipsam multiplicanda sit, & signum universale sit potentiæ secundæ signum $\sqrt{}$, tunc habetur productum, deleto signo ipso universali, quod præcedit, reliquis radicalibus, cujuscumque gradus sint, minime immutatis. Sic $\sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt{101}} \times \sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt{101}}$, deleto signo universali, dat productum $\frac{5}{4}+\sqrt{101}$. Similiter $\sqrt[2]{7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}} \times \sqrt[2]{7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}}$ dat productum $7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}$. Ratio est, quia summa illa ter-

terminorum $7+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{5}$ ex hypothesi erat quadratum. Deleto itaque signo radicali quadratico, habetur quadratum, hoc est, quantitas illa in se ducta.

V. Dividenda sit radicalis universalis $\sqrt{15+\sqrt{7}}$ per $\sqrt{3}$; divisis 15 per 3, & 7 per 3, habentur quoti 5 & $\frac{7}{3}$: quibus si præponantur signa radicalia, erit quotus quæsitus $\sqrt{5+\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

VI. Quod si divisor sit binomium, aut polynomium, ut si dividenda sit $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, deleto signo universali, multiplicatur per quantitatem contrariam tam divisor, quam dividendus, ut docuimus *Prop. 6. hujus*. Fiet novus divisor $=1$, & dividendus $\sqrt{6+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$. Ecce exemplum

Divisor	$2+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{5}$
	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	$4+2\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{5}$
	$-2\sqrt{3}-3$	$-3\sqrt{3}-\sqrt{15}$
	$4-3=1$	$\sqrt[2]{6+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}=$

Quantitas dividen. $\sqrt{6+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$.

SCHOL. *Cæterum hujusmodi calculus raro occurrit. Interea tamen tyrones in eodem exerceri non erit inutile.*

PROPOSITIO XIII.

Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire.

I. RAdices imaginariæ ad idem signum radicale, & ad simpliciorem expressionem, si fieri id pos-

possit, reducuntur; tum etiam adduntur, & invicem subtrahuntur iisdem omnino regulis, quas pro cæteris radicalibus tradidimus, ideoque iis non immoramur.

II. Si vero multiplicandæ sint, & ambæ habeant sub signo eamdem quantitatem, observetur, an signa radicalia præferant idem signum $+$, aut $-$, an vero diversum. Nam im primo casu productum erit reale negativum, in secundo reale positivuum. Ecce exempla

$$+1\sqrt{-a}\times+1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$-1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$+1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=-1\times-a=+a$$

Idem omnino fit, etiamsi desit unitas, quæ semper intelligitur adesse tanquam radicalium coefficiens, si nullum aliud adsit coefficieus, scilicet

$$+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=+\times-a=-a$$
$$-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+\times-a=+a$$
$$+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-\times-a=+a$$

Ratio horum est, quia quod oritur ex $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, semper est $-a$, utpote quadratum negativum. Sed hoc ipsum productum negativum duci debet ulterius in signum illud $+$, aut $-$, quo signa radicalia afficiuntur; proinde ex communi lege multiplicationis ducendo $-a$ in $+$, habetur $-a$, ut in primo & secundo exemplo, & in utroque casu restituitur quantitas realis negativa $-a$. At vero ducendo $-a$ in $-$, oritur quantitas positiva $+a$, ut in tertio exemplo.

III. Si vero quantitas sub signo non est eadem, aut si multiplicanda sit radix imaginaria per realem; ut tollatur omne æquivocum, præstat factum exprimere per signum multiplicationis $\times$. Multiplicanda sit $a\sqrt{-a}$ per $-\sqrt{-b}$, productum erit $-a\sqrt{-a}$

$\times\sqrt{}$

$\times\sqrt{-b}$, non autem $-a\sqrt{+ab}$. Per multiplicationem enim radicalium imaginariarum non oritur quantitas realis negativa, nisi cum ipsa radix imaginaria elevatur ad potestatem, cujus exponens sit idem cum exponente signi radicalis. Sic $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ producit quantitatem realem negativam $-a$, ut supra explicavimus. In aliis vero casibus habetur quantitas imaginaria; ut si multiplicetur $\sqrt[2]{-b}$ per $\sqrt[2]{b}$, productum, quod oritur, $\sqrt[2]{-b^2}$ continet radicem imaginariam, ita ut si ponere velis b extra signum, necessario exprimi debeat $b\sqrt{-1}$; ut nimirum servetur ratio radicis imaginariæ; nec ipsa quantitas imaginaria b confundatur cum quantitatibus realibus. Proinde ad evitandam confusionem, quæ dari facile posset, præstat multiplicationem peragere signo $\times$. Ecce exempla

$$+a\sqrt{a}\times-\sqrt{-b}=-a\sqrt{a}\times\sqrt{-b}$$
$$+2\sqrt{3}\times-1\sqrt{-5}=-2\sqrt{3}\times\sqrt{-5}$$
$$+3\sqrt{-c}\times-2=-6\sqrt{-c}$$

IV. Simili ratione expedit divisionem per modum fractionis exprimere ad confusionem evitandam. Dividendo $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, quotus erit $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. Item dividendo $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-5}$, erit quotus $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$. Sic $\frac{c}{\sqrt{-a}}$ & $\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{m}}$ significant quantitatem realem divisam per imaginariam, & imaginariam per realem, ut patet.

V. Quod si eadem quantitas imaginaria tam in numeratore, quam in denominatore reperitur, ex communi lege divisionis utrinque deletur. Sic dividendendo $a\sqrt{-d}$ per $b\sqrt{-d}$, scribatur $\frac{a\sqrt{-d}}{b\sqrt{-d}}$, quotus erit $\frac{a}{b}$. Item si dividatur $-b$ per $\sqrt{-b}$, prodit quotus $\sqrt{-b}$. Nam si fiat $-b = \sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$, erit $\frac{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{-b}$ quotus quæsitus. Dividendo autem $\sqrt{-b}$ per $-b$, erit divisio $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{-b}}$ quotus. Similiter quotus ex quantitate $a\sqrt{-bb}$ divisa per $-bb$ erit $\frac{a\sqrt{-bb}}{\sqrt{-bb} \times \sqrt{-bb}} = \frac{a}{\sqrt{-bb}}$. Tandem dividendo $+\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, erit quotus -1. Nam $\frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$.

SCHOL. *Quidam non obscuri nominis Algebristæ docent, productum ex multiplicatione duarum quantitatum imaginariarum, aut quotum ex divisione illarum, esse quantitatem veram & realem. Sic multiplicando v. g.* $\sqrt{-3}$ *per* $\sqrt{-2}$ *oriri* $\sqrt{6}$, *non autem* $\sqrt{-6}$. *Similiter dividendo* $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-2}$ *oriri quotum realem* $\sqrt{3}$, *non autem* $\sqrt{-3}$. *Proinde libere asserunt, hallucinatum fuisse* Jac. Ozananum (a) *qui contrarium docuit. At quicquid illi dicant*, Ozananum *sequitur* Cl. Wolfius (b) *Mathematicus nostri temporis celebratissimus, qui contendit, in multiplicatione quantitatum imaginariarum signum negativum non esse mutandum, sed facto perinde, ac factoribus præfigi debere semper signum* $-$. Alias enim, *inquit*, factores imaginarii efficerent factum reale, quod est absurdum. *Quamobrem vult, signorum regulam observari tantum respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali existen-*

(a) Nouveaux Elemens liv. 1. sect. 4.
(b) Elementa Analy edit. 2. cap. 2. pag. m. 315.

stentium. Placet hic unum, vel alterum ipsius exemplum multiplicationis afferre.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

EXEML. II.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -45+6\sqrt{-15} \\ -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ \hline -45+6\sqrt{-15}-6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

COROLL. *Ex allatis exemplis satis liquet, quantitates imaginarias complexas eodem modo multiplicari, ac cæteras radicales complexas. Exercitationis tamen gratia nonnulla adducimus tam multiplicationis, quam divisionis complexæ exempla, in quibus quantitates imaginariæ realibus adhærent.* A *est quantitas multiplicanda*, B *multiplicans*, P *vero productum*.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{ll} A & \sqrt{a}-2\sqrt{-b} \\ B & \sqrt{c}+3\sqrt{-b} \\ \hline & \sqrt{ac}-2\sqrt{c}\sqrt{-b} \\ & +3\sqrt{a}\sqrt{-b}-6\times-b=+6b \\ \hline P & \sqrt{ac}-2\sqrt{c}\sqrt{-b}+3\sqrt{a}\sqrt{-b}+6b \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{ll} A & 2+\sqrt{-5} \\ B & 3-\sqrt{-2} \\ \hline & 6+3\sqrt{-5} \\ & -2\sqrt{-2}-\sqrt{-2}\times\sqrt{-5} \\ \hline P & 6+3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2}-\sqrt{-2}\times\sqrt{-5} \end{array}$$

Divisionis exempla, in quibus *A* significat dividendum, *D* divisorem, *Q* quotnm; żeri autem quantitates ex actuali divisione deletas.

ÆXEMPL. I.

$A \quad x^2 - ax - x\sqrt{-b} + x\sqrt{-c} - a\sqrt{-c} - \sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$

$D \quad x + \sqrt{-c}$

$Q \quad x - a - \sqrt{-b}$

EXEMPL. II.

$A \quad 9\sqrt{-30} - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-18} - 4\sqrt{-6}$

$D \quad 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3}$

$Q \quad 3\sqrt{-6} - 2\sqrt{-2}$

C A P U T V.

De Æquationibus simplicibus.

DEFINITIONES.

I. ÆQuatio est comparatio duarum quantitatum, quæ signo æqualitatis junguntur, ut $x = a$, $xx + 2ax = ab$ &c.

II. Quantitates, quæ præcedunt, & quæ consequuntur æqualitatis signum, ut x & a in prima æquatione, item $xx + 2ax$, & ab in secunda, dicuntur *membra æquationis.*

III. Æquatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, ubi quantitas incognita est unius dimensionis, ut $x = a + b + c$: dicitur *quadratica*, seu *secundi gradus*, si ad duas dimensiones assurgit, ut $xx = ab$: *cubica*, seu *tertii gradus*, cum ad tres dimensiones, ut $x^3 = a^2 + b^2$; & generatim dicitur æquatio *quarti*, *quinti*, *sexti gradus &c.* si potestas incognitæ ad tales dimensiones ascendat: $x^n = a - b$ dicitur æquatio in-

de-

determinata, quæ determinabitur, si fiat $n = 2, = 3, = 4$ &c.

IV. Æquatio dicitur *affecta*, cum incognitæ potestas diversos habet dimensionis gradus, ut $x^2 + ax = ab$, $x^3 - ax + bx = cd$ &c. unde dicuntur affectæ quadraticæ, affectæ cubicæ &c. Dicitur autem *pura*, cum incognitæ potestas eamdem servat ubique dimensionem, ut $ax + bx = cd$, $xx - bxx = cdd$, $x^3 = abc$ &c.

V. *Radix* æquationis est valor incognitæ, quæ æquationem ingreditur; ut in æquatione $x = a + b$, *radix* est $a + b$; nam x tanti valet, quanti aggregatum $a + b$. Similiter in æquatione $x^2 = a - c$, extracta utrinque radice quadrata, *radix* æquationis, seu valor incognitæ x, est $\sqrt{a-c}$.

IV. Si valor incognitæ fuerit positivus, $x = 3$, radix dicitur *vera*. Si negativus, ut $x = -50$, radix dicitur *negativa*, seu, ut Cartesius vocat, *falsa*. Utraque tamen realis est. Nam si alteri debeam aureos 50, & non habeam; revera asseritur, me habere -50. Quod si incognitæ valor exprimatur per radicem quadratam negativam, ut $x = \sqrt{-a^2}$, radix dicitur *imaginaria*, & impossibilis, *per Schol.* 2. *Prop.* 8. *Cap.* 3.

AXIOMATA.

1. NOn tollitur æqualitas, si unus, aut quot placuerit, termini de uno æquationis membro ad alterum, mutatis signis, transferantur. Ut si $x + 2 = 5$, non tollitur æqualitas, si fiat $x = 5 - 2$.

2 Non tollitur æqualitas, si utrique æquationis membro addatur, aut subtrahatur quantitas æqualis. Vel si per eamdem, aut æqualem quantitatem mul-

tiplicentur, aut dividantur ambo æquationis membra. Nam ſit $x = 3$, multiplicando per 3, erit $3x = 9$; aut dividendo per 3, erit $\frac{1}{3} x = 1$.

3. Non tollitur æqualitas, ſi utrumque membrum elevetur ad eamdem poteſtatem; vel utrinque eadem radix extrahatur. Sit enim $y = ab$, erit $y^n = \overline{ab}^n$. Contra vero ſi $y^2 = a - b$, extracta radice utrinque, erit $y = \sqrt{a - b}$.

4. Non tollitur æqualitas, ſi in alterutro æquationis membro, loco unius quantitatis, ſive complexæ, ſive incomplexæ, ponatur alia quantitas æqualis. Ut ſi $x^2 = ay + by$, & ponatur $d = a + b$, erit $x^2 = dy$. Hoc dicitur *ſubſtituere*, quod in Analyſi magnum, & perpetuum uſum habet, ut deinceps videbitur.

PROPOSITIO I.

Explicantur regulæ reductionis Æquationum.

Omnis æquatio continere ſolet quantitates notas cum incognitis permixtas ſecundum propoſiti problematis conditiones. Debent itaque quantitates illæ tandiu verſari, & immutari, donec æquatio illa ſimpliciſſimam formam obtineat, quæ ſit velut ultima concluſio, ad quam tota problematis difficultas reducatur, eaque dicitur *æquatio finalis*. Hoc autem præſtant ſequentes regulæ.

Reg.ª 1.ª Æquatio reducitur ad pauciores terminos transferendo terminos illius ex una parte in aliam ſub ſigno contrario, nam *per Ax.* 1. remanet æqualitas. Sit $x - 3 = 12$, erit per tranſpoſitionem $x = 12 + 3$, hoc eſt $x = 15$. Similiter ſi $x - b = a$, erit $x = a + b$. Patet ratio ex 2. *Ax.*, *Ax.*, nam additur utrinque $+3$, & in ſecundo exemplo additur $+b$.

Eadem ratione ſi fuerit $x+3=5$, erit per tranſpoſitionem $x=5-3$, hoc eſt $x=2$. Item $x+b=a$, erit $x=a-b$. Patet ratio ex 2. *Axiom.* Nam ſubtrahitur utrinque -3, & in ſecundo exemplo ſubtrahitur $-b$. Hæc tranſpoſitio vulgo *Antitheſis* dicitur.

Reg.[a] 2.[a] Si ſint fractiones, æquatio reducitur per multiplicationem, hoc eſt multiplicando terminos omnes per denominatores fractionum, ducendo ſcilicet omnes denominatores, unum poſt alium, in totam æquationem; ſeu, quod idem eſt, ducendo ſemel productum omnium denominatorum in æquationem, & deinde fractiones ad ſimplices terminos reducendo. Sit æquatio $\frac{abd}{c}+dx=\frac{bcd}{a}$: multiplicetur primo tota æquatio per c, deinde per a, vel ſemel per ac, & habetur $\frac{aabcd}{c}+acdx=\frac{abccd}{a}$, quæ, radactis terminis *per Propoſ.* 2. *Cap.* 2., erit $aabd+acdx=bccd$.

Similiter ſit æquatio cum fractionibus, ut inferius *Probl.* 4.

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{x-3a-\frac{x+a}{n}}{n}$$

Multiplicetur primo per n, fit *per Axiom.* 4. *Cap.* 2.

$$an+x-a=2an+x-3a-\frac{x+a}{n}$$

Rursus multiplicetur per n, erit

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - 3an - x + a$$

Ac deletis ex utraque parte terminis æqualibus, & ordinata æquatione, ut in *Coroll.* 1. *&* 3., quæ habentur in fine hujus, explicatur, fiet æquatio $x = an^2 - 2an + a$.

Regula hæc patet ex 2. *Axiom.* Multiplicatur enim tota æquatio per æqualia. Nam sublato denominatore, fractio multiplicata intelligitur *per Axiom.* 4. *Cap.* 2.

*Reg.*ª 3.ª Reductio fit dividendo utrumque membrum per eamdem quantitatem, ut si fuerit $3x = 12$, dividendo per 3, erit $x = 4$ æquatio priori æqualis *per Axiom.* 2. Similiter sit $ax + bx = ac$ dividendo per $a + b$, erit $x = \frac{ac}{a+b}$. Demum $axx + fxx = gh$,

erit $xx = \frac{gh}{a+f}$.

*Reg.*ª 4.ª Reducitur æquatio per elevationem terminorum ad aliquam potestatem, cum quantitas incognita signo radicali implicatur. Ut si fuerit $\sqrt{xx - aa} + b = c$, relinquatur ex una parte æquationis quantitas signo radicali affecta, ita ut sit $\sqrt{xx - aa} = c - b$: tum utraque pars æquationis elevetur ad quadratum, erit $xx - aa = c^2 - 2cb + b^2$. Similiter si fuerit æquatio $m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$, elevato utroque membro ad quadratum habetur

$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$; factaque reductione,

m^2

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

Ponatur seorsim in altero membro quantitas radicalis, quæ remanet, erit

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

& rursus elevato utroque membro ad quadratum, evanescit quantitas radicalis, & habetur *per Lem. Cap.* 1.

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^3 + 12d^3x + 9d^4 = 0.$$

Patet ex 3. *Ax.* Hoc vulgo dicitur, *Asymmetriam* tollere.

*Reg.*ª 5.ª Reducitur æquatio, cum ex utroque ejus membro extrahitur radix; ut si fuerit $xx = 16$, extracta utriusque radice, erit $x = 4$. Similiter æquatio $xx = a^2 - 2ab + b^2$, extracta radice fit $x = a - b$. Demum $x^3 = 125$, radice cubica extracta, fit $x = 5$. Sequitur ex 3. *Axiom.*

*Reg.*ª 6.ª Reducitur æquatio, seu plures æquationes ad unam, substituendo valorem unius incognitæ loco ipsius. Ut si sit æquatio $x - y = d$, sit autem $a - x$ valor incognitæ y: facta substitutione, habetur æquatio $x - a + x = d$, (variatis ob $-y$ signis in $a - x$) hoc est habetur *per Reg.* 1. $2x = a + d$, & *per Reg.* 3. $x = \frac{a + d}{2}$. Eadem ratione sit æquatio $x^2 + y^2 = d^2$, & $a - x$ valor ipsius y, qui ut substituatur loco $+ y^2$, fiat quadratum ex $a - x$, nempe $a^2 - 2ax + x^2$: quo posito loco ipsius y^2, erit æquatio $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = d^2$; seu $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$, & $x^2 - ax = \frac{d^2 - a^2}{2}$ *per Reg.* 1., & 3.

COROLL. I. *Ex Reg.* 1. *tria sequuntur valde utilia: primo relinquendo incognitam in una æquationis parte, & transferendo omnes alias quantitates in partem alteram, habetur valor illius incognitæ. Sic æquatio* $x + y = 100$ *per transpositionem fiet* $x = 100 - y$, & $100 - y$ *dicitur valor incognitæ* x.

COROLL. II. *Insuper quantitates negativæ fieri possunt positivæ, & e contrario; transferendo scilicet illas in partem oppositam sub signo contrario. Sic ut in æquatione* $a - = b + c$ *incognita* x *fiat positiva, & haberi possit ejus valor, facta transpositione quantitatum in alteram partem sub signo contrario, erit* $a - b - c = x$.

COROLL. III. *Cum in utroque membro occurrit eadem quantitas sub eodem signo, deleri potest utrinque, & æquatio simplicior fit, ut si fuerit* $xx + ab - c = d - c + ab$, *æquatio reducitur ad* $xx = d$.

SCHOL. *In reducendis æquationibus illud primo curandum, ut omnes incognitæ, cujuscumque sint gradus, in uno eodemque æquationis membro consistant, in altero quantitates cognitæ, id quod per regulas jam traditas obtinetur.*

PROPOSITIO II.

Plures simplices æquationes ad unam reducere.

I. Sint reducendæ ad unam duæ æquationes simplices $x + y = a$, & $x - y = b$. Addantur simul, summa erit $2x = a + b$. Vel subtrahatur secunda ex prima, habetur $2y = a - b$. Patet ex 2. *Axiom.*

II. Sint tres æquationes ad unam reducendæ.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = a \\ \text{II.} & x + z = b \\ \text{III.} & y + z = c \end{array}$$

In

In prima æquatione ſumatur valor incognitæ y per *Cor.* 1. *Prop. antec.* ita ut habeatur $y = a - x$, & in ſecunda valor incognitæ z erit $z = b - x$. Deinde hi duo valores ſubſtituantur in tertia æquatione loco y & z *per Reg.* 6. habebitur $a - x + b - x = c$; & facta reductione, erit $a + b - c = 2x$ *per Reg.* 1., ſeu $x = \frac{a + b - c}{2}$ *per Reg.* 3.

III. Sint plures æquationes ad unicam reducendæ, nempe A, B, C, D.

$$\begin{array}{ll|ll}
A & x + y + z = a & E & x = a - y - z \\
B & x + y + v = b & & \\
C & x + z + v = c & & \\
D & y + z + v = d & & \\
\hline
F & a - z + v = b & H & z = a + v - b \\
G & a - y + v = c & M & y = a + v - c \\
\hline
\end{array}$$

$$N \quad 2a + 3v - b - c = d$$

hoc eſt $v = \frac{b + c + d - 2a}{3}$

Sumatur ab æquatione A valor quantitatis x, qui *per Cor.* 1. *Propoſ. ant.* erit E: quo poſito in æquationibus B & C, oriuntur duæ æquationes ejuſdem valoris F & G. Sumatur deinde ex æquatione F valor incognitæ z, oritur æquatio H. Similiter ex æquatione G ſumpto valore incognitæ y, habetur æquatio M. Hi duo valores ponantur in æquatione D, oritur æquatio N, in qua non eſt niſi unica incognita v, cujus valor $\frac{b + c + d - 2a}{3}$ ſi ſub-

ſti-

stituatur in æquationibus H & M loco quantitatis v, statim innotescunt z & y, quorum valor si tandem ponatur in æquatione E, nota erit quoque incognita x. Quod &c.

COROLL. *Ut hæc reductio fieri possit, necesse est, ut eadem incognita in pluribus æquationibus reperiatur, ut ex allatis exemplis manifestum est.*

IV. Quod si non omnes incognitæ sint unius dimensionis, ut in æquationibus A & B, quæ sequuntur,

$$A \quad xyy = bc, \quad B \quad xx + yy = by - ax$$

in quibus una tantum incognita x est unius dimensionis; tunc quæritur valor hujus, & in alia æquatione substituitur hac ratione:

Quia $xyy = bc$, erit $x = \frac{bc}{yy}$ *per Reg.* 3. & $xx = \frac{b^2c^2}{y^4}$ *per Axiom.* 3. Item $ax = \frac{abc}{yy}$ *per Axiom.* 2. His valoribus in æquatione B substitutis *per Ax.* 4. habetur

$$\frac{b^2c^2}{y^4} + yy = by - \frac{abc}{yy}$$

Et multiplicando omnes terminos per y^4, ut fractiones exterminentur, oritur æquatio, in qua unica tantum incognita,

$$b^2c^2 + y^6 = by^5 - abcy^2$$

Sch. Prop. 1. $\quad y^6 - by^5 + abcy^2 = - b^2c^2$

PRO-

PROPOSITIO III.

Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.

Theor. I. IN proportione Arithmetica trium terminorum a, $a+1$, $a+2$, summa termini primi, & tertii æquatur duplo secundi, nempe $a+a+2$ (hoc est $2a+2$) $= 2a+2$. Item in numeris Arithmetice proportionalibus 7, 5, 3, erit $7+3=10$.

COROLL. I. *Semissis aggregati ex primo & tertio dat terminum secundum. Sic* $\frac{2a+2}{2} = a+1$. *Item*

$$\frac{7+3}{2} = 5.$$

CORROLL. II. *Datis duobus mediis quatuor continue proportionalium Arithmetice, ut* a, x, *facile innotescit primus, quem voco* y. *Nam si retrocedendo fiat* x. a ∴ a. y, *erit* per Theor. $x+y=2a$, *&* $y=2a-x$. *Eadem ratione innotescit etiam quartus, quem item voco* y. *Nam si fiat* a. x ∴ x. y, *erit* per Theor. $a+y=2x$, *&* $y=2x-a$. Sunt ergo $2a-x$, a, x, $2x-a$ *quatuor termini continue proportionales Arithmetice. Quod nota ex* Newtono (a).

Theor. 2. In proportione Arithmetica quatuor terminorum, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum mediorum; ut si fuerint a. $a+1$ ∴ $a+2$. $a+3$, erit $2a+3=2a+3$. Sic etiam in numeris Arithmetice proportionalibus 2. 5 ∴ 15. 18, erit $2+18=15+5$.

Theor. 3. Quantitatum daurum inæqualium major æquatur aggregato ex semisumma & semidifferentia ea-

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV.

earum: minor vero differentiæ inter semisummam & semidifferentiam earumdem quantitatum. Sic partium inæqualium 7 & 5, quæ componunt 12, semisumma est 6, semidifferentia 1, pars major erit $6+1$, minor $6-1$.

COROLL. *Si ponatur summa* $= 2a$ & *differentia* $2y$, $=$ *erit pars major* $a+y$, *minor* $a-y$. *At si semisumma ponatur* x, & *semidifferentia* y; *quantitas major erit* $x+y$, *minor* $x-y$. *Quod notetur.*

Theor. 4. In proportione Geometrica quatuor terminorum, factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis; hoc est si $a.b::c.d$, erit $ad=bc$. *Est Prop. 16. l. 6. Eucl.*

COROLL. I. *Hinc semper quartus terminus proportionalis exprimi potest per factum secundi & tertii divisum per primum. Sit enim* $a.b::c.d$, *erit ex* hoc Theor. $bc = ad$ & *dividendo utrumque per* a, *erit* $\frac{bc}{a} = d$: *proinde* $a.b::c.\frac{bc}{a}$.

COROLL. II. *Hinc quoque certo scire possumus, an quatuor termini sint proportionales, observando, an productum ex duobus extremis æquale sit producto ex duobus mediis. Nam termini proportionales varie disponi & permutari possunt secundum varios argumentandi modos, quos in toto fere lib. 5. Euclides docuit. Ut si supponatur* $a.b::c.d$, *erit* permutando $a.c::b.d$, & invertendo $c.a::d.b$, & componendo $c+a.a::d+b.b$, & *sic ulterius. Nihilominus in omnibus his permutationibus hoc Theorema semper verum esse debet.*

Theor. 5 In proportione Geometrica continua trium terminorum factum primi & tertii termini æquatur quadrato secundi. Nam cum ex hypothesi $a.b::b.c$, erit *per Theor.* 4. $ac = bb$.

COROLL. I. *Datis primo & tertio termino*, a & c, *ha-*

habetur medius proportionalis $= \sqrt{ac}$. *Nam in tribus continue proportionalibus* a, b, c, *cum sit* ac $=$ bb, *extracta secunda radice, erit* $\sqrt{ac} = b$. *Et generatim factum duarum quantitatum est medium proportionale inter quadrata illarum.*

COROLL. II. *Datis autem primo & secundo termino trium Geometrice proportionalium, habetur tertius, si fiat ex secundo quadratum, & dividatur per primum. Nam sit tertius* $=$ f, *erunt ex hypothesi* a, b, f *continue proportionales, sed per hoc* Theor. 5. af $=$ bb, *proinde dividendo per* a, *erit* $f = \frac{bb}{a}$. *Hac ratione inveniri possunt infiniti termini Geometrice proportionales.*

COROLL. III. *Denique in proportione continua Geometrica quadratum primi termini est ad quadratum secundi, ut primus terminus est ad tertium. Quod evidens est ex proportione continua* 1, a, a^2; *tum etiam ex* Propos. 20. l. 6. Euclidis.

Theor. 6. Si quatuor termini Geometrice proportionales sint, erunt quoque proportionales, ad quamcunque illi dignitatem eleventur. Sit $a.b :: c.d$, erit quoque $a^2.b^2 :: c^2.d^2$. Item $a^3.b^3 :: c^3.d^3$. Demum $a^n.b^n :: c^n.d^n$. Sequitur *ex Propos.* 13. *l.* 8. *Eucl.* vel etiam potest numeris illustrari.

COROLL. *Terminorum proportionalium radices sunt pariter proportionales. Nam si* $a^n.b^n :: c^n.d^n$; *erit quoque* $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}$.

SCHOL. I. *Progressio Arithmetica terminorum quorumcunque* b, d, f, g, h *&c. exprimi solet per iteratam differentiæ additionem. Sit inter primum & secundum terminum* b *&* d *differentia* c, *erit progressio* b . b + c . b + 2c . b + 3c . b + 4c *&c. Quod si progressio sit descendens, ita ut primus terminus* b *secundum superet excessu* c, *tunc exprimitur per iteratam differentiæ subtra-*

ctionem, *nempe* b.b — c.b — 2c.b — 3c.b — 4c *&c.*

SCHOL. II. *Axiomata*, *reductionis regulæ & theoremata superius allata sunt fundamenta æquationum instituendarum*; *neque sine illis resolvi possunt*, *ut mox videbimus*. *Eadem minute citare non solent Analystæ*, *unde sæpe tyronibus obscuritas*. *Nos in gratiam eorum in duabus sequentibus propositionibus id faciemus*, *quod deinde magna ex parte omittetur*; *siquidem memoriæ hæreant*, *cum eorum usus in Analysi perpetuus sit*.

PROPOSITIO IV.

Quæstionem datam ad æquationem redigere.

DEsignentur quantitates incognitæ per ultimas Alphabeti literas x, z, y, ut distinguantur a cognitis & datis, quæ literis prioribus a, b, c, d exprimi solent, ut diximus *Defin.* 3. ad *Cap.* 1. (quanquam & ipsæ priores literæ a, b, c &c. aliquando pro incognitis, & indeterminatis usurpentur, ut inferius in *Probl.* 6. factum videbitur.) Expendantur deinde singulæ quæstionis conditiones & relationes, quæ dantur inter cognitas & incognitas, seu quæsitas quantitates; & ex utrisque simul tot formentur æquationes, quot sunt incognitæ assumptæ. Sed hæc usu magis, quam verbis addiscuntur. Ecce tibi plura exempla.

1. Invenire duos numeros, quorum summa est 100, & differentia 30.

Numerus major quæsitus sit $= x$, minor $= y$, summa $= 100$, differentia $= 30$. Ex conditione problematis oriuntur duæ æquationes, nempe

$$x + y = 100, \text{ \& } x - y = 30.$$

Vel in terminis generalibus: numerorum quæsitorum summa sit $= a$, differentia $= b$, erunt duæ æquationes

$x +$

$$x + y = a, \; \& \; x - y = b$$

2. Invenire duos numeros tales, ut triplum primi superet secundum excessu $= a$, secundus vero superet primum excessu $= b$.

Sit primus quæsitorum $= x$, alter $= y$, oriuntur duæ æquationes

$$3x = y + a, \; \& \; y = x + b$$

3. Invenire duos numeros, qui sint in ratione 1 ad 5; sed si minori addas, 2 & majori 3, sint in ratione 1 ad 2. Pone minorem $= x$, majorem $= y$, erunt duæ æquationes,

I.	$x . y :: 1 . 5$	II.	$x + 2 . y + 3 :: 1 . 2$
Theor. 4.	$y = 5x$	*Theor.* 4.	$2x + 4 = y + 3$

Ponatur in secunda loco y, ejus valor ex æquatione prima inventus, hoc est $5x$, erit

Ax. 4.	$2x + 4 = 5x + 3$
Sch. Prop. 1.	$4 - 3 = 5x - 2x$
Reg. 3.	$1 = 3x$
	$\frac{1}{3} = x, \; \& \; y \; (= 5x) = \frac{5}{3}$

Adde ad $\frac{1}{3}$ numerum 2, & ad $\frac{5}{3}$ numerum 3, erit $x = \frac{7}{3}$, & $y = \frac{14}{3}$; & problema omnino resolutum.

5. Numerum invenire, a quo si auferatur f, deinde g, numeri residui sint in proportione m ad n.

Sit numerus quæsitus $= x$, erit per conditionem problematis

$$x - f . x - g :: m . n.$$

Theor. 4.	$mx - mg = nx - nf$
Sch. Prop. 1.	$mx - nx = mg - nf$
Reg. 3.	$x = \dfrac{mg - nf}{m - n}$

Sit

Sit $f = 15$, $g = 20$, $m = 6$, $n = 1$, erit $x = \frac{105}{5} = 21$. Ex quo si auferas 15 & 20, habebis $6 . 1 :: 6 . 1$.

Vel sit $f = 3$, $g = 5$, $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{7}{1} = 7$; ex quo si auferas 3 & 5, habebis $4 . 2 :: 2 . 1$.

5. Invenire quadratum, cui si addatur 6, fiat sui lateris quintuplum.

Sit latus quadrati quæsiti x, erit per conditionem problematis

$$xx + 6 = 5x, \ \& \ xx - 5x = -6 \ per \ Sch. cit.$$

6. Invenire cubum, cui si ter addatur ejus radix, & ter auferatur quadratum radicis ejusdem, æqualis sit unitati. Sit latus cubi quæsiti x, erit per conditionem problematis

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 1.$$

SCHOL. I. *Quo pauciores adhibentur incognitæ, eo facilius & expeditius problema solvitur. Ut si quærantur duæ quantitates, quarum una sit tripla alterius; si una denominetur* x, *præstat alteram denominare* 3x, *quam aliam incognitam* y *inducere. Similiter si invenire oporteat tres continue proportionales* x, z, y *præstat duas tantum incognitas assumere, cum pro tertia sumi possit* $\frac{zz}{x}$ per Coroll. 2. Theor. 5.

SCHOL. II. *Cæterum curent tyrones æquationes recte instituere. Nam ex earum efformatione facilis, aut difficilis fieri solet quæstionum propositarum solutio: proinde nos multa exempla congessimus, plura quoque mox allaturi.*

PRO-

PROBL. I.

Interrogatus Socrates, quænam esset hora, respondit: horæ e media nocte elapsæ ad horas usque ad meridiem residuas se habent, ut 2 ad 3: quæritur, quænam esset hora.

Sint horæ elapsæ $= x$, erunt residuæ usque ad meridiem $= 12 - x$. Habetur ergo æquatio

	$x . 12 - x :: 2 . 3 .$
Theor. 4.	$3x = 24 - 2x$
Reg. 1.	$5x = 24$
Reg. 3.	$x = \frac{24}{5}$

Erant ergo horæ $4\frac{4}{5}$, hoc est hora quarta matutina cum min. 48.

Vel in terminis generalibus: sint horæ elapsæ a media nocte $= x$, horæ autem a media nocte ad meridiem $= a$, erit residuum ad meridiem usque $= a - x$; proportio vero horarum præteritarum ad residuas sit, ut n ad m, erit æquatio

	$x . a - x :: n . m .$
Theor. 4.	$mx = na - nx$
Sch. Prop. 1.	$mx + nx = na$
Reg. 3.	$x = \frac{na}{m+n}$

Sit $n = 2$, $m = 3$, & $a = 12$; erit $x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} =$ hor. 4. min. 48.

Vel sit $n = 5$, $m = 1$, & $a = 12$; erit $x = \frac{60}{6} = 10$. Fuit ergo hora decima matutina.

PROBL. II.

Canis leporem insequitur, eorumque distantia est passuum 100; velocitas autem canis ad velocitatem leporis est, ut 3 ad 2: quæritur, ad quot passus canis leporem assequetur.

DUm canis percurrit spatium 100, quod voco a, lepus interea spatium aliquod transcurrit $= x$; erit ergo spatium a cane percurrendum $= a + x$: proinde habetur æquatio

$$a+x \,.\, x :: 3 \,.\, 2$$

Vel in terminis generalibus

$$a+x \,.\, x :: m \,.\, n$$

Theor. 4. $\qquad mx = an + nx$

Sch. Prop. 1. $\qquad mx - nx = an$

Reg. 3. $\qquad x = \dfrac{an}{m-n}$

Posito igitur $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$; erit $x = 200$, & $a + x = 300$. Assequetur ergo post passus 300.

SCHOL. *Hoc idem problema proponit* Fr. Lucas Pacciolus ([a]) e *Burgo Sancti Sepulcri*, *sed confuse & per ambages*, *quod illi* Nic. Tartalea ([b]), & Hieron. Cardanus ([c]) *duriter exprobrant*.

PRO-

([a]) Summa de Arithm. & Geomet. proport. ann. 1523.
([b]) Tom. 2. lib. I. cap. 15. quæst. 21.
([c]) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

PROBL. III.

Lucilius in alenda familia quotannis impendit tritici modios 60, reliquos seminat. Contigit, ut singulis tribus annis sextuplum ex messe collegerit, unde factus decuplo ditior in re frumentaria, quam antea fuerat: quæritur, quot tritici modios primo haberet.

Pone, primo habuisse modios $= x$, modios autem 60 pro annuo familiæ alimento esse $= a$, messem ex semine quotannis sextuplam $= m$; erunt modii, detractis familiæ alimentis, $= x - a$, qui si multiplicentur per m, dant primi anni messem $= mx - am$.

Secundo anno detrahe rursus a pro alimentis familiæ, erit residuum $mx - am - a$, & multiplicando per m, habetur secundi anni messis $m^2x - am^2 - am$.

Tertio anno, detractis similiter alimentis $= a$, erit residuum $m^2x - am^2 - am - a$, & multiplicando per m, obtinetur fructus tertii anni $= m^3x - am^3 - am^2 - am$.

Hæc autem quantitas ex conditione problematis debet esse decupla modiorum, quos primo habuit; proinde erit æquatio

$$m^3x - am^3 - am^2 - am = 10x$$

Schol. Prop. 1. $$m^3x - 10x = am^3 + am^2 + am$$

Reg. 3. $$x = \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$$

Substituantur jam pro literis, earumque potestatibus determinati earum valores; innotescet valor ipsius x. Nam posito $a = 60$, & $m = 6$; erit $m^3 = 216$, $m^2 = 36$, $am^3 = 12960$, $am^2 = 2160$, $am = 360$;

hinc $\frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10} = \frac{15480}{206} = 75 \frac{15}{103} = x$. Habuit ergo primo modios $75 + \frac{15}{103}$ unius modii.

PROBL. IV.

Metellus duos filios testamento reliquit hæredes hac ratione, ut major natu accipiat aureos 100, *& quartam partem ejus, quod restat de tota hæreditate; minor vero accipiat aureos* 50, *& dimidium ejus, quod remansit de hæreditate, detractis prius & portione sui fratris, & aureis illis* 50. *Divisione facta, apparuit, utrumque filium esse ex æquo hæredem: quæritur, quanta fuerit hæreditas, & quæ filiorum portio.*

Pone, hæreditatem fuisse $= x$, aureos $100 = a$; erit residuum totius hæreditatis $x - a$, & ejus quarta pars $\frac{x - a}{4}$. Majoris igitur portio $= a + \frac{x - a}{4}$.

Pone secundo aureos $50 = b$; erit filii minoris portio $= b + \frac{x - a - b - \frac{x + a}{4}}{2}$. Sed portiones inventæ fuerunt æquales, hinc

$$a + \frac{x - a}{4} = b + \frac{x - a - b - \frac{x + a}{4}}{2}$$

Et multiplicando primo per 2, deinde per 4, erit

$2a +$

$$2a + \frac{2x - 2a}{4} = 2b + x - a - b - \frac{x + a}{4}$$

$$8a + 2x - 2a = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a$$

Lem. Cap. 1. $6a + 2x = 4b + 3x - 3a$

Reg. 1.. $x = 9a - 4b$

Cum sit $a = 100$, $b = 50$; erit hæreditas x ($= 9a - 4b$) $= 700$, & valore ($9a - 4b$) in superiori æquatione posito, innotescit utriusque filii portio $= 250$.

Idem problema proponi poterat paulo universalius, quod ad tyronum exercitationem facimus.

Metellus filios suos reliquit hæredes hac lege, ut primus omnium A *accipiat aureos* a, *&* *de reliqua hæreditate partem* n. *Secundus filius* B *accipiat aureos* 2a, *&* *partem itidem* n *de reliqua hæreditate. Filius* C *habeat aureos* 3a, *&* *de eo, quod remanet, partem similiter* n, *&* *sic de aliis. Facta inter filios divisione, repertum est, singulos esse æqualiter hæredes: quæritur, quanta fuerit hæreditas, qui filiorum numerus, eorumque portio.*

Sit hæreditas $= x$, & accipiat A de illa portionem $= a$; residuum erit $x - a$, cujus pars $\frac{x - a}{n}$ ad ipsum A spectans. Erit ergo filii A portio $= a + \frac{x - a}{n}$

Filii vero B portio $= 2a + \frac{x - 3a - \frac{x + a}{n}}{n}$, quæ portiones ex hypothesi sunt æquales; proinde

$$a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{x - 3a - \frac{x + a}{n}}{n}$$

hoc est multiplicando per n, erit

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

& rursus multiplicando per n totam æquationem, & auferendo terminos, qui superfluunt, habetur, ordinata æquatione, valor ipsius $x = an^2 - 2an + a$, valor scilicet totius hæreditatis. Quo valore in prima æquatione $a + \frac{x - a}{n}$ substituto, invenitur

portio filii $A = a + \frac{n^2 a - 2na}{n} = na - a$, per quam (cum portiones sint æquales) si dividatur tota hæreditas jam inventa $n^2 a - 2na + a$, quotus $n - 1$ dat numerum filiorum.

Sit $a = 100$, & $n = 6$; erit $an - a = 600 - 100 = 500$ portio singulorum. At vero $n - 1 = 6 - 1 = 5$ filiorum numerus; adeoque 5×500 dat integram hæreditatem 2500.

COROLL. *Pro generali problematis solutione habetur triplex Canon.* 1.° *Denominator fractionis unitate multatus* (n — 1) *dat numerum filiorum.* 2.° *Denominator fractionis unitate multatus in quantitatem datam ductus* $\overline{n - 1} \times a$ *dat filiorum portionem.* 3.° *Denominatoris unitate multati quadratum in quantitatem datam ductum* $\overline{n - 1} \times \overline{n - 1} \times a$ *dat integram hæreditatem.*

PRO-

PROBL. V.

Tres mercatores, inita societate, lucrati sunt summam quandam aureorum. Hoc unum constat, primum cum secundo accepisse summam aureorum a, *&* *eundem primum cum tertio aureos* b, *secundum vero cum tertio aureos* c: *quæritur, quantum fuerit lucrum singulorum.*

Sint tres socii x, z, y, summæ vero a, b, c; erit per conditionem Probl.

$$x + z = a \qquad z = a - x$$
$$x + y = b \qquad y = b - x$$
$$z + y = c$$

Fiat reductio, ut in *Prop.* 2. docuimus, & quantitatis x valor ($\frac{a + b - c}{2}$) ponatur in duabus æquationibus $z = a - x$, & $y = b - x$; innotescet lucrum singulorum, nempe

$$x = \frac{a + b - c}{2},\ z = \frac{a - b + c}{2},\ y = \frac{b - a + c}{2}$$

Sit $a = 100$, $b = 120$, $c = 160$; erit $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$.

COROLL. *Patet, singulas alternas summas excedere debere summam quamlibet tertiam; alias valor prodiret negativus. Sic in prima æquatione* a + b > c, *in secunda* a + c > b *&c.*

Idem problema aliter. Sint tres æquationes, ut prius,

$$x + z = a,\ x + y = b,\ z + y = c$$

Addantur simul *per Prop.* 2. *hujus*, erit nova æquatio

 2x +

$$2x + 2z + 2y = a + b + c$$

Divid. per 2. $x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Ex hac æquatione ſubtrahe *per Prop. cit.* tres æquationes priores ſigillatim; innoteſcet valor x, z, y.

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

Subtr. $z + y = c$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

Subtr. $x + y = b$

$$z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$$

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

Subtr. $x + z = a$

$$y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a$$

Poſito, ut ſupra, $a = 100$, $b = 120$, $c = 160$; iterum prodit $x = 30$, $z = 70$, $y = 90$.

PROBL. VI.

Lucius ad ædificandam domum lapides, calcem & ſabulum comparaverat. Mutato deinde conſilio, ea omnia tribus emptoribus A, B *&* C *vendidit, nempe;*

A emit 2. currus lapidum)
3. currus calcis) *Juliis* 34
7. currus ſabuli)

B emit

B emit	3. currus lapidum) 4. currus calcis) 12. currus ſabuli)	*Juliis* 46
C emit	4. currus lapidum) 1. currum calcis) 13. currus ſabuli)	*Juliis* 42

Quæritur ſingularum ejuſmodi rerum pretium.

Pone pretium lapidum pro ſingulis curribus $= a$, pro ſingulis curribus calcis $= b$, & pro curribus ſabuli $= c$; erunt ergo 2 currus lapidum $= 2a$, currus 3 calcis $= 3b$, & 7 currus ſabuli $= 7c$ - (Quantitates a, b, c hic ſumuntur pro incognitis & indeterminatis, ut monuimus in *Propoſ.* 4. *hujus*) Habentur ergo æquationes

$$\begin{array}{ll} A & 2a + 3b + 7c = 34 \\ B & 3a + 4b + 12c = 46 \\ C & 4a + 1b + 13c = 42 \end{array}$$

Ex prima æquatione *A* habetur *per Schol. Prop.* 1.

$$2a = -3b - 7c + 34$$

Reg. 3. $\quad a = -\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$

Hoc valore in ſecunda æquatione *B* poſito *per Ax.* 4. *hujus*, erit

$$-\frac{9}{2}b - \frac{21}{2}c + 51 + 4b + 12c = 46$$

Lem. Cap. 1. $\quad -\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c + 51 = 46$

Subtr. $\quad 51 \quad 51$

$$-\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c = -5$$

Reg. 1. $\quad -\frac{1}{2}b = -\frac{3}{2}c - 5$

Reg.

Reg. 2. $\quad -b = -3c - 10$

Reg. 1. $\quad b = 3c + 10$

Adde $\quad +\frac{1}{2}b = \frac{3}{2}c + 5$

$$\frac{3}{2}b = \frac{9}{2}c + 15$$

Sed inventa fuit $a = -\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$; proinde, si in hac æquatione pro $-\frac{3}{2}b$ ponatur ejus valor ($\frac{9}{2}c + 15$), erit *per* 4. *Ax. hujus*

$$a = -\frac{9}{2}c - 15 - \frac{7}{2}c + 17$$

Lem. cit. $\quad a = -8c + 2$.

Substituantur jam in tertia æquatione C valores inventi a & b, obtinebitur æquatio

$$-32c + 8 + 3c + 10 + 13c = 42.$$

Lem cit. $\quad -16c = 24$

Reg. 3. $\quad c = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$

Sunt autem $a = -8c + 2$, & $b = 3c + 10$. Substituto igitur valore ejusdem c, determinantur a & b, scilicet

$$a = 12 + 2 = 14$$

$$b = -\frac{9}{2} + 10 = 5\frac{1}{2}$$

Proinde lapides pro singulis curribus venduntur juliis 14. Calcis currus quilibet juliis $5\frac{1}{2}$. Currus autem sabuli ob valorem negativum ($c = -1\frac{1}{2}$) nihil venditur; immo ipse sabuli dominus solvit julium

lium $1\frac{1}{2}$ emptoribus illis pro unoquoque sabuli curru e domo amovendo.

SCHOL. I. *Hoc probl. a* Hieronymo Cardano (*a*) *paucis verbis propositum, visum est nobis non inelegans, & tyronibus in calculo exercendis opportunum.*

SCHOL. II. *Poterant hæc problemata abstracte, & in terminis generalibus proponi, ut plerique faciunt. Sed quia specialia, & particularibus circumstantiis deducta phantasiam magis juvant; & juvenes, cum statim ab initio artis, alioquin difficilis, usum aliquem specialem agnoscunt, ad ulteriora alacriores fiunt, ea sic afferre satius duximus.*

SCHOL. III. *Si ex problematis propositi conditionibus haberi non possint tot æquationes, quot incognitæ fuerunt assumptæ, problema dicitur* indeterminatum; *quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, & tunc una ex incognitis ad arbitrium sumitur. Ut si quærantur duo numeri, quorum factum æquale sit numero dato, v. g.* 12. *Sint illi* x *&* y: *per conditionem problematis una tantum haberi potest æquatio, nempe* $xy = 12$; *unde* $y = \frac{12}{x}$. *Sumatur ad arbitrium* $x = 2$, *erit* $y = \frac{12}{2} = 6$. *Si sumatur* $x = 3$, *erit* $y = \frac{12}{3} = 4$. *Si* $x = 4$, *erit* $y = 3$ *&c. Hujus generis sunt problemata, quæ sequuntur.*

Problemata Indeterminata.

PROBL. I.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad eorum differentiam in quacumque data ratione.

SIt quæsitorum unus $= x$, alter $= y$, & ratio data sit a ad b, erit per conditionem Probl.

$x+y$

(*a*) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

$$x+y \,.\, x-y :: a \,.\, b$$

Theor. 4. $ax-ay = bx+by$

Schol. Prop. 1. $ax-bx = ay+by$

Divid. per $a-b$ $x = \frac{ay+by}{a-b}$

Sit $a=3$, $b=1$, & ſumatur ad arbitrium $y=2$; erit $x=\frac{6+2}{2}=4$, proinde $4+2 \,.\, 4-2 :: 3 \,.\, 1$.

Sit $a=4$, $b=3$, & ſumatur, ſi libet, $y=5$; erit $x=\frac{20+15}{1}=35$. Hinc $35+5 \,.\, 35-5 :: 4 \,.\, 3$.

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum ſumma ſit ad ſummam quadratorum, quæ ex ipſis fiunt, in ratione data.

SIt unus numerus quæſitus $=x$, alter $=xy$, & ratio data ſit a ad b, erit ex conditione problematis

$$x+xy \,.\, xx+xxyy :: a \,.\, b$$

Theor. 4 $bx+bxy = axx+axxyy$

Reg. 3. $b+by = ax+axyy$

Reg. 3. $x = \frac{b+by}{a+ayy}$

Sit $a=3$, $b=1$, & ſumatur ad libitum $y=2$, erit $x=\frac{1+2}{3+12}=\frac{1}{5}$; proinde $x+xy=\frac{3}{5}$, & $xx+xxyy=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$; ideoque $\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{5} :: 3 \,.\, 1$.

Sit $a=2$, $b=1$, & ſumatur $y=3$, erit $x=\frac{1+3}{2+18}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, $x+xy=\frac{4}{5}$, & $xx+xxyy=\frac{10}{25}$

$=$

$= \frac{2}{5}$; proinde habetur $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} :: 2 \cdot 1$.

SCHOL. I. *Eodem modo resolvitur problema, si quærantur duo numeri, quorum summa sit ad differentiam quadratorum ex ipsis in quacumque ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri, quorum differentia sit ad differentiam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri, quorum differentia sit ad summam quadratorum ex ipsis, ut* a *ad* b. *Quos omnes casus* Diophantus Alexandrinus (*a*) *accurate resolvit*.

SCHOL. II. *Nota, pro altero numero quæsitorum non sumi simpliciter* x, *vel* y, *sed* xy, *ut scilicet tota æquatio multiplicata per* x *existat, & inde haberi possit divisor communis, & facta divisione, quadrata illa ad quantitatem unius dimensionis reducantur, quod quidem pro similibus casibus est advertendum*.

PROBL. III.

Datum numerum quadratum in alia duo quadrata dividere.

SIt latus dati quadrati $= a$, latus quæsiti $= x$, & alterius quæsiti $= y$; erit $a^2 = x^2 + y^2$. Quia vero latus a majus est alterutro latere x, vel y seorsim accepto, fieri poterit $a - x = y$, vel sumpto ad libitum v, fieri poterit $a - vx = y$, vel etiam $vx - a = y$. Tunc enim superior æquatio $a^2 = x^2 + y^2$ in sequentem transformabitur, substituto loco y^2 ejus valore.

$$a^2 = x^2 + v^2 x^2 - 2avx + a^2$$

$$v^2 x + x = 2av$$

Divid. per $v^2 + 1$ $\qquad x = \frac{2av}{v^2 + 1}$

Hoc

(*a*) Arithmetic. lib. 1. & 2. cum Bacheto, & de Fermat.

Hoc valore ipsius x posito in æquatione $vx - a = y$, habetur $y = \frac{avv - a}{v^2 + 1}$.

Sit $a = 10$, assumpto ad libitum $v = 3$, erit $x = \frac{60}{10} = 6$, & $y = \frac{80}{10} = 8$. Fiant quadrata, erit $100 = 36 + 64$.

Sit $a = 12$, & ad libitum $v = 2$, erit $x = \frac{48}{5}$, & $y = \frac{36}{5}$. Fiant quadrata reducendo 12 ad fractionem ejusdem nominis, hoc est ad $\frac{60}{5}$, erit (deleto communi denominatore 25) $3600 = 2304 + 1296$.

PROBL. IV.

Datum numerum in duos secare, quorum factum sit quadratum.

Sit numerus datus $= 2a$, partium vero, in quas dividi debet, differentia sit $= 2y$; erit *per Theor.* 3. pars major $a + y$, minor autem $a - y$, earumque factum $aa - yy$, quod ex conditione problematis debet esse quadratum. Pro cujus latere sumpto v ad libitum, fiat $a = vy$, seu $vy - a$, erit

$$aa - yy = v^2y^2 - 2avy + a^2$$

Factaque reductione *per* Lem. Cap. 1. habetur

$$v^2y^2 + y^2 = 2avy$$

Divid. per y $\quad v^2y + y = 2av$

Tum per $v^2 + 1$ $\quad y = \frac{2av}{v^2 + 1}$

Sit $2a = 20$, sumatur ad arbitrium $v = 3$, erit $y = \frac{60}{10} = 6$; proinde $a + y = 16$, & $a - y = 4$, unde $aa - yy = 100 - 36 = 64 = 4 \times 16$.

Sit $2a = 30$, sumpto $v = 2$, erit $y = \frac{60}{5} = 12$; proinde $a + y = 27$, $a - y = 3$, & $aa - yy = 81$.

SCHOL. *Quantitas* u *est quidem arbitraria, sed talis sumi debet, ut* y *semper maneat minor, quam* a, *cujus differentia esse supponitur.*

PROBL. V.

Quadratum invenire, quod sive addito, sive dempto quocumque suæ radicis multiplici, submultiplici, superparticulari, & quavis alia proportionis specie, semper sit quadratum.

Sit quæsiti quadrati latus $= x$, & radicis addendæ, aut detrahendæ multiplum $= m$; erit $x^2 + mx$ quadratum una cum multiplo suæ radicis, cui quadratum æquale quæritur. Pro cujus latere, sumpto ad libitum v, fiat $v - x$; erit ex conditione Probl.

$$x^2 + mx = vv - 2vx + xx$$

Sch. Prop. 1. $$2vx + mx = vv$$

Reg. 3. $$x = \frac{vv}{2v + m}$$

Sit $m = 2$, & sumatur ad libitum $v = 5$; erit $x = \frac{25}{12}$, hinc $x^2 + mx = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144}$, cujus $\surd = \frac{35}{12}$.

Sit $m = 3$, & ad libitum $v = 4$; erit $x = \frac{16}{11}$, & $x^2 + mx = \frac{256}{121} + \frac{48}{11} = \frac{784}{121}$, cujus $\surd = \frac{28}{11}$.

Quod si data radicis proportio non addi, sed subtrahi debeat a suo quadrato, tunc invenietur $x = \frac{v^2}{2v - m}$, ut calculum ineunti palam est.

Sit enim, ut supra, $m = 3$, $v = 4$; erit $x = \frac{18}{5}$, & $x^2 - mx = \frac{256}{25} - \frac{240}{25} = \frac{16}{25}$, cujus $\sqrt{} = \frac{4}{5}$.

Sit demum $m = 4$, $v = 5$; erit $x = \frac{25}{6}$, & $x^2 - mx = \frac{625}{36} - \frac{100}{6} = \frac{25}{36}$, cujus $\sqrt{} = \frac{5}{6}$.

Schol. *In hoc problema satis elegans casu incidit ut ipse asserit*, P. Augustinus Thomas a S. Josepho (a) *Schol. Piarum Geometra & Astronomus in Germania clarissimus. Pro quo, suppressa analysi, canonem tradidit universalem* $\frac{a^4 + 2a^2m^2}{4a^3 - 4am^2} + m^4 =$ *radici quadrati quæsiti; ubi* m *denotat proportionem cujuscumque speciei;* a *sumitur ad libitum, modo major sit quam* m. *At canon a nobis traditus longe simplicior est, ut patet.*

P R O B L. VI.

Tres numeros invenire, quorum tum summa, tum bini quadratum efficiant.

Sint numeri quæsiti x, y, z; primi autem quadrati $x + y + z$ latus sit r, secundi quadrati $x + y$ latus sit s, tertii $x + z$ sit t, quarti $y + z$ sit v; erunt quatuor æquationes

1.ª	$x + y + z = rr$
2.ª	$x + y = ss$
3.ª	$x + z = tt$
4.ª	$y + z = vv$

Ex prima & secunda æquatione habentur duo valores ipsius x, *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *nempe*

$x =$

(a) Sylloge Epist. Mathem. Pragæ an. 1713.

$$x = rr - y - z, \text{ \& } x = ss - y$$

$$rr - y - z = ss - y$$

Axiom. 2. $$rr - z = ss$$

Coroll. cit. $$z = rr - ss$$

Ex tertia æquatione habetur $x = tt - z$ *per Coroll. cit.*, positoque loco z eius valore modo invento, habetur *per Axiom.* 4.

$$x = tt - rr + ss$$

Cumque habeatur ex secunda æquatione $x = ss - y$, duæ æquationes æquales erunt, scilicet

Ax. 2 $$tt - rr + ss = ss - y$$

Ax. 1. *& Cor.* 2. *Prop.* 1. $$tt - rr = -y$$

$$y = rr - tt$$

Positis autem in quarta æquatione $y + z = vv$, valoribus y & z jam inventis, erit *per Ax.* 4.

$$rr - tt + rr - ss = vv$$

$$2rr - tt - ss = vv$$

Fiat $r - m = t$, erit $rr - 2rm + m^2 = tt$. Item fiat $r - n = s$, erit $rr - 2rn + n^2 = ss$; & his valoribus in superiori æquatione substitutis loco $- tt - ss$, oritur æquatio

$$2rr - rr + 2rm - m^2 - rr + 2rn - n^2 = vv$$

Lem. Cap. 1. $$2rm + 2rn - m^2 - n^2 = vv$$

Ax. 1. $$2rm + 2rn = vv + m^2 + n^2$$

Reg. 3. $$r = \frac{vv + m^2 + n^2}{2m + 2n}$$

m, n, v sunt ad libitum.

Sit $m = 1$, $n = 2$, $v = 7$, erit $r = \frac{54}{6} = 9$; hinc $r - m = t = 9 - 1 = 8$, & $r - n = s = 9 - 2 = 7$.

Proinde

$x = 32$	$x + y + z = 81$
$y = 17$	$x + y = 49$
	$x + z = 64$
$z = 32$	$y + z = 49$

Sit $m = 2$, $n = 4$, $v = 8$, erit $r = \frac{84}{12} = 7$, & $r - m = t = 5$, $r - n = s = 3$; adeoque

$x = -15$	$x + y + z = 49$
	$x + y = 9$
$y = 24$	$x + z = 25$
$z = 40$	$y + z = 64$

SCHOL. *Problemata indeterminata qui plura cupit, Diophantum adeat, qui in numeris infinita fere proponit, unde* Analyſis Diophantea *nomen accepit. Horum ſolutionem recentiores alia via per analyſim ſpecioſam indagarunt*, Billy (a) *præſertim*, Ozanam (b), *&* Præſtetus (c). *Hæc quidem determinatis difficiliora tyroni evadunt. Negligenda tamen non ſunt, cum in doctrina curvarum uſum habeant plurimum, ut nos opportune* Wolfius (d) *admonet. Quæ nos hic pauca ſelegimus, ad cæterorum intelligentiam, ſi quidem probe percepta fuerint, ſatis erunt.*

CAPUT VI.

De Æquationibus compoſitis.

HActenus de æquationibus *ſimplicibus*. Nunc ad *compoſitas*, quæ pluribus conſtant dimenſionum gradibus, tranſitum facimus. Quarum naturam, & proprietates præcipuas hoc loco breviter explicabimus.

PRO-

(a) Diophant. redivivus. (b) Nouveaux elem. d'Algeb. l. 3. (c) Nouveaux elemens de Mathematiq. T. 2. (d) Elem. analy. edit. 2. Cap. 2, §. 249.

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum compositarum genesis.

Assumantur nonnullæ æquationes simplices, quæ radices positivas, vel negativas contineant, & æquentur nihilo. Deinde ad invicem multiplicentur; orientur æquationes compositæ tot graduum, quot assumptæ fuerint radices.

Sit $x = a$, seu $x - a = 0$
$x = b$, seu $x - b = 0$

Multiplicentur inter se hæ duæ æquationes simplices, oritur

$$x^2 \begin{array}{l} - ax \\ - bx \end{array} + ab = 0$$

Sit deinde $x = c$, seu $x - c = 0$, & per hanc multiplicetur æquatio jam inventa; erit æquatio composita tertii gradus

$$x^3 \begin{array}{l} - ax^2 \\ - bx^2 \\ - cx^2 \end{array} \begin{array}{l} + abx \\ + acx \\ + bcx \end{array} - abc = 0$$

Eadem ratione sit $x = 2$, seu $x - 2 = 0$
$x = -3$, seu $x + 3 = 0$
$x = 4$, seu $x - 4 = 0$

Multiplicentur ad invicem hæ tres æquationes simplices, fit æquatio tertii gradus

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Quæ quidem si ulterius multiplicetur per aliam æquationem simplicem $x + 1 = 0$, fit æquatio quarti gradus, nempe

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

Atque hic nonnulla circa æquationes hujusmodi diligenter observanda sunt:

I. In qualibet æquatione tot dari radices, quot incognita primi termini dimensiones habet, seu quot habet exponens unitates; nempe duas in quadratica, tres in cubica &c.

II. Quantitatem cognitam secundi termini continere summam omnium radicum sub signo contrario, hoc est radices positivas cum signo —, negativas cum signo +. Quantitatem cognitam tertii termini exhibere productum ex singulis binis radicibus sub signo proprio: cognitam quarti productum ex singulis ternis radicibus sub signo contrario, & sic deinceps. Terminum vero ultimum (quem homogeneum comparationis vocant) esse factum omnium radicum. Hæc omnia in prima, & secunda æquatione oculis patent.

III. In omni æquatione tot dari radices positivas, seu veras, quot sunt mutationes signorum de + in —, & de — in +; tot vero negativas, seu falsas, quot successiones signorum eorumdem + +, vel — —, Sic in æquatione $x^2 - 5x + 6 = 0$, quia duplex est mutatio signorum + —, & — +, duplex est radix positiva, nempe $x = 2$, & $x = 3$. In æquatione vero $x^2 + 3x - 4 = 0$, quia una est signorum eorumdem successio + +, & una mutatio + —, una radix est negativa, nempe $x = -4$, & altera positiva $x = 1$. Si vero omnia signa sint positiva, ut in æquatione $x^2 + 5x + 6 = 0$, radices omnes falsæ sunt, nempe $x = -2$, & $x = -3$.

IV. Si radices veræ sint falsis æquales, secundus terminus æquationis evanescit, & fit æqualis zero. Sit $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$. Fiat æquatio, ut supra docuimus, oritur $x^3 * - 19x + 30 = 0$,

in qua

in qua secundus terminus deficit. Si radices veræ superant falsas, secundus terminus æquationis est cum signo —. Sit radix vera $x - 5$ major, quam falsa $x = -2$; erit æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$, in qua -3 denotat excessum radicis veræ $+5$ supra falsam -2. Si denique radices falsæ majores sunt, quam veræ; secundus terminus æquationis est cum signo +. Sit radix falsa $x = -5$, vera autem sit $x = 2$; erit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, in qua $+3$ exprimit excessum radicis falsæ -5 supra veram $+2$.

V. Duplici ratione cognoscitur, quantitatem aliquam positivam, aut negativam esse radicem æquationis. Primo si fiat binomium constans incognita, & quantitate aliqua data cum signo —, si sit quantitas positiva; vel cum signo +, si sit negativa, & per ipsum exacte, & sine ullo residuo æquatio sit divisibilis. Sic quia æquatio superior $x^2 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ divisibilis est exacte per $x - 2$, seu per $x + 3$, vel per $x - 4$, deducitur, $+2$, -3, $+4$ esse radices ejusdem æquationis: cum æquationes oriantur ex multiplicatione, & divisio sit multiplicationi contraria. Secundo si substituendo in æquatione, loco incognitæ, quantitatem datam cum signo +, si est positiva, aut cum signo —, si est negativa, & omnia producta per signa contraria sese destruant; erit illa quantitas radix æquationis. Sit eadem æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Substituatur loco incognitæ x ubique ejus valor $+2$; erit $8 - 12 - 20 + 24 = 0$. Substituatur rursus loco ejusdem incognitæ x valor -3; erit $-27 - 27 + 30 + 24 = 0$. Demum substituto valore $+4$, erit $64 - 48 - 40 + 24 = 0$.

Similiter in æquatione $x^2 \begin{matrix} - ax \\ + bx \end{matrix} - ab = 0$. Radices sunt $+ a$, $- b$: substituantur hi valores loco incognitæ x; erit $a^2 - a^2 + ab - ab = 0$. Item $b^2 - b^2 + ab - ab = 0$.

SCHOL. I. *Præter radices rationales positivas, aut negativas, de quibus hactenus locuti sumus, dantur etiam in æquationibus radices irrationales, & incommensurabiles tam positivæ, quam negativæ. Sic æquatio* $x^2 - 6x + 4 = 0$ *habet duas radices irrationales* $3 + \sqrt{5}$, *&* $3 - \sqrt{5}$.

SCHOL. II. *Præter radices reales rationales, & irrationales jam allatas, æquatio aliquando continet radices imaginarias & impossibiles. Nam cum nonnullæ quæstiones casus impossibiles involvant, ut si quæratur in circulo dato applicari rectam, quæ diametro circuli major sit, necesse est, radix illi casui respondeat impossibibilis. Sic æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *continet duas radices imaginarias* $1 + \sqrt{-6}$, *&* $1 - \sqrt{-6}$, *quæ in æquationibus sunt semper numero pares.*

SCHOL. III. *Regula, quam ex Cartesio docuimus supra* num. 3. *pro dignoscendis ex permutatione, aut successione signorum radicibus veris ac falsis, non valet pro æquationibus, quæ radicibus imaginariis constant. Nam superior æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *ex signorum permutatione continere videtur duas radices veras, quod tamen est falsum. Multiplicetur enim per* $x + 3 = 0$, *ut præter duas veras aliam quoque falsam contineat: oritur* $x^3 + 1x^2 + 1x + 21 = 0$, *in qua dispositio signorum ex præcit. regula indicat, omnes radices esse falsas. Non erant ergo in æquatione duæ radices veræ, quales apparabant, sed imaginariæ* $1 + \sqrt{-6}$, *&* $1 - \sqrt{-6}$. *Proinde hic regula fallit.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Æquationem quamcumque ordinare.

I. Ponantur in uno æquationis membro omnes incognitæ, ita ut primo loco ſtatuatur incognita maximæ poteſtatis, quæ dicitur *primus* æquationis terminus: ſecundo loco incognita poteſtatis uno gradu inferioris, quæ dicitur *ſecundus* terminus æquationis, deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decreſcentes, quæ conſtituunt *tertium*, *quartum*, *quintum &c.* terminum æquationis. In altero æquationis membro ponantur omnes termini, qui ex cognitis quantitatibus componuntur.

Sit æquatio inventa $bx^2 + x^3 = bx - ab + cd$
erit *ordinata* $x^3 + bx^2 - bx = cd - ab$
Item ſit æquatio $by^3 - dy + y^4 = abc + cy + mf$
erit *ordinata* $y^4 + by^3 - cy - dy = abc + mf$

II. Si terminus maximæ poteſtatis multiplicatus exiſtat per aliam quantitatem ſive literariam, ſive numericam, dividi debet per illam, ut ſimplex evadat. Sit $3x^2 + 6ax = ab$, dividendo per 3 totam æquationem, erit $x^2 + 2ax = \frac{1}{3} ab$. Eadem ratione ſi ſit æquatio $ax^2 - 2ax = abc$, dividendo per a, fit $x^2 - 2x = bc$.

III. Si terminus maximæ poteſtatis afficitur ſigno $-$, fieri debet per terminorum tranſpoſitionem poſitivus. Sic in æquatione $ax - x^2 = ab - cf$, facta terminorum tranſpoſitione, erit $x^2 - ax = cf - ab$.

IV. Omnes illi termini, in quibus incognita eandem habet dimenſionem, ſtatuantur unus infra alium; idemque fiat de quantitatibus cognitis, ſi plures ſint, ut

$$\begin{array}{l} x^3 + ax^2 - bx \\ \quad\; - bx^2 + cx = abc \end{array}$$

quantitates $ax^2 - bx^2$ ſtant ambæ loco ſecundi termini, & $- bx^2 + cx$ loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$\begin{array}{l} x^2 - ax = ac - bc + mf \\ \quad\; - bx \end{array}$$

quantitates $ac - bc + mf$ unicum terminum conſtituunt.

COROLL. I. *Hinc habetur modus revocandi quamcunque æquationem compoſitam ad ſimplicem, Si enim in ſuperiori prima æquatione ponatur* $a - b = p$; *erit* $ax^2 - bx^2 = px^2$. *Item ponendo* $- b + c = q$, *erit* $- bx + cx = qx$, *demum ponendo* $abc = r$, *eadem æquatio transformabitur in hanc ſimpliciſſimam* $x^3 + px^2 + qx = r$. *Similiter in ſuperiori ſecunda æquatione fiat* $- a - b = - p$; *erit* $- ax - bx = - px$; *fiat* $ac - bc + mf = q$; *ea in hanc transformabitur* $x^2 - px = q$. *Quod quidem quanti ſit uſus, ex inferius dicendis ſatis conſtabit.*

COROLL. II. *Præſtat non raro omnes æquationis treminos ad unam partem transferre, ita ut omnes quantitates nihilo fiant æquales. Sic æquatio* $x^2 - px = q$ *fiet* $x^2 - px - q = 0$. *Item* $x^3 - ax^2 + bx = a^2 b^2$, *erit* $x^3 - ax^2 + bx - a^2 b^2 = 0$. *Quod artificium Algebræ, ut videbimus, valde commodum,* Thomæ Harrioto (a) *Anglo tribuitur.*

COROLL. III. *Si quis terminus in æquatione deſit, ut ſecundus, tertius, quartus, &c. notatur termini, aut terminorum (ſi plures deſint) defectus* aſteriſmo, *ut æquatio* $x^3 * + ax - a^3 = 0$, *quæ ſecundo termino caret. Pariter* $x^4 * - cx^2 * + a^2bc = 0$ *caret* ter-

(a) Artis Analyt. praxis Londini 1631.

terminis secundo & quarto. Tunc autem minime variatur sequentium terminorum ordo, aut conditio. Sed ax v. g. in prima æquatione manet terminus æquationis tertius; & in secunda $+ a^2bc$ *tenet locum æquationis quintum, licet absint duo termini, & sic de aliis.*

PROPOSITIO III.

Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare.

Mutentur in æquatione signa terminorum parium, ea nempe, quæ præcedunt terminos secundum, quartum, sextum &c. radices veræ degenerabunt in falsas, & viciſſim falsæ in veras. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ ex *anteced. Prop.* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3: variatis autem terminorum parium signis, fit $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, quæ quidem habet easdem cum priore radices, sed duas falsas -2, -4, & unam veram $+3$.

Demonstratio. Substituatur in eadem æquatione loco incognitæ x una ex radicibus, seu valoribus -2, tota æquatio evanescit, nempe $-8+12+20-24 = 0$. Substituatur deinde -4, iterum æquatio evanescit; nam $-64+48+40-24=0$. Idem fiat cum radice vera $+3$; erit enim $27+27-30-24 = 0$, ergo -2, -4, $+3$ sunt radices illius equationis *per Prop.* 1. *hujus num.* 5. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

Radices augere, vel minuere data quantitate.

I. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ *ex Prop.* 1. *hujus* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3: augere volo ejus radices quantitate data $=3$.

Fiat

Fiat $x+3=y$, erit $x=y-3$. Substituatur hic valor in æquatione loco ipsius x; erit

$$\begin{array}{l|l} x^3 & =y^3-9y^2+27y-27 \\ -3x^2 & \qquad -3y^2+18y-27 \\ -10x & \qquad\qquad -10y+30 \\ +24 & \qquad\qquad\qquad +24 \\ \hline \text{Summa} & y^3-12y^2+35y+{*}=0 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices ternario auctas, nempe $+5$, $+7$, $+0$ (nam $-3+3=0$) quæ quidem prius erant $+2$, $+4$, -3. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, ex. gr. $+5$, fiet $125-300+175=0$, ergo $+5$ est radix ejusdem æquationis *per Propos.* 1. *num.* 5.

II. Minuenda sit eadem æquatio $x^3-3x^2-10x+24=0$ numero binario. Fiat $x-2=y$, erit $x=y+2$. Substituatur in eadem æquatione hic valor loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{l|l} x^3 & =y^3+6y^2+12y+8 \\ -3x^2 & \qquad -3y^2-12y-12 \\ -10x & \qquad\qquad -10y-20 \\ +24 & \qquad\qquad\qquad +24 \\ \hline \text{Summa} & y^3+3y^2-10y+{*}=0 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices binario minutas, nempe 0, -5, $+2$, quæ prius erant $+2$, -3, $+4$. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, v. g. -5; erit $-125+75+50=0$; ergo *per Prop.* 1. *num.* 5. radix -5 est radix ejusdem æquationis.

COROLL. I. *Augendo radices æquationis, singulæ radices veræ augentur: contra vero falsæ minuuntur. Nam si ad radicem falsam -4 addatur $+3$; minuitur, & fit -1. Imo aliquando falsæ in veras transeunt, ut si ad falsam -4 addas $+5$, fit radix vera $+1$. Quod evidens est.*

COR-

CORROLL. II. *Minuendo radices æquationis, radices falsæ augentur. Nam si ex radice falsa — 3 subtrahitur quantitas* + 2, *fit* — 5, *ut patet. At veræ minuuntur, imo & aliquando fiunt falsæ; ut si ex radice* + 2 *auferas* + 5, *fiet* — 3, *radix scilicet falsa.*

SCHOL. *Augendo radices æquationis habetur methodus convertendi radices falsas in veras, nec propterea veræ fiant falsæ; quod docuit* Cartesius (a), *& patet ex* Cor. 1.

PROPOSITIO V.

Ex data æquatione secundum terminum tollere.

SI secundus terminus datæ æquationis afficitur signo +, augeantur radices quantitate cognita secundi termini divisa per exponentem æquationis. Si afficitur signo —, minuantur radices eadem quantitate; in utroque casu habebitur nova æquatio secundo termino carens.

Sit æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$, ex qua secundus terminus tolli debeat.

Divisa quantitate cognita secundi termini 6 per exponentem 2; quotus 3 est quantitas, qua augeri debent (ob signum +) radices æquationis.

Fiat ergo ut in *Prop. antec.* $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$, quo valore substituto in æquatione, loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|rrr} x^2 & = y^2 & - 6y & + 9 \\ + 6x & & + 6y & - 18 \\ - 16 & & & - 16 \\ \hline \text{Summa} & y^2 & * & - 25 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y = 5$; proinde $x (= y - 3) = 5 - 3 = 2$.

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, in qua secundus terminus evanescere debeat.

Di-

(a) Geometriæ lib. 3. edit. 3. pag. m. 74.

Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur $\frac{12}{3} = 4$ quantitas, qua minui debent (ob signum $-$) æquationis datæ radices. Fiat ergo $x - 4 = y$, erit $x = y + 4$; factaque hujus valoris substitutione, oritur nova æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{l|lllll} x^3 & = y^3 & + 12y^2 & + 48y & + 64 & \\ -12x^2 & & -12y^2 & -96y & -192 & \\ +44x & & & +44y & +176 & \\ -48 & & & & -48 & \\ \hline \text{Summa} & y^3 & * & -4y & * & = 0 \end{array}$$

III. Quid vero si secundus terminus ex æquatione tollendus utroque signo $+$ & $-$ afficitur?

Sit æquatio $x^2 \begin{array}{l} -ax \\ +bx \end{array} - ab = 0$, ex qua tolli debet secundus terminus. Divisa quantitate cognita $-a+b$ per exponentem 2, habetur $\frac{-a+b}{2}$, seu $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Fiat $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = y$, erit $x = y + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; factaque hujus valoris substitutione, habetur æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{l|llllll} x^2 & = y^2 & + ay - by & + \frac{1}{4}a^2 & - \frac{1}{2}ab & + \frac{1}{4}b^2 & \\ -a\,x & & -ay + by & - \frac{1}{2}a^2 & + ab & - \frac{1}{2}b^2 & \\ +b\,x & & & & -ab & & \\ -ab & & & & & & \\ \hline \text{Summa} & y^2 & * & -\frac{1}{4}a^2 & -\frac{1}{2}ab & -\frac{1}{4}b^2 & = 0 \end{array}$$

Demonstratur per Coroll. 1. *&* 2. *Prop. antec.* Radices veræ ac falsæ ita augeri possunt, ac minui, ut fiant æquales nullitati, seu zero. Sic in primo exemplo æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$ habet duas radidices, unam falsam -8, alteram veram $+2$; proinde augendo numero ternario utramque, prima erit $-8+3=-5$, altera vero $+2+3=5$; proinde $-5+5=0$.

Similiter sit æquatio $x^2-4x-12=0$; ut tollatur secundus terminus, minui debent ejus radices numero binario. Una ipsius radix vera est $+6$, altera falsa -2; proinde utramque minuendo, erit prima $+6-2=4$, altera $-2-2=-4$; hinc $+4-4=0$. Atque hinc est, quod in æquatione, cujus omnes radices æquales sunt, sublato secundo termino, omnes alii evanescunt, ut videre est in æquatione $x^3-12x^2+48x-64=0$, atque aliis. Qua ratione autem regula sic augendi, vel minuendi radices sit inventa, patebit ex sequenti *Propos. ejusque Schol.* 1.

SCHOL. I. *Cum sæpe divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem primi, oriatur fractio, ut in tertio exemplo superiori contigit, quo praxis facilior in æquationibus præsertim altioribus evadat, præstat loco fractionis indeterminatam aliquam assumere, & binomium* $x+n$, *vel* $x-n$ *elevare ad omnes illos gradus, quos æquatio data exigit; peractaque operatione, valores indeterminatæ* n^1, n^2, n^3 *&c. substituere. Sic enim molestia fractionum minuitur, & facilius poterit ad examen operatio tota revocari. Data sit æquatio, ex qua secundus terminus auferri debeat,* $x^3+5x^2-2x-24=0$. *Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem* 3, *habetur fractio* $\frac{5}{3}$; *fiat* $n=\frac{5}{3}$, *&* $x+n=y$, *erit* $x=y-n$, *quo quidem binomio ad secundam, & tertiam potestatem elevato, hoc est*

$$x = y-n$$
$$x^2 = y^2-2ny+n^2$$
$$x^3 = y^3-3ny^2+3n^2y-n^3$$

pe-

positisque loco n, n^2, n^3 *eorum valoribus* $n = \frac{5}{3}$, $n^2 = \frac{25}{9}$, $n^3 = \frac{125}{27}$, *facili negotio invenitur*.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & = y^3 - 5y^2 + \frac{75}{9}y - \frac{125}{27} \\
+5x^2 & \quad\;\; + 5y^2 - \frac{50}{3}y + \frac{125}{9} \\
-2x & \qquad\qquad\quad - 2y + \frac{10}{3} \\
-24 & \qquad\qquad\qquad\quad - 24 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 \; * \; - \frac{93}{9}y - \frac{308}{27} = 0
\end{array}$$

SCHOL. II. *In omni æquatione terminus secundus, qui deficit, supponi potest affectus utroque signo* $+$ *&* $-$; *sic æquatio* $x^3 * - ax + b^3 = 0$ *supponitur* $x^3 \pm - ax + b^3 = 0$, *proinde facta comparatione cum termino, qui præcedit, nempe cum* $+ x^3$, *habetur & permutatio & successio signorum, hoc est* $+-$ *&* $++$. *Quod pariter accidit, facta comparatione cum termino, qui consequitur, nempe cum* $- ax$. *Nam similiter habetur* $+-$ *&* $--$; *ideoque in utroque casu indicatur una radix vera, & altera falsa* per Prop. 1. hujus num. 3.

PROPOSITIO VI.

Ex æquatione terminum tertium tollere.

I. Sit æquatio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ex qua tertius terminus sit auferendus.

Inveniri debet quantitas, qua radices datæ æquationis sic augeantur, aut minuantur, ut tertius terminus evanescat, quod quidem per analysim obtinetur hoc artificio.

Sit quantitas quæsita $= z$, fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$; substituto hoc valore ipsius x in data æquatione, erit

$$\begin{array}{l|l} x^3 & = y^3 - 3zyy + 3z^2y - z^3 \\ + px^2 & \quad + pyy - 2pzy + pz^2 \\ + qx & \qquad + qy - qz \\ - r & \qquad\quad - r \end{array}$$

Cum igitur tertius terminus debeat evanescere, fiat æqualis zero, scilicet

$$3z^2y - 2pzy + qy = 0$$

Divid. per y $\quad 3z^2 - 2pz = -q$

Tum per 3 $\quad z^2 - \frac{2}{3}pz = -\frac{1}{3}q$

Occurrit æquatio secundi gradus resolvenda, ut docebitur infra *Prop.* 1. *Cap.* 8. quæ ab hac non dependet. Addatur scilicet utrinque quadratum ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe $\frac{1}{9}pp$, erit

$$z^2 - \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}pp = \frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q$$

Extr. Rad. $\quad z - \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$

$$z = \frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

Sed $x = y - z$, ergo $x = y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$. Quo valore in data æquatione substituto, fiet æquatio termino tertio carens, ut in duobus sequentibus exemplis.

1. Sit enim æquatio $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$, erit $p = -4$, & $q = 4$; hinc $y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3}$. Est ergo $x = y + \frac{2}{3}$, ideoque erit

x^3

$$\begin{array}{l|l} x^3 & = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \\ -4x^2 & \quad -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9} \\ +4x & \quad\quad +4y + \frac{8}{3} \\ -6 & \quad\quad\quad -6 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 2y^2 \quad * \quad -\frac{130}{27} = 0 \end{array}$$

2. Similiter sit æquatio data $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, erit $p = -3$ & $q = 3$; proinde $y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + 1$. Fiat cum hoc valore nova æquatio, nempe

$$\begin{array}{l|l} x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 & \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ +3x & \quad\quad +3y + 3 \\ -4 & \quad\quad\quad -4 \\ \hline \text{Summa} & y^3 \quad * \quad * \quad -3 = 0 \end{array}$$

Habetur ergo æquatio termino tertio carens, in qua $y = \sqrt[3]{3}$.

II. Sit æquatio quarti gradus, ex qua tertius terminus exterminari debeat, $x^4 * + px^2 + qx + r = 0$.

Fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$, quo valore ipsius x in æquatione data substituto, habetur

$$\begin{array}{l|l} x^4 & = y^4 - 4zy^3 + 6z^2y^2 - 4z^3y + z^4 \\ +px^2 & \quad\quad + py^2 - 2pzy + pz^2 \\ +qx & \quad\quad\quad + qy - qz \\ +r & \quad\quad\quad\quad + r \end{array}$$

Fiat terminus $6z^2y^2 + py^2 = 0$; dividendo per y^2, erit

$6z^2$

$6z^2 + p = 0$, hoc est $z^2 = -\frac{p}{6}$, & $z = \sqrt{-\frac{p}{6}}$; habetur ergo valor ipsius z.

Data sit jam æquatio specialis $x^4 * - 6x^2 - 8x - 3 = 0$, ex qua tertius terminus auferendus sit. Facta comparatione terminornm hujus cum terminis æquationis superioris, erit $p = -6$, $q = -8$ &c. adeoque z ($= \sqrt{-\frac{p}{6}}$) $= \sqrt{\frac{6}{6}} = 1$. Est ergo $x = y - 1$, qui valor si ponatur in æquatione data, oritur

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\
-6x^2 & \qquad\qquad - 6y^2 + 12y - 6 \\
-8x & \qquad\qquad\qquad\quad - 8y + 8 \\
-3 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 3 \\
\hline
\text{Summa} & y^4 - 4y^3 \quad * \quad * \quad * = 0
\end{array}$$

Unde æquatio facillime resolvitur. Nam $y^4 = 4y^3$; proinde $y = 4$. Sed posita fuit $x = y - z$; ergo $x = 4 - 1 = 3$: est ergo 3 radix ipsius æquationis.

SCHOL. I. *Hoc eodem artificio inventa est regula tollendi ex æquationibus terminum secundum, quam in* Prop. ant. *docuimus. Nam si ex æquatione generali superiori secundus terminus supponatur æqualis zero, erit* $-3zyy + pyy = 0$, *proinde* $3z = p$, & $z = \frac{p}{3}$; *unde patet, quantitatem addendam, vel subtrahendam radici datæ æquationis esse quantitatem cognitam secundi termini divisam per exponentem primi termini.*

SCHOL. II. *Eadem plane ratione tolli possunt ex æquationibus termini* quartus, quintus, sextus &c. *Sed quia pro quarto tollendo æquatio tertii gradus, pro quinto æqua-*

 tio

tio quarti gradus, pro sexto æquatio quinti gradus occurrit; ideo non est hujus loci ulterius progredi.

PROPOSITIO VII.

Æquationum, in qua termini aliqui desunt, complere.

I. Augeatur radix æquationis datæ quantitate aliqua *per Prop.* 4. exurget æquatio completa. Sit æquatio complenda $x^3 - 19x - 30 = 0$, in qua deest secundus terminus. Fiat *per Prop. cit.* $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$. Substituatur hic valor loco x in data æquatione, erit

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & = y^3 & - 3y^2 & + 3y & - 1 \\ -19x & & & -19y & + 19 \\ -30 & & & & - 30 \\ \hline \text{Summa} & y^3 & - 3y^2 & - 16y & - 12 = 0 \end{array}$$

Habetur ergo æquatio completa cum secundo termino, in qua $y = x + 1$.

II. Sit æquatio incompleta $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua tertius terminus deficit. Fiat, ut supra, $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$, & facta substitutione hujus valoris loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & = y^3 & - 3y^2 & + 3y & - 1 \\ -3x^2 & & - 3y^2 & + 6y & - 3 \\ +2 & & & & + 2 \\ \hline \text{Summa} & y^3 & - 6y^2 & + 9y & - 2 = 0 \end{array}$$

En integra æquatio, in qua pariter $y = x + 1$.

Ratio est, quia secundus terminus v. g. deficit in æquatione, cum radices veræ æquantur falsis *per Prop.* 1. *num.* 4. Ergo si una ex veris augeatur, integra æquatio restituitur.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.

I. Est æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ multiplicandæ sunt per datam quantitatem $= c$.

Fiat $cx = y$, erit $x = y : c$ (duo puncta (:) sunt divisionis signum *ex Schol.* 3. *Prop.* 8. *Cap.* 1.) Substituatur ubique hic valor in data æquatione loco ipsius x, erit nova æquatio

$$\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} - \frac{b^2y}{c} + abb = 0$$

Et multiplicatis singulis terminis per c^3, factaque reductione, habetur

$$y^3 - acy^2 - bbc^2y - + abbc^3 = 0$$

cujus radices sunt $+ac$, $+bc$, $-bc$.

II. Similiter est æquatio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices $+1$, $+2$, $+3$ multiplicari debent per quantitatem $= 2$.

Fiat $2x = y$, erit $x = y : 2$; & hoc valore substituto in data æquatione loco ipsius x, oritur

$$\frac{y^3}{8} - \frac{6y^2}{4} + \frac{11y}{2} - 6 = 0$$

Multiplicentur omnes termini per cubum 8, factaque reductione, erit nova æquatio

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

cujus radices sunt $+2$, $+4$, $+6$.

COROLL. I. *Ex utroque exemplo satis apparet, ad multiplicandam æquationem per datam quantitatem satis esse eam multiplicare per progressionem Geometricam,* *cujus terminus primus sit 1, terminus secundus sit denominator rationis &c. Nam multiplicandæ sint radices ejusdem prioris æquationis per c, assumpta alia incognita y loco ipsius x; erit, ut prius*

$$\begin{array}{l} y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0 \\ 1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3. \\ \hline y^3 - acy^2 - b^2c^2y + abbc^3 = 0 \end{array}$$

Similiter multiplicandæ sint per 2 radices alterius æquationis: assumpta y loco ipsius x, & multiplicata æquatione per progressionem Geometricam; erit, ut prius.

$$\begin{array}{l} y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \\ 1. \quad 2. \quad 4. \quad 8. \\ \hline y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0 \end{array}$$

PROPOSITIO IX.

Radices æquationis dividere per datam quantitatem.

I. Sit æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ dividere oporteat per quantitatem $= c$.

Fiat $\frac{x}{c} = y$, erit $x = cy$, & substituto hoc valore in data æquatione, erit

$$c^3y^3 - ac^2y^2 - b^2cy + abb = 0$$

Dividantur singuli termini per c^3, habetur

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

cujus radices sunt $+\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$, $-\frac{b}{c}$.

COROLL. *Hinc apparet, ad dividendam æquationem per*

per datam quantitatem, satis esse eam dividere per progressionem Geometricam, cujus primus terminus sit 1, *secundus terminus sit denominator rationis. Nam assumpta nova incognita* y, *& progressione Geometrica* 1. c. c². c³ *&c. erit æquatio, ut prius, divisa per* c, *nempe*

$$\begin{array}{ccccc} y^3 & - ay^2 & - b^2y & + abb & = 0 \\ 1. & c. & c^2. & c^3. & \end{array}$$

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

II. Eadem ratione dividenda sit per 3 æquatio numerica superior $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices sunt $+1$, $+2$, $+3$. Dividatur æquatio (assumpta incognita y) per progressionem Geometricam 1, 3, 9 &c. nempe

$$\begin{array}{ccccc} y^3 & - 6y^2 & + 11y & - 6 & = 0 \\ 1. & 3. & 9. & 27. & \end{array}$$

$$y^3 - 2y^2 + \frac{11y}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

Habetur nova æquatio, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. Nam harum qualibet substituta in æquatione loco ipsius y, tota æquatio evanescit: proinde sunt radices quæsitæ *per Propos.* 1. *hujus num.* 5.

SCHOL. *Ut æquationum radices augeantur, minuantur, multiplicentur, aut dividantur ea ratione, quam docuimus, plane non opus est, ut illæ sint cognitæ, imo a Cartesio, & aliis tanquam prorsus incognitæ supponuntur. Nos tamen consulto, illustrandæ rei gratia, ut jam cognitas usurpavimus.*

PROPOSITIO X.

Æquationem a fractionibus liberare.

I. Multiplicetur radix æquationis per factum omnium denominatorum fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Sit æquatio data $x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$

Multiplicetur per factum omnium denominatorum bcd radix æquationis; hoc est fiat $bcdx = y$, erit $x = y : bcd$, factaque hujus valoris substitutione in data æquatione, oritur

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^3c^2d^2} + \frac{aay}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0$$

Multiplicentur singuli termini per $b^3c^3d^3$, habetur æquatio sine fractionibus

$$y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y + a^3b^3c^3d^2 = 0.$$

II. Similiter sit æquatio $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0$. Multiplicetur radix æquationis per factum ex denominatoribus, hoc est per 10, nempe per progressionem Geometricam 1. 10 &c. per *Coroll. Prop. 8. hujus*.

$$\begin{array}{cccc} x^3 - & \frac{1}{2}x^2 + & \frac{1}{5}x - & 24 = 0 \\ 1. & 10. & 100. & 1000. \\ \hline y^3 - & 5y^2 + & 20y - & 24000 = 0 \end{array}$$

In qua quidem æquatione est $y = 10x$, proinde erit $x = \frac{y}{10}$.

III.

III. Demum ſit æquatio $x^3 * \frac{2}{3} x - \frac{81}{27} = 0$. Quia quantitas 3 metitur utrumque denominatorem, multiplicetur radix æquationis per 3 modo explicato, nempe

$$\begin{array}{l} x^3 * \frac{2}{3} x - \frac{81}{27} = 0 \\ 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \quad 27 \cdot \\ \hline y^3 * 6y - 81 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione habetur $y = 3x$, proinde dividi debent per 3 ſingulæ radices hujus, ut habeantur radices æquationis datæ, quod ſemper advertendum.

PROPOSITIO XI.

Æquationem a radicalibus liberare.

ID non eadem via ſemper aſſequimur; ideoque plura exempla rem illuſtrabunt.

I. Sit æquatio $x^3 * - 5x + \sqrt{2} = 0$. Fiat $x : \sqrt{2} = y$, erit $x = y\sqrt{2}$, & hoc valore in data æquatione ſubſtituto, erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 2y^3 \sqrt{2} \\ -5x & = & -5y\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} & = & +\sqrt{2} \\ \hline \text{Summa} & & 2y^3\sqrt{2} - 5y\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{array}$$

Et diviſis omnibus terminis per $\sqrt{2}$, fit æquatio ſine radicalibus

$$2y^3 - 5y + 1 = 0.$$

II. Quandoque fit progreſſio Geometrica ex radicalibus, per quam tota æquatio multiplicata ab irrationalibus liberatur. Ecce exemplum

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 5abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0 \\ 1 \quad \sqrt{2}. \quad 2. \quad \sqrt{8}. \quad 4. \\ \hline y^4 + 4ay^3 + 10aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0 \end{array}$$

Radices autem hujus æquationis dividendæ erunt per $\sqrt{2}$, ut habeantur radices æquationis datæ. Nam $y = x\sqrt{2}$.

III. Sæpe etiam tota æquatio dividitur per radicalium progressionem Geometricam.

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0 \\ 1. \quad \sqrt[3]{2}. \quad \sqrt[3]{4}. \quad 2. \\ \hline y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0 \end{array}$$

In hac æquatione est $y = x : \sqrt[3]{2}$.

IV. Radicales ex æquationibus aliquando exterminantur per multiplicationem. Sit æquatio

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} = 0$$

Multiplicentur radices universales *per Propos.* 12. *Cap.* 4.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \\ \hline \frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} \\ \qquad - \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} - (\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3) \\ \hline \qquad\qquad \frac{1}{4}qq \end{array}$$

$$\frac{1}{4}qq \quad * \quad * \quad -\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$$

$= \frac{1}{3}p$, hinc $x = \frac{1}{3}p$. Ex $-1 \times \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ oritur $-\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$.

V. Æquatio a radicalibus liberatur ſupponendo terminos radicales æquales literis ad libitum aſſumptis, quæ ſingulatim in uno æquationis membro collocantur, & tota æquatio elevatur ad potentiam ab exponente radicis indicatam. Sit æquatio

$$x^3 * - x\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$$

Fiat $\sqrt{a} = p$, & $\sqrt{b} = q$; æquatio in hanc transformatur

$$x^3 * - px + q = 0$$

Ponatur px ſeorſim in uno æquationis membro, nempe $px = x^3 + q$, & (ob $\sqrt{a} = p$) tota æquatio elevetur ad ſecundam poteſtatem *per Reg.* 4. *Cap.* 5.

$$p^2x^2 = x^6 + 2qx^3 + q^2$$

Deinde ponatur $2qx^3$ in uno æquationis membro, hoc eſt $2qx^3 = p^2x^2 - x^6 - q^2$, & iterum utrumque membrum ad ſecundam poteſtatem elevetur ob $\sqrt{b} = q$; *per Reg. cit.* erit

$$4q^2x^6 = p^4x^4 - 2p^2x^8 + x^{12} - ap^2q^3x^2 + 2q^2x^6 + q^4$$

hoc eſt $x^{12} - 2p^3x^8 - 2q^2x^6 + p^4x^4 - 2p^2q^2x^2 + q^4 = 0$

Quod ſi fiat $x^2 = y$, deprimi poterit ad æquationem ſexti gradus, ſcilicet

$$y^6 - 2p^2y^4 - 2q^2y^3 + p^4y^2 - 2p^2q^2y + q^4 = 0$$

Demum in hac ultima æquatione loco p^2, p^4, q^2, q^4 ſubſtituantur eorum valores, nempe a, a^2, b, b^2: obtinebitur æquatio a radicalibus expedita

$y^6 -$

$$y^6 - 2ay^4 - 2by^3 + a^2b^2 - 2aby + b^2 = 0$$

SCHOL. *Si radicales sint cubicæ, æquationis membra ad tertiam potestatem elevantur.*

PROPOSITIO XII.

Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscumque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.

I. INveniri debet quantitas, per quam ita multiplicentur æquationis datæ radices, ut quantitas cognita in aliam datam commutetur.

Sit æquatio $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, quantitas data $= a$, quæsita sit $= z$.

Fiat $x = \frac{y}{z}$, & hic valor ponatur in data æquatione loco ipsius x; assumpta nova incognita y, erit

$$y^3 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0$$

1. Fieri debeat quantitas cognita secundi termini $p = a$: si supponatur $pz = a$, erit $z = \frac{a}{p}$.

2. Quantitas cognita tertii termini q fieri debeat æqualis datæ quantitati a; erit $qz^2 = a$, proinde $z^2 = \frac{a}{q}$, atque hinc $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$.

3. Pari modo fieri debeat ultimus terminus $rz^3 = a$; erit $z^3 = \frac{a}{r}$, ideoque $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$.

Jam si multiplicetur secundus terminus cujuscunque æquationis per valorem inventum ipsius z, tertius

tius terminus per quadratum, quartus per cubum ejusdem valoris, & sic deinceps, habebitur æquatio quæsita. Tyronum gratia res exemplis illustratur.

Sit æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$: quæritur loco ipsius alia, in qua coefficiens secundi termini 3 sit $= 2$. Erit ergo $p = 3$, $a = 2$; & cum sit ex dictis $z = \frac{a}{p}$, erit $z = \frac{2}{3}$: proinde si per hunc valorem multiplicentur radices hujus æquationis, assumpta nova incognita y, ut moris est, habebitur

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & - & 3x^2 & + & 18x & - & 54 = 0 \\ & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{9} & & \frac{8}{27} \\ \hline y^3 & - & 2y^2 & + & 8y & - & 16 = 0 \end{array}$$

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, cujus loco quæritur alia, in qua quantitas cognita tertii termini sit 4. Erit $q = 9$, $a = 4$.

Quia vero $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$ ex dictis superius, erit $z = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; per hanc igitur quantitatem multiplicandæ sunt æquationis radices, nova incognita y assumpta, hoc est

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & - & 12x^2 & + & 9x & - & 27 = 0 \\ & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{9} & & \frac{8}{27} \\ \hline y^3 & - & 8y^2 & + & 4y & - & 8 = 0 \end{array}$$

III. Sit pro tertio casu eadem æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, quæ in aliam commutanda, cujus terminus ultimus sit $= 1$.

Erit $r = 27$, $a = 1$: quia vero ex annotatis supeperius $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$; erit $z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, per quam quidem quantitatem multiplicari debent radices datæ æquationis, ut factum vides, & nova incognita y subrogari.

$$\begin{array}{c} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \quad \frac{1}{3} \quad\quad \frac{1}{9} \quad\quad \frac{1}{27} \\ \hline y^3 - 4y^2 + y - 1 = 0 \end{array}$$

Coroll. *Nemo non videt, hujus propositionis mysterium in eo esse, ut per Analysim inveniatur incognitæ illius z assumptæ quantitas, per quam multiplicatis datæ cujuscumque æquationis radicibus, alia nova oritur æquatio, in qua terminorum coefficientes, sive etiam ultimus terminus sunt datæ quantitati æquales.*

PROPOSITIO XIII.

Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.

I. MAjor æquatio, ea nempe, quæ altioris gradus incognitam continet (si sint æqualis gradus, utravis per aliam) dividatur per minorem, omnino ut fit in aliis quantitatibus compositis *per Prop.* 8. *Cap.* 1. & neglecto quoto, continuetur divisio, donec incognita in residuo fiat minoris dimensionis, quam in divisore. Tunc enim divisor ipse dividatur per illud residuum, neglecto quoto; & sic semper, donec nihil ex divisione remaneat. Nam talis divisor erit maximus divisor communis, qui quæritur, per quem æquationes illæ datæ sunt divisibiles. Exemplis res illustratur.

Sint

Sint duæ æquationes $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6 = 0$, & $-12x^2 + 30x - 18 = 0$, quarum maximus divisor communis quæritur.

Cum utraque sit multiplicata per 3, dividi poterit per 3, ut termini minores fiant; erunt $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$, & $-4x^2 + 10x - 6 = 0$, imo hæc adhuc dividi potest per 2, unde fit $-2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Quia vero dividendo primum terminnm x^3 per $-2x^2$, quotus est $\frac{x^3}{-2x^2} = \frac{x}{-2}$; hinc apparet, æquationem illam actu dividi non posse, quin prius multiplicetur per denominatorem -2. Quo facto, habetur $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$. Hæc autem divisa per $-2x^2 + 5x - 3$ (neglecto quoto) dat residuum $+3x^2 - 7x + 4$.

Continuetur divisio, & quia dividendo $3x^2$ per $-2x^2$, quotus est $= \frac{3}{-2}$, signum est, æquationem dividendam prius multiplicari debere per denominatorem -2, unde fit $-6x^2 + 14x - 8 = 0$; factaque divisione, habetur residuum $-x + 1$, seu $x - 1 = 0$, per quod dividendo quantitatem ipsam, quæ hactenus fuit divisor, scilicet $-2x^2 + 5x - 3$, nihil remanet. Est ergo $x - 1$ maximus divisor communis duarum datarum æquationum, quì tamen multiplicari debet per eandem quantitatem, per quam primo æquatio utraque communiter fuit divisa, eritque $3x - 3 = 0$.

II. Sint duæ æquationes $x^3 - 16x^2 + 61x - 66 = 0$, & $x^3 + 3x^2 - 34x + 48 = 0$, quarum maxima communis mensura quæritur. Dividatur prima per secundam, & neglecto quoto 1, per residuum $-19x^2$

+

$+95x - 114$ (quod, ut simplicius evadat, dividitur per -19, fitque $x^2 - 5x + 6$) dividatur secunda æquatio data : neglecto quoto x, habetur residuum $8x^2 - 40x + 48$, quod divisum per 8, dabit $x^2 - 5x + 6$. Hoc autem cum sit idem ac superius residuum, si fiat divisio, nihil remanet. Sunt ergo datæ æquationes divisibiles per $x^2 - 5x + 6$ maximum earum divisorem communem.

III. Sint duæ æquationes $x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$, & $x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$. Dividatur prima per secundam, habetur 1 pro quoto : quo neglecto, remanet $-ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 12a^4$, quo diviso per $-a$, habetur primum residuum $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$.

Per hoc primum residuum dividatur secunda æquatio data, habetur quotus $x - 4a$: quo neglecto, remanet $12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4$, atque hoc diviso per $12a^2$, habetur secundum residuum $x^2 - ax + 6a^2$. Per hoc secundum residuum dividatur primum, nihil remanet. Maximus ergo divisor communis est $x^2 - ax + 6a^2$.

Coroll. I. *Ex primo exemplo constat, communem divisorem inventum tunc solum esse multiplicandum per quantitatem, per quam divisa fuit æquatio, cum non una tantum, sed utraque æquatio per communem quantitatem divisa fuerit. Sic* x $-$ 1 *multiplicatur quidem per* 3, *per quem divisa fuerat utraque æquatio, non autem per* 2, *per quem una tantum æquatio fuit divisa.*

Coroll. II. *Reperto communi duarum æquationum divisore, habentur pariter earum radices, & problematis resolutio. Nam divisoris communis radices sunt eædem ac radices earumdem æquationum. Sic in secundo exemplo divisor communis, seu æquatio* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *habet radices* 3 *&* 2, per Prop. 1. hujus num. 5., *quas datarum æquationum easdem esse facile intelligitur.*

Schol.

SCHOL. I. *Si æquationes fuerint plures, quam duæ, reperto communi divisore inter primam & secundam, inveniri deinde eodem modo debet divisor communis inter tertiam æquationem, & divisorem communem jam inventum. Sed hoc perraro accidit.*

SCHOL. II. *Hanc regulam eandem esse, ac regulam communis Arithmeticæ, qua invenitur maxima communis mensura, seu divisor inter duos numeros datos, iisdemque principiis inniti, nemo non videt.*

PROPOSITIO XIV.

Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.

I. Sint duæ æquationes Propos. præc. quarum divisor communis quæritur, nempe A & B

$$A \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$$
$$B \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$$

Sumatur ex A primi termini valor *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. erit $x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^4$, qui subrogetur in æquatione B loco x^4, habebitur, facta terminorum inutilium reductione, æquatio

$$ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$$

Div. per a)

$$C \quad x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3 = 0$$

Valor ipsius x^3 ex hac æquatione C sumptus ponatur in æquatione A, non solum loco secundi termini $-4xa^3$, sed etiam loco primi x^4 (multiplicando $-ax^2 - 4a^2x - 12a^3 \times x$, ut fiat $= x^4$) erit primo $x^4 = -ax^3 - 4a^2x^2 - 12a^3x$; subrogato deinde valore ejusdem x^3 tam pro $-ax^3$ hujus æquationis, quam pro $-4ax^3$ æquationis A (hoc est pro $-5ax^3$) scilicet $5a^2x^2 + 20a^2x + 60a^4$, æquatio prima transformatur in sequentem

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & = -4a^2x^2 - 12a^3x \\
-5ax^3 & \quad +5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4 \\
11a^2x^3 + 20a^3x & \quad +11a^2x^2 - 20a^3x \\
+ 12a^4 & \qquad\qquad\qquad\qquad + 12a^4 \\
\hline
\text{Summa} & \quad 12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4 = 0 \\
\textit{Divid. per } 12a^2) & \quad x^2 - ax + 6a^2 = 0
\end{array}$$

Sumatur ex hac postrema æquatione valor primi termini, erit *per Coroll. cit.* $x^2 = ax - 6a^2$, qui subrogetur ubique in tertia æquatione C, etiam pro primo termino (ducendo $ax - 6a^2 \times x$, ut fiat ad x^3 æqualis) factaque terminorum substitutione, invenitur

$$6a^2x - 6a^2x + 12a^3 - 12a^3 = 0$$

Cumque termini omnes per signa contraria sese destruant, signum est, æquationem $x^2 - ax + 6a^2 = 0$, ex qua terminorum contrarietas ista derivatur, esse communem divisorem maximum datarum æquationum, qualem prorsus in secundo exemplo *Prop. præc.* invenimus.

II. Quæritur divisor communis duarum æquationum, quæ sequuntur *M* & *N*.

$$M \quad x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14\tfrac{1}{2}x + 5 = 0$$

$$N \quad x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0$$

Sumatur ex secunda valor primi termini *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. nempe

$$x^3 = -4x^2 - 8x - 8$$

Quo posito in prima æquatione (multiplicando illum per x, ut fiat ad x^4 æqualis) habetur $2x^2 + 6\tfrac{1}{2}x + 5 = 0$, & multiplicando per 2 ad fractionem eliminandam, erit $4x^2 + 13x + 10 = 0$. Hac divisa per

per 4; oritur æquatio R

$$R \quad x^2 + \frac{13x + 10}{4} = 0$$

Valor hujus x^2 ex hac æquatione R desumptus *per Coroll. cit.* (hoc est $\frac{-13x - 10}{4}$) subrogetur in secunda æquatione N modo jam explicato; invenitur $\frac{49x + 98}{16} = 0$, & dividendo per $\frac{49}{16}$, habetur quotus $x + 2 = 0$, adeoque $x = -2$.

Ponatur demum hic valor in æquatione tertia R, provenit

$$4 - \frac{26 + 10}{4} = 0, \text{ hoc est } \frac{-26 + 26}{4} = 0$$

Proinde arguitur, $x + 2 = 0$, unde ista terminorum oritur oppositio, esse datarum æquationum divisorem communem quæsitum.

SCHOL. *Hoc problema sane ingeniosum, quod* Joh. Huddenius (a) Belga *vir subtilissimus excogitavit, usum quoque habet ad inveniendum communem divisorem duarum quarumcunque quantitatum. Nihil enim obstat, quin illæ considerari possint instar duarum æquationum, & æquari nihilo: imo in illis sumi potest ad libitum pro incognita quæcumque litera, quæ in utraque earum reperiatur. Sic in duabus sequentibus quantitatibus, vel æquationibus* $d^3 - ad^2 + 2a^2b - 2abd = 0$, & $d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$ *sumi potest ad libitum pro in-*

L *co-*

(a) V. in fine Geometr. Renati des Cartes edit. 3. ann. 1683.

cognita d, a, *vel* b; *&* *procedendo eo ordine, quem nos in duobus exemplis sequuti sumus, invenietur communis earum divisor* d — a, *si quidem* d *pro incognita fuerit assumpta.*

CAPUT VII.

De Resolutione Æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

PROPOSITIO I.

Æquationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire.

I. Inveniantur omnes ultimi termini divisores *per Propos. 9. Cap. 1.* ex quibus una cum incognita fiant totidem æquationes simplices, & per illas sigillatim dividatur æquatio: nam quæ exacte, & sine ullo residuo æquationem datam dividet, erit radix rationalis quæsita.

Sit æquatio $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$. Divisores ultimi termini *per Prop. cit.* sunt 1, 2, 4, 8. Quia vero ex mutatione signorum dignoscitur *per num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* radices omnes esse veras; proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt omnes cum signo —, nempe $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x - 2$; quare nec $+ 1$, nec $+ 2$ possunt esse radices quæsitæ. Succedit autem divisio sine ullo residuo per $x - 4$, ut instituta divisione patet.

$x - 4$)

$$\begin{array}{r|l} x-4)\; x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0 & x^2 \\ x^3 - 4xx \qquad\qquad\qquad & -5x \\ \hline 0 - 5xx + 22x \qquad & +2 \\ -5xx + 20x \qquad & \\ \hline 0 + 2x - 8 & \\ +2x - 8 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Est ergo $+4$ una ex radicibus quæsitis, & ex hac divisione oritur æquatio secundi gradus, nempe $xx - 5x + 2 = 0$. Cujus radices ut inveniantur, tentanda non est divisio per $x - 1 = 0$, aut per $x - 2 = 0$. Nam cum per has quantitates tota æquatio ex dictis divisibilis non fuerit, neque una ejusdem pars divisibilis erit.

Tentetur itaque divisio per $x - 4 = 0$, & per $x - 8 = 0$: sed cum neque per hos divisores divisio exacte succedat, signum est, alias duas radices non esse rationales. Quæ tamen obtineri poterunt *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8. eritque altera $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$, per quam si dividatur eadem æquatio secundi gradus $xx - 5x + 2 = 0$, emerget tertia radix quæsita $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

II. Sit alia æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, cujus radices rationales inquiruntur.

Divisores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ex signis autem æquationis propositæ *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. patet, radices fore duas quidem veras, & unam falsam; proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt tam cum signo $+$, quam cum ſigno $-$, hoc eſt $x-1=0$, $x+1=0$, $x-2=0$, $x+2=0$, $x-3=0$, $x+3=0$ &c. Diviſio autem fruſtra tentatur per $x-1$, & per $x+1$. Sed exacte ſuccedit per $x-2$, per $x+3$, & per $x-4$. Sunt ergo radices quæſitæ $+2$, -3, $+4$, ut computanti ſit evidens.

III. Demum ſit æquatio $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$, cujus radices rationales quæruntur.

Ex ſignis æquationis apparet *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. radices tres eſſe veras, & unam falſam. Inveniantur omnes diviſores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. Cum diviſio exacte fieri non poſſit per $x-1$, neque per $x+1$, ſuccedat autem ſine ullo reſiduo per $x-2$: erit $+2$ una ex radicibus veris.

Ex diviſione hujuſmodi oritur æquatio $x^3-2x^2-23x+60=0$, quæ fruſtra dividitur per $x-2$, vel per $x+2$, ſuccedit tamen exacta diviſio per $x-3$. Habetur ergo $+3$ radix vera, & ex diviſione oritur æquatio ſecundi gradus $x^2+1x-20=0$. Cujus unam radicem eſſe veram, alteram falſam, ex ſignis ſatis apparet. Dividatur itaque per $x-4$, diviſio ſuccedit ſine reſiduo, & quotus eſt $+5$; proinde aliæ duæ radices habentur $+4$, -5, una vera, altera falſa.

Schol. *Æquationis diviſionem per tot diviſores tentare ſi cui res moleſta ſit, ſequenti methodo uti poterit, quæ diviſores illos ad pauciores reducit. Cæterum ſi nullus ſit diviſor, qui datam æquationem exacte & ſine ullo reſiduo dividere poſſit, ſignum eſt, nullam dari radicem rationalem, quod notetur.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Radices rationales propius investigare.

I. Sit æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus radices rationales quærimus. Inveniantur *per Prop.* 9. *Cap.* 1. divisores ultimi termini, nempe 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deinde æquationis datæ radices minuantur unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc est fiat $x - 1 = y$, ideoque erit $x = y + 1$, unde

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & = y^3 + 3y^2 & + 3y & + 1 \\ -9x^2 & -9y^2 & -18y & -9 \\ +26x & & +26y & +26 \\ -24 & & & -24 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 6y^2 & + 11y & - 6 = 0 \end{array}$$

Divisores ultimi termini hujus secundæ æquationis sunt 1, 2, 3, 6. Cum autem radices hujus deficiant unitate a radicibus datæ æquationis, hæ, addita unitate, fient æquales prioribus, hoc est

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = 2 \\ 2 + 1 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \\ 6 + 1 = 7 \end{array}$$

Ex omnibus itaque divisoribus ultimi termini primæ æquationis, nempe 24, illi tantum seligantur, qui cum his convenire, & utrique æquationi communes esse reperiuntur, scilicet 2, 3, 4; nam 7 non reperitur inter divisores primæ æquationis. Ecce tibi tres tantum divisores, seu melius tres radices (pauciores enim esse non possunt *per num.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6.) datæ æquationis.

II. Quod si æquatio data radices habeat partim veras, partim falsas; divisores ultimi termini æquationis transformatæ & augeri & minui debent ea quantitate, qua minuta fuit radix æquationis propositæ, ut detegantur radices tam veræ, quam falsæ. Exemplo res fit clarissima.

Sit æquatio $x^4 * - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, quæ duas habet radices veras $+2$, $+3$, & duas falsas -4, -1, quæ tamen supponuntur non cognitæ. Minuatur æquatio unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc est, fiat $x - 1 = y$, erit $x = y + 1$; proinde

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\
-15x^2 & \qquad\qquad - 15y^2 - 30y - 15 \\
+10x & \qquad\qquad\qquad\quad + 10y + 10 \\
-24 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 24 \\
\hline
\text{Summa} & y^4 + 4y^3 - 9y^2 - 16y + 20 = 0
\end{array}$$

Radices veræ hujus æquationis deficiunt unitate a radicibus veris æquationis datæ *per Cor.* 2. *Prop.* 4. *Cap.* 6. Contra vero radices falsæ erunt unitate majores. Itaque divisores ultimi termini 20 (inter quos quæsitæ radices latent) si augeantur unitate, fient æquales radicibus veris datæ æquationis. Contra vero si minuantur unitate, fient æquales radicibus falsis ipsius æquationis datæ. Divisores ultimi termini sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 *per Prop.* 9. *Cap.* 1. qui unitate aucti fiunt 2, 3, 5, 6, 11, 21. Conferantur cum divisoribus ultimi termini æquationis datæ, hoc est 24; nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; tres tantum utrique æquationi communes inveniuntur, scilicet 2, 3, 6. Ex quibus duæ sunt radices veræ quæsitæ, hoc est 2 & 3. Minuti vero unitate sunt 0, 1, 3, 4, 9, 19, qui si conferantur cum divisoribus æquationis datæ, nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; inveniuntur, tres tantum cum his convenire, scilicet 1, 3, 4, ex quibus habentur duæ radices falsæ quæsitæ -1, -4.

Co-

COROLL. *Redactis hoc pacto ad paucissimos ultimi termini divisoribus, facile inveniuntur radices rationales, vel dividendo per illos datam æquationem, ut in propositione antecedente factum est; vel illos substituendo in æquatione proposita loco incognitæ, ut docuimus* in Prop. 1. Cap. 6. num. 5. *Ratio autem hujus methodi fundatur* in Coroll. 1. & 2. Prop. 4. Cap. 6.

SCHOL. *Hujus inventi laudem* Jacobo a Waessenaer *Ultrajectino egregio Geometræ* Franciscus a Schooten (a) *acceptam refert*.

PROPOSITIO III.

Idem problema in æquationibus literalibus.

SIt æquatio ex literis composita, cujus radices rationales inquiruntur,

$$\begin{array}{llll} x^3 - ax^2 & - abx & + abd & = 0 \\ \quad + bx^2 & + adx & & \\ \quad - dx^2 & - bdx & & \end{array}$$

I. Cum singulæ radices appareant in secundo termino sub signo contrario *per num.* 2. *Prop.* 1. *Cap.* 6. tentari debet divisio per $x - a = 0$, aut per $x + b = 0$; quæ cum exacte, & sine ullo residuo succedat, patet radices datæ æquationis esse $+ a$, $- b$, $+ d$.

II. Quod si æquatio sit magis composita, fiat æquatio ex singulis terminis, in quibus sunt eædem literæ, & supponantur æquales zero *per Cor.* 2. *Prop.* 2. *Cap.* 6. ut sic obtineri possit incognitæ valor. Exemplo res fit clarior. Sit data æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2ax^2 & + a^2x & - abb & = 0 \\ \quad - bx^2 & + abx & - b^3 & \\ & + bbx & & \end{array}$$

(a) Comment. in lib. III. Geometr. Cartes. p. m.

Fiat æquatio ex omnibus terminis, in quibus reperitur quantitas bb, & supponatur æqualis zero, ideſt $bbx - abb - b^3 = 0$. Hæc dividatur per bb, quotus $x - a - b = 0$ eſt diviſor, per quem ſi dividas æquationem datam, nihil remanet; proinde $a + b$ eſt una ex illius radicibus: & ex diviſione oritur æquatio ſecundi gradus $x^2 - ax + bb = 0$, cujus radices facile erit invenire *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8.

III. Sit demum æquatio, cujus radices rationales quæruntur

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

Fiat æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur quantitas abd, eos ſupponendo æquales zero, nempe $- abdx + abcd = 0$, erit $abdx = abcd$, & $x = c$.

Dividatur æquatio propoſita per $x - c = 0$, nihil remanet; proinde $+ c$ eſt una ex illius radicibus. Diviſa autem ipſamet data æquatione per $x - c = 0$, oritur æquatio tertii gradus, quæ ſequitur.

$$\begin{array}{lll} x^3 - ax^2 & + abx & - abd = 0 \\ - bx^2 & + adx & \\ - dx^2 & + bdx & \end{array}$$

Fiat iterum æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur ad, eos ſupponendo æquales zero, hoc eſt $adx - abd = 0$; erit $x = b$: & cum diviſio, quæ tentatur per $x - b = 0$, exacte ſuccedat; habetur ſecunda radix datæ æquationis, eademque ratione reliquæ duæ obtineri poſſunt.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Alia methodus æquationes compositas resolvendi.

INvenienda sunt radices æquationis propositæ, nempe

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd = 0 \\ & -bx^3 & +acx^2 & -abdx & \\ & -cx^3 & +adx^2 & -acdx & \\ & -dx^3 & +bcx^2 & -bcdx & \\ & & +bdx^2 & & \\ & & +cdx^2 & & \end{array}$$

Primo dividatur æquatio in duas æquationes, quarum altera contineat omnes terminos, in quibus quantitas c reperitur, altera reliquos: erit

$$\begin{array}{llllll} 1.^a & -cx^3 & +acx^2 & -abcx & +abcd = 0 \\ & & +bcx^2 & -acdx & \\ & & +cdx^2 & -bcdx & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 2.^a & x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abdx = 0 \\ & & -bx^3 & +adx^2 & \\ & & -dx^3 & +bdx^2 & \end{array}$$

Patet, primam dividi posse per quantitatem c, secundam per x: quo facto, habetur

$$\begin{array}{llllll} 1.^a & -x^3 & +ax^2 & -abx & +abd = 0 \\ & & +bx^2 & -adx & \\ & & +dx^2 & -bdx & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 2.^a & x^3 & -ax^2 & +abx & -abd = 0 \\ & & -bx^2 & +adx & \\ & & -dx^2 & +bdx. & \end{array}$$

Harum prima per secundam exacte dividitur, ut patet, & quotus est -1; unde apparet, haberi ex hac secunda æquatione divisorem exactum primæ.

Per

Per hanc si æquatio proposita dividatur, habebitur $x - c = 0$, una scilicet ex radicibus quæsitis. Restat autem æquatio ipsa ad gradum inferiorem depressa, scilicet

$$\begin{array}{llll} x^3 & - ax^2 & + abx & - abd = 0 \\ & - bx^2 & + adx & \\ & - dx^2 & + bdx & \end{array}$$

Hæc similiter dividatur in duas alias æquationes, in quarum una sint termini, in quibus quantitas b reperitur, in alia reliqui, erit

$$\begin{array}{lllll} 1.^a & & - bx^2 & + abx & - abd = 0 \\ & & & + adx & \\ 2.^a & x^3 & - ax^2 & + adx = 0 & \\ & & - dx^2 & & \end{array}$$

Dividatur prima per b, secunda per x; erit

$$\begin{array}{lllll} 1.^a & & - x^2 & + ax & - ad = 0 \\ & & & + dx & \\ 2.^a & x^2 & - ax & + ad = 0 & \\ & & - dx & & \end{array}$$

Quarum prima per secundam exacte dividitur: nam quotus est -1, & nihil remanet. Per hanc secundam igitur dividatur superior tertii gradus; habebitur $x - b$ pro secunda vera radice datæ æquationis: & remanet æquatio secundi gradus, videlicet

$$\begin{array}{lll} x^2 & - ax & + ad = 0 \\ & - dx & \end{array}$$

Quæ similiter divisibilis est in alias duas, nimirum

$$- ax + ad = 0, \ \& \ x^2 - dx = 0$$

Harum una divisa per a, altera per x, habentur $-x + d = 0$, & $x - d = 0$; ex quibus prima cum

sit

ſit exacte diviſibilis per ſecundam (nam quotus eſt — 1, & nihil remanet) dividi per hanc poterit æquatio ſuperior ſecundi gradus, nempe

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ad = 0 \\ \quad\;\; - dx \end{array}$$

atque erit $x - d$ tertia radix quæſita: quarta autem $x - a$, facta diviſione, habetur ex quoto.

COROLL. I. *Vel ex hoc uno exemplo apparet, methodum in eo eſſe: 1.° ut æquatio propoſita in duas dividatur æquationes, quarum quælibet contineat terminos iiſdem fere literis conflatos: 2.° ut dividendo per qnantitatem, quæ in illis communiter reperitur, earum æquationum terminos, ad inferiorem gradum æquationes illæ degrimantur: 3.° ut obſervetur, an una æquatio per alteram ſit exacte & ſine ullo reſiduo diviſibilis. Nam tunc illa erit communis menſura, hoc eſt dividere poterit non ſolum illam æquationis partem, ſed etiam totam æquationem datam, & aliquam ex illius radicibus exhibere. Ratio eſt, quia quantitas, quæ exacte dividit partes, etiam totum dividat, neceſſe eſt. Cæterum æquatio propoſita dividi poterat in duas alias alio, vel alio mode, ac a nobis factum eſt, ut conſideranti patebit.*

COROLL. II. *Quod ſi non omnes æquationis datæ radices hac ratione inveniri poſſint, indicio eſt, reliquas eſſe irrationales, de quibus inferius.*

PROPOSITIO V.

Æquationes compoſitas, in quibus duæ, vel plures radices ſunt æquales, reſolvere.

I. SI data æquatio duas æquales radices habere ſupponitur, muliplicetur per quamcumque progreſſionem Arithmeticam, hoc eſt primus terminus æquationis per primum terminum progreſſionis, ſecundus terminus per ſecundum &c. & productum, quod

inde

inde fit, erit $= 0$, ſicuti æquatio ipſa data ſupponitur $= 0$. Deinde inveniatur æquationum duarum, datæ & productæ, communis diviſor *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem diviſa ipſamet æquatio data, quoties opus ſit, exhibebit radices æquales. Sit æquatio

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & -5x^2 & +8x & -4 & = 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 3x^3 & -10x^2 & +8x & -0 & = 0 \end{array}$$

Hæc diviſa per x fit uno gradu inferior, nempe

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Diviſor autem communis hujus & datæ æquationis eſt $x - 2 = 0$ *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem data æquatio bis diviſa dat radices 2, 2, 1.

II. Poterat autem eadem æquatio per progreſſionem Arithmeticam alio, vel alio modo multiplicari, ſcilicet

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & -5x^2 & +8x & -4 & = 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & -5x^2 & +16x & -12 & = 0 \end{array}$$

Hujus enim & propoſitæ æquationis communis diviſor eſt, ut antea, $x - 2 = 0$.

III. Similiter ſi ſecundum terminum auferre libeat, ita progreſſio Arithmetica diſponitur.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & -5x^2 & +8x & -4 & = 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \\ \hline x^3 & * & -8x & +8 & = 0 \end{array}$$

Cujus quidem æquationis & datæ communis diviſor ſemper reperitur $x - 2 = 0$.

IV. Si æquatio data tres habeat radices æquales, bis multiplicentur ejus termini per terminos progreſſionis Arithmeticæ, ut ſupra: ſi habeat quatuor radi-

di-

dices æquales, ter multiplicentur: si quinque radices æquales, quater &c. Sit æquatio, quæ tres radices æquales habere supponitur.

$$\begin{array}{l} x^4 \ * - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \\ 0 \ \ 1 \quad\ 2 \quad\ \ 3 \quad\ 4 \\ \hline 0 \ * - 12x^2 + 24x - 12 = 0 \\ \quad\ \ 0 \qquad\ 1 \qquad\ 2 \\ \hline 0 + 24x - 24 = 0 \end{array}$$

Communis divisor est $x - 1$; per quem si ter dividatur æquatio proposita, quotus dabit tres radices æquales $+1$, $+1$, $+1$. Quarta vero (cum in æquatione secundus terminus desit) erit -3 *per Prop.* 1. *Cap.* 6. *num.* 4.

Demonstr. Per progressionem Arithmeticam æquatio data in aliam convertitur, quæ continet easdem radices æquales una minus. Nam ut superiora exempla docent, ea potissimum progressio assumitur, quæ vel incipit a zero, vel desinit in zerum, ut æquatio, quæ inde producitur, fiat uno gradu inferior, ideoque radicum numerus decrescit, fitque una radice minor. Per iteratas autem ejusmodi multiplicationes ad eam æquationem devenitur, in qua una tantum æqualium radicum continetur: proinde si hujus & propositæ æquationis communis divisor inveniatur, ille æqualium radicum unam dabit.

COROLL. I. *Manifestum est, hac ratione tolli posse ex æquatione data terminum, quem quis voluerit, collocando sub eo zerum, ut allata exempla docent.*

COROLL. II. *Si communis divisor nullo modo reperiri possit, tunc infertur, radices æquales esse irrationales, quæ non sunt hujus loci.*

SCHOL. I. *Communis divisor non est necesse, ut inveniatur inter æquationem datam & æquationem ex Arithmetica progressione productam, ut in primo exemplo factum est:*

est: sed commodius aliquando sumitur inter duas æquationes productas, ut inter $3x^2 - 10x + 8 = 0$, *&* $-5x^2 + 16x - 12 = 0$, *quæ habentur in eodem primo exemplo, quarum divisor communis est* $x - 2$, *ut prius*.

Schol. II. *Pulcherrimum hoc problema, quod* Johanni Huddenio (a) *Belgæ acerrimi ingenii viro debemus, quanti sit usus in Geometria sublimiori pro ducendis Tangentibus, pro determinandis quæstionibus de Maximis, & Minimis, aliisque pluribus, satis intelliget, qui ad eam gradum faciet.*

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

I. Si æquationum radices inveniri nequeant per ea, quæ in Capite præcedenti explicavimus, signum erit, radices irrationales, vel etiam imaginarias in illis contineri, aliaque via resolutionem illarum esse ineundam. Proinde regulas peculiares pro æquationibus ejusmodi trademus a *quadraticis* incipiendo; quæ si fractionibus, aut radicalibus implicentur, prius ab illis expediri debent per ea, quæ docuimus *in Prop.* 2. 8. *&* 9. *Cap.* 6.

PROPOSITIO I.

Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.

I. Si æquatio *quadratica* sit pura, ut $x^2 = ab$, extracta hinc inde secunda radice, habetur valor quæsitus, nempe $x = \sqrt{ab}$. Eadem ratione $x^2 = 14400$, extracta pariter radice, erit $x = \sqrt{14400}$: & si per communem Arithmeticam actu radix extrahatur, habetur $x = 120$.

II. Si

(a) De reductione æquat. Reg. x. in fine Geom. Cartes. pag. m. 433.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 + ax = b^2$, regula hæc erit: ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe ex $\frac{1}{2}a$, fiat quadratum $\frac{1}{4}aa$, quod utrique membro æquationis addatur, ut potentia fiat completa, unde radix secunda extrahi possit. Ecce exemplum. Sit æquatio data

$$x^2 + ax = bb$$

Adde $\quad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = bb + \frac{1}{4}a^2$$

Extr. rad. $\quad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2}$

$$x = \sqrt{bb + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Sit aliud exemplum $x^2 - 3ax = b^2$. Fiat ex dimidio coefficientis $\frac{3}{2}a$ quadratum $\frac{9}{4}a^2$, quod utrimque addatur, erit

$$x^2 - 3ax = b^2$$

Adde $\quad \frac{9}{4}a^2 \quad \frac{9}{4}a^2$

$$x^2 - 3ax + \frac{9}{4}a^2 = b^2 + \frac{9}{4}a^2$$

Extr. rad. $\quad x - \frac{3}{2}a = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2}$

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4}a^2} + \frac{3}{2}a$$

Demonstratio ex ipsa potentiæ secundæ genesi emanat. Nam in binomio ad potentiam secundam elevato quantitas secundi termini est duplum facti ex utra-

utraque binomiæ radicis parte. Cum igitur habeatur (in primo exemplo) x pars una, erit $\frac{1}{2}$ a pars altera radicis, ex qua potentia secunda completur.

COROLL. *Hinc patet, in ejusmodi æquationibus radicem secundam obtineri, accipiendo summam, vel differentiam radicum primi & tertii termini potentiæ completæ. Accipitur summa, cum omnes termini sunt positivi, ut* $x + \frac{1}{2}a$ *in primo exemplo; differentia vero, si secundus terminus sit negativus, ut* $x - \frac{3}{2}a$ *in secundo exemplo.*

SCHOL. I. *Æquationes affectæ secundi gradus resolvuntur etiam facillime, sublato secundo termino per* Prop. 5. Cap. *6. Sit enim eadem æquatio resolvenda* $x^2 - 3ax = b^2$, *seu* $x^2 - 3ax - b^2 = 0$. *Ut tollatur secundus terminus, fiat* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit*

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 + 3ay + \frac{9}{4}a^2 \\ -3ax & \quad\;\; - 3ay - \frac{9}{2}a^2 \\ -b^2 & \qquad\qquad\quad - b^2 \\ \hline & y^2 \quad * \quad - \frac{9}{4}a^2 - b^2 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y^2 = \frac{9}{4}a^2 + b^2$, *& extracta radice*, $y = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. *Ponatur hic valor loco* y *in æquatione* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit* $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ *omnino ut prius.*

SCHOL.

SCHOL. II. *Omnis æquatio quadratica duas habet radices, alteram affirmativam, negativam alteram. Nam quadratum quodlibet, v. g.* 25, *tam oritur ex* 5×5, *quam ex* -5×-5. *Proinde si fuerit æquatio* $x^2 = ab$, *valor erit* $x = \pm \sqrt{ab}$, *hoc est valor ipsius* x *tam habetur per radicem positivam* $+\sqrt{ab}$, *quam per negativam* $-\sqrt{ab}$. *Sic etiam in exemplo superiori* Schol. 1. *radix positiva est* $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$, *negativa vero* $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. *Quod adeo certum est, ut si alterutra ponatur in æquatioue data loco* x, *termini omnes evanescunt, proinde utraque est vera radix* per num. 5. Prop. 1. Cap. 6. *Brevitatis autem gratia utrumque signum apponunt, unum sub alio* $\pm$. *Quod pro iis, quæ dicenda sunt, notetur.*

PROPOSITIO II.

Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.

SIt æquatio generalis $x^2 + 2px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes secundi gradus, ita ut $+ 2p$ repræsentet coefficientem secundi termini cum suo signo, & $+ q$ ultimum terminum cum suo pariter signo, ut explicavimus *in Coroll.* 1. *Prop.* 2. *Cap.* 6. Summa radicum ejusdem æquationis sit $= 2f$, earumque differentia $= 2g$; erit radix major $f + g$, minor vero $f - g$ per *Theor.* 3. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Cumque utraque sit unus valor ipsius incognitæ x, erit $x = f + g$, & $x = f - g$. Fiant igitur (mutatis signis) æquationes simplices $x - f - g = 0$, & $x - f + g = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio

$$x^2 - 2fx + ff = 0$$
$$ - gg$$

Quæ ex suppositione æqualitatis radicum erit æqualis æquationi $x^2 + 2px + q = 0$. Fiat ergo terminorum comparatio (neglecto primo utriusque termino (erit $-2f = 2p$; unde habetur $f = -p$, & $ff = p^2$. Item $ff - gg = q$, seu $gg = ff - q$, & ponendo p^2 loco ff, erit $gg = p^2 - q$, extractaque radice habetur $g = \sqrt{p^2 - q}$.

Determinato ita valore ipsarum f & g, erit radix major $f + g = -p + \sqrt{p^2 - q}$, minor vero $f - g = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

COROLL. *Hinc habentur quatuor illæ formulæ generales pro æquatione quacunque secundi gradus resolvenda, de quibus in sequenti Propositione.*

PROPOSITIO III.

Æquationes secundi gradus per formulas generales resolvere.

I. ÆQuationes secundi gradus affectæ quatuor modis ratione signorum variari possunt, ideoque quatuor formulis generalibus exprimi solent, in quibus $2p$ semper denotat quantitatem cognitam secundi termini, q vero quantitatem cognitam tertii, videlicet

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 - 2px - q = 0 \\ \text{II.} & x^2 + 2px - q = 0 \\ \text{III.} & x^2 + 2px + q = 0 \\ \text{IV.} & x^2 - 2px + q = 0 \end{array}$$

II. Reperto valore incognitæ x per *Prop. antec.* habenbentur sequentes formulæ generales cum duplici signo $\pm$ ob duplicem radicem affirmativam & negativam ex dictis *in Schol.* 2. *Prop. hujus*.

$$\text{I.}\quad x = p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

$$\text{II.}\quad x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

$$\text{III.}\quad x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$\text{IV.}\quad x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

1. Proposita sit igitur æquatio secundi gradus resolvenda $x^2 - 10x - 6 = 0$.

Ex signis statim apparet, hanc æquationem pertinere ad primam formulam, $x^2 - 2px - q = 0$. Comparentur mutuo termini, erit $2p = 10$, & $p = 5$: item $q = 6$. Est autem radix primæ formulæ generalis $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, in qua si ponantur loco p & q earum valores, erit $x = 5 + \sqrt{25 + 6}$, seu $x = 5 + \sqrt{31}$. Altera ejusdem formulæ radix $x = p - \sqrt{p^2 + q}$, hoc est $x = 5 - \sqrt{31}$.

2. Sit æquatio $x^2 + 1x - 2 = 0$, quæ, ut ex signis liquet, pertinet ad secundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Fiat comparatio terminorum, erit $2p = 1$, unde $p = \frac{1}{2}$, & $q = 2$. Radix formulæ secundæ est $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, ideoque positis loco p & q earum valoribus, habetur $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$, seu $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$. Altera radix ejusdem formulæ est $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$, proinde $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$.

 3. Sit

3. Sit æquatio $x^2 + 4x + 6 = 0$ pertinens ad tertiam formulam, ut ex signis patet, $x^2 + 2px + q = 0$. Comparando terminos utriusque, erit $2p = 4$, & $p = 2$, item $q = 6$. Radix autem generalis ejusdem formulæ est $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$: substitutis in ea valoribus p & q, erit $x = -2 + \sqrt{4-6}$, seu $x = -2 + \sqrt{-2}$. Altera radix erit $x = -2 - \sqrt{-2}$. Hinc apparet, propositæ æquationis radices esse imaginarias.

4. Sit æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, quæ ad quartam formulam spectat propter signorum similitudinem, nempe ad $x^2 - 2px + q = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $2p = 6$, & $p = 3$, item $q = 8$; quibus valoribus p & q positis in formula radicis generalis $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, erit una radix $x = 3 + \sqrt{9-8}$, seu $x = 3 + \sqrt{1}$; altera vero $x = 3 - \sqrt{1}$; vel una $x = 4$, altera $x = 2$; ambæ sunt positivæ.

COROLL. *Contingit non semel, ut tertiæ & quartæ formulæ radices sint imaginariæ, cum scilicet* q *major est, quam* p^2, *ut supra in tertio exemplo, quod solutioni problematum nihil obstat. Idem quoque accidit, si in æquatione desit secundus terminus, tertius autem sit cum signo* $+$, *ut* $x^2 + q = 0$. *Nam una radix erit* $x = -\sqrt{-q}$, *altera* $x = +\sqrt{-q}$, *proinde ambæ imaginariæ. Cæterum ubi ultimus æquationis terminus signo negativo afficitur, radices semper sunt reales, ut ex prima & secunda formula apparet.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.

I. ÆQuationes tribus tantum terminis constantes, quarum primus ad quatuor, ad sex, & ad altiores quoque dimensiones ascendit, & in quibus exponentes terminorum incognitorum habent inter se & zero eamdem differentiam, hoc est sunt in eadem proportione Arithmetica, ut 4, 2, 0, vel 6, 3, 0 &c. dicuntut æquationes *derivativæ secundi gradus*, & resolvuntur similiter, ac ipsæmet secundi gradus æquationes; ut, quæ afferuntur exempla, docent.

Sit æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$. Pone $x^2 = y$, erit $x^4 = y^2$, unde oritur $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ si resolvatur per primam formulam generalem *Prop. antec.* habetur $y = 3 + \sqrt{13}$.

Quia vero posita fuit $x^2 = y$, erit $x = \sqrt{y}$, adeoque $x = \sqrt{3 + \sqrt{13}}$.

II. Sit æquatio $x^6 + 4x^3 - 12 = 0$. Pone $x^3 = y$, erit $x^6 = y^2$, unde oritur $y^2 + 4y - 12 = 0$. Quæ si resolvatur per formulas generales *Prop. ant.*, cum ratione signorum pertineat ad secundam formulam, erit valor ipsius $y = -2 + \sqrt{16}$, seu $y = 2$. At vero cum posita fuerit $x^3 = y$, erit $x = \sqrt[3]{y}$, hoc est $x = \sqrt[3]{2}$.

Hæc omnia ex solutione problematum, quæ sequuntur, clarius elucescent.

PROBL. I.

Invenire quadratum, cui si addatur ejus radix, fiat æquale unitati.

SIt quæsiti quadrati latus $= x$, erit per conditionem problematis æquatio

$$xx+x=1$$

per Prop. 1. *adde* $\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$

$$xx+x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Extr. radix $x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$

$$x=\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}$$

$$xx=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}$$

adde $x=+\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}$

$$xx+x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum ſumma a ſumma quadratorum, quæ ex ipſis fiunt, ſubtracta relinquit 78; *addita vero ad eorum factum efficit* 39.

SIt numerorum quæſitorum ſumma $=2x$, eorumque differentia $=2y$, erit major $=x+y$, minor $=x-y$ *per Coroll. Theor.* 3. *Cap.* 5. Sit vero $b=39$, erunt $2b=78$.

Si fiant quadrata, & ex eorum ſumma $2x^2+2y^2$ auferatur ſumma numerorum $2x$; erit per primam problematis conditionem æquatio

$$2x^2+2y^2-2x=2b$$

Div. per 2) $x^2+y^2-x=b$

Quod ſi ad factum eorumdem numerorum x^2-y^2 addatur eorum ſumma $2x$; oritur ex ſecunda problematis conditione æquatio altera

$$x^2-y^2+2x=b$$

Prop. 2. *Cap.* 5. $x^2+y^2-x=b$

$$2x^2+1x=2b$$

Div. per 2) $x^2+\frac{1}{2}x-b=0$

Hæc

Hæc autem finalis æquatio pertinet ad secundam formulam generalem *Propos*. 3. *hujus*, ex qua habetur radix $x = -p + \sqrt{p^2 + q} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 39} = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$. Nam $p = \frac{1}{4}$, & $q = b = 39$.

Valor autem ipsius y innotescit ex prima æquatione $x^2 + y^2 - x = b$, ex qua $y^2 = b - x^2 + x$; proinde substituto valore modo invento pro x & x^2, habetur $y^2 = 39 - 36 + 6 = 9$, unde $y = 3$, $x + y = 9$, & $x - y = 3$.

SCHOL. Clavius (a) *putavit hoc problema, quod ipse ænigma vocat, difficillimum; pro cujus solutione ipsemet Geometriæ opem implorat, contenditque, illud sine Geometria vix, aut nullo modo solvi posse. Quod quidem de Algebra* Numerosa, *quæ id temporis obtinebat, fortasse verum. Cæterum quam facile nunc* per Speciosam *a summis viris* Vieta & Cartesio *inductam hujusmodi problema sine Geometria resolvatur, jam vidimus. Atque hinc apparet, quanta sit hujus supra illam utilitas & præstantia.*

PROBL. III.

Invenire tres numeros in proportione Arithmetica, quorum primus si multiplicetur per 1, *secundus per* 2, *& tertius per* 3; *producta sint æqualia numero dato* 30, *quadrata vero, quæ ex ipsis numeris fiunt, æqualia sint numero* 66.

Pone numerum datum $30 = a$, $66 = b$, & tres numeri quæsiti vocentur A, B, C. Sit primus quæsitorum $A = x$, tertius $C = y$, eorum summa $x + y$, si bifariam dividatur, dabit *per Coroll. Theor.* 1. *Cap.* 5. numerum secundum $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Sunt autem ex prima problematis conditione

(a) V. Algeb. Cap. XXXI. Ænigma 58. p. m. 343.

$$A \quad x \times 1 = x$$
$$B \quad \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y \times 2 = x + y$$
$$C \quad y \times 3 = 3y$$

$$A + B + C = 2x + 4y = a$$

Proinde $2x = a - 4y$

$$x = \tfrac{1}{2}a - 2y \; (= A)$$
$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}a - y$$

Positoque hoc valore in quantitate $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \; (= B)$ erit $B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y$.

Sunt ergo tres numeri quæsiti

$$A = \tfrac{1}{2}a - 2y$$
$$B = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}y$$
$$C = y \; (\text{nam } 2B - A = C = y)$$

Eorumque quadrata erunt

$$AA = 4y^2 - 2ay + \tfrac{1}{4}aa$$
$$BB = \tfrac{1}{4}y^2 - \tfrac{1}{4}ay + \tfrac{1}{16}aa$$
$$CC = yy$$

Summa $= 5\frac{1}{4}y^2 - 2\frac{1}{4}ay + \frac{5}{16}aa = b$

$$21y^2 - 9ay + 1\tfrac{1}{4}aa = 4b$$

Divid. per 21 $\quad y^2 - \frac{3}{7}ay + \frac{5}{84}aa = \frac{4}{21}b$

Et substitutis loco a & b numeris datis, erit

y^2

$$y^2 - 12\frac{6}{7}y + 53\frac{4}{7} = 12\frac{4}{7}$$

Subtr. $53\frac{4}{7} \quad 53\frac{4}{7}$

$$y^2 - 12\frac{6}{7}y = -41$$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* invenietur $y = 7$; proinde innotescent reliqui

$$A = \frac{1}{2}a - 2y = 1$$

$$B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y = 4$$

$$C \quad = y = 7$$

PROBL. IV.

Datum numerum 26 in tres partes continuo proportionales geometrice dividere, ut quadratum mediæ æquetur duplo facti mediæ & minimæ, & præterea sextuplo ejusdem minimæ.

Pone numerum datum dividendum $26 = a$, & sit trium proportionalium minima $= x$, media $= y$; erit maxima $= a - x - y$. Cum autem factum maximæ & minimæ sit æquale quadrato mediæ *per Theor.* 5. *Cap.* 5. erit

$$ax - xx - xy = y^2$$

sed ex conditione problematis $y^2 = 2xy + 6x$; ergo

$$ax - xx - xy = 2xy + 6x$$

Div. per x $\quad a - x - y = 2y + 6$

Hinc habentur tres partes proportionales

$$\begin{array}{r} 2y + 6 \\ + y \\ + x \\ \hline \end{array}$$

Summa $\quad 3y + x + 6 = a$

Di-

$$3y = a - x - 6$$

Divid. per 3 $\quad y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x - 2$

Ponatur brevitatis causa loco a numerus datus 26, erit

$$y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$y^2 = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

Cui æqualis supponitur $2yx + 6x$. Substituto proinde in hac quantitate pro $2y$ ejus valore, oritur æquatio

$$-\frac{2}{3}x^2 + 19\frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

Subtr. $\quad \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x \qquad \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x$

$$-\frac{7}{9}x^2 + 23\frac{7}{9}x = 44\frac{4}{9}$$

Mult. per 9 $\quad -7x^2 + 214x = 400$

Divid. per 7 $\quad x^2 - 30\frac{4}{7}x = -57\frac{1}{7}$

Hinc *per Propos.* 1. *vel* 3. *hujus* innotescet $x = 2$, y $\left(= -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}\right) = 6$, & pars maxima $= 18$. Quæ simul conficiunt numerum 26.

PROBL. V.

Datis duobus numeris, duos alios invenire, inter quos datorum alter sit geometrice, alter arithmetice proportionalis.

Sit ex datis numeris alter $= a$, alter $= b$; quæsitorum primus $= x$, secundus $= y$: erit per primam problematis conditionem

$$x . a :: a . y$$

Theor.

Theor. 4. *Cap.* 5. $xy = aa$, & $x = \frac{aa}{y}$

Similiter per secundam problematis conditionem erit

$x \,.\, b \,\because\, b \,.\, y$

Theor. 1. *Cap. cit.* $x + y = 2b$, hinc $x = 2b - y$

Et (ob $x = \frac{aa}{y}$) $\frac{aa}{y} = 2b - y$

Multiplic. per y $\quad aa = 2by - yy$

$yy - 2by = -aa$

Prop. 1. *hujus adde* $\quad b^2 \quad b^2$

$yy - 2by + b^2 = b^2 - aa$

Extr. rad. $\quad y - b = \sqrt{b^2 - a^2}$

$y = b + \sqrt{b^2 - a^2}$

$x (= 2b - y) = b - \sqrt{b^2 - a^2}$

Sit $a = 3$, $b = 5$; erit $y = 5 + \sqrt{25 - 9} = 5 + 4 = 9$, & $x = 5 - \sqrt{25 - 9} = 5 - 4 = 1$. Inventi sunt ergo 1 & 9, inter quos datorum alter 3 mediat geometrice, alter 5 arithmetice.

Sit $a = 4$, $b = 5$; erit $y = 8$, $x = 2$: habentur ergo 2 & 8, inter quos unum datorum 4 est medius geometrice proportionalis, alter 5 est medius arithmetice.

PROBL. VI.

Duo Mercatores societatem ineunt. Primus summam nescio quam posuit, & mansit in societate menses 12: alter posuit aureos 30, quos in societate reliquit mensibus 17. Invenerunt, lucrum esse aureorum 18 $\frac{3}{4}$. Primus pro pecunia in sortem collata una cum lucro habuit aureos 26: quæritur quantum ipsemet primus posuerit?

Esto summa a primo posita $= x$, tempus, seu menses $12 = a$: summa alterius $30 = b$, menses

ſes 17 $= c$; erit ſumma primi cum ſuo tempore $= ax$, ſumma alterius cum tempore $= bc$, & utriuſque ſumma $= ax + bc$. Lucrum ex ſocietate factum ſit $= d$. Sors autem primi cum lucro eſt 26 $= f$. Ut innoteſcat lucrum primi, fiat

Cor. 1. *Theor.* 4. *Cap.* 4. $\quad ax + bc . d :: ax . \frac{adx}{ax + bc}$

Cui ſi addatur pecunia ab ipſo in ſortem collata, nempe x, habetur æquatio

$$x + \frac{adx}{ax + bc} = f$$

Et ad tollendas fractiones multiplicando per $ax + bc$, habetur

$$axx + bcx + adx = afx + bcf$$

Propoſ. 2. *Cap.* 6. $\quad axx + bcx = bcf$
$\quad + adx$
$\quad - afx$

Poſitis autem numeris determinatis loco a, b, c, & f, erit

$$12x^2 + 423x = 13260$$

Divid. per 12 $\quad x^2 + 35\frac{1}{4}x = 1105$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* invenitur $x = 20$ pro pecunia a Mercatore primo poſita.

SCHOL. *Hoc problema fuit Florentiæ publice propoſitum ann.* 1653. *Cumque diu inſolutum remanſiſſet, ubi ad notitiam* Caroli Rinaldini *illud venit, fuit ab eodem ſtatim reſolutum, ut ipſe teſtatur in Arte Analytica Mathematum pag.* 526. *Expedita tamen magis hæc noſtra ſolutio eſt.*

Pro-

Problemata Geometrica.

PROBL. I.

Datis in triangulo rectangulo perpendiculari AB, & aggregato hypothenusæ ac basis AC + BC, hypothenusam & reliquum latus invenire. Fig. 1.

Sit perpendicularis $Ab = a$, aggregatum hypothenusæ ac basis $AC + BC = b$, & $AC = x$: erit $BC = b - x$; proinde *per* 47. *l.* 1. *Eucl.*

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$
$$b^2 - 2bx + a^2$$
$$2bx = a^2 + b^2$$
$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b} = AC$$

$$BC\ (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

SCHOL. *Ex æquatione ultima problematum erui possunt regulæ arithmeticæ, quarum aliquas ad cæterarum exemplum hic subjicimus.*

Regula Arithm. 1. Summa quadratorum perpendicularis (a^2) & aggregati hypothenusæ & basis (b^2) dividatur per duplum ejus aggregati ($2b$); quotus dabit hypothenusam AC.

Regula Arithm. 2. Ex quadrato aggregati hypothenusæ & basis (b^2) subtrahe quadratum perpendicularis (a^2), & residuum ($b^2 - a^2$) divide per duplum ejusdem aggregati ($2b$); quotus dabit basim BC.

PRO-

PROBL. II.

Datis in triangulo rectangulo basi BC, *&* *aggregato hypothenusæ & perpendicularis* AC + AB, *hypothenusam & perpendicularem invenire*. Fig. 1.

Sit basis $BC = a$, aggregatum hypothenusæ & perpendicularis $AC + AB = b$, hypothenusa vero $AC = x$, erit $AB = b - x$, *&* *per* 47. *l.* 1. *Eucl.* habetur in terminis analyticis

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$
$$b^2 - 2bx + a^2$$
$$2bx = a^2 + b^2$$
$$x = \frac{b^2 + a^2}{2b} = AC$$

$$\text{Et } AB \; (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

Regula Arith. Summa quadratorum basis & aggregati hypothenusæ & perpendicularis ($a^2 + b^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat hypothenusam AC. Differentia vero eorumdem quadratorum ($b^2 - a^2$) divisa per duplum ejusdem aggregati ($2b$) dat perpendicularem AB.

Coroll. *Tam ex primo quam ex secundo problemate habetur regula inveniendi in numeris infinita triangula rectangula, quorum latera per numeros integros, & rationales exprimantur. Habentur enim tria latera* BC $= a$, AC $= \frac{a^2 + b^2}{2b}$, *&* AB $= \frac{b^2 - a^2}{2b}$, *quibus ad eamdem denominationem redactis (multiplicando* $a \times 2b$), *&* *deleto communi denominatore; erunt* BC $= 2ab$, AC $= a^2 + b^2$, *&* AB $= b^2 - a^2$.

Su-

Sumantur itaque ad arbitrium pro a & b duo quicumque numeri. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $2ab = 4$, $a^2 + b^2 = 5$, $b^2 - a^2 = 3$. Latera ergo trianguli rectanguli quæsita sunt 3, 4, 5.

Sit $a = 5$, $b = 7$; erit $2ab = 70$, $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$, & $b^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Sunt ergo latera quæsita 24, 70, 74, & sic de aliis infinitis.

PROBL. III.

In triangulo quocunque ABC *datis uno angulo* BAC, *latere* AC *adjacente*, & *reliquorum laterum* AB + BC *summa*, *latus* AB *invenire*. Fig. 2.

Ex puncto C ad latus quæsitum *AB* demittatur perpendicularis *CD*. In triangulo rectangulo *ADC* ob datum angulum *DAC* & hypothenusam *AC* dantur etiam latera *AD*, & *CD per Problem.* 2. *Trigonom. Tacquet.* Ex data itaque laterum *AB* + *BC* summa auferatur latus *AD* jam notum, relinquetur summa *BD* + *BC* pariter nota. Quæritur latus *BD*.

Sit laterum *BD* + *BC* summa data $= c$, latus *CD* $= b$, latus quæsitum *BD* $= x$; erit *BC* $= c - x$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ *per Propos.* 47. *l.* 1. *Eucl.* hoc est

$$x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$$
$$2cx = c^2 - b^2$$
$$x = \frac{c^2 - b^2}{2c} = BD$$

Regula Arithm. Inventis per Trigonometriam lateribus *AD* & *CD*, si quadratum lateris *CD* (b^2) auferas a quadrato aggregati laterum *BD* + *BC* (c^2), & resi-

residuum ($c^2 - b^2$) dividas per duplum ejusdem aggregati laterum ($2c$) dabitur latus BD, quod additum lateri jam invento AD, dat latus quæsitum AB.

SCHOL. *Hinc patet, Trigonometriam quoque opem suam Algebræ conferre. Nam sine illa longiori sane calculo opus fuisset. Hoc problemate* Guil. Whiston (a) *utitur ad calculum Planetarum geometricum supputandum. At prolixiori circuitu hanc ipsam æquationem assequitur.*

PROBL. IV.

Datis tribus cujuscunque trianguli lateribus superficiem invenire. Fig. 3.

PRoducatur, si opus sit, latus BC in D, in quod cadit a vertice A perpendicularis AD. Ponatur autem $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = x$, $CD = y$; erit $BD = c + y$.

Jam habetur *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.*

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \qquad \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$$
$$x^2 = b^2 - y^2 \qquad x^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$$

Proinde $b^2 - y^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$

$$2cy = a^2 - b^2 - c^2$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

Hinc $y^2 = \dfrac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}$

Substituto valore y^2 in superiori prima æquatione, & extracta deinde radice, oritur

$AD =$

(a) Prælect. Astronom. Lem. VI. pag. 272. Londini 1707.

$$AD = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}\right)}$$

hoc est $AD = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}\right)}$

Quod si altitudo *AD* multiplicetur per dimidium basis *BC* ($= \frac{1}{2}c$). hoc est per $\frac{1}{4}cc$ (ob signum radicale *ex Prop.* 4. *Cap.* 4.) erit superficies quæsita

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 + \frac{1}{8}b^2c^2 - \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{16}c^4\right)}$$

Regula Arithmetica ad Geometriam practicam valde utilis, quam auctores communiter tradunt, est hujusmodi: ex laterum semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur tres differentiæ, quæ inter se multiplicentur, earumque productum ducatur in ipsam semisummam laterum: nam hujus producti radix quadrata erit area trianguli quæsita.

Vel sic: primo multiplicetur semisumma laterum per differentiam unius lateris, & fiat productum *A*. Secundo multiplicentur inter se differentiæ reliquorum duorum laterum, & fiat productum *B*. Tertio duo illa producta *A* & *B* invicem multiplicentur, & extrahatur inde radix quadrata, quæ dabit superficiem trianguli quæsitam.

Semisumma later.	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
Differ. unius later.	$-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
Productum A	$-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$

N *Dif-*

$$-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}a$$

Differ. duor. lat. $+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}a$

Productum B $-\tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{4}c^2+\tfrac{1}{2}bc+\tfrac{1}{4}a^2$

Ductis invicem productis $A \times B$, oritur omnino ut supra

$$\tfrac{1}{8}a^2b^2+\tfrac{1}{8}b^2c^2+\tfrac{1}{8}a^2c^2-\tfrac{1}{16}a^4-\tfrac{1}{16}b^4-\tfrac{1}{16}c^4$$

Cujus radix quadrata dat quęsitam trianguli superficiem.

Sit $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$, erit summa laterum $= 42$ & semisumma $= 21$. Differentiæ inter hanc & latera sunt 8, 7, 6, quarum productum $= 336$ si multiplicetur per semisummam 21 dat 7056. Cujus radix quadrata 84 dat trianguli superficiem quæsitam.

SCHOL. I. *Verum quo pacto ex superiori æquatione* $\sqrt{(\tfrac{1}{8}a^2b^2+\tfrac{1}{8}a^2c^2 \text{ \&c.})}$ *regula hæc arithmetica eruatur, non illico apparet. Sed advertatur, tres quantitates* a, b, c, *quæ invicem simul multiplicantur, & nusquam ternæ in producto reperiuntur, necessario elidi debere per signa negativa & alternatim opposita; tertium autem productum oriri ex omnibus illis positive sumptis, scilicet*

$$\frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b+c}{2}$$

Ex harum enim multiplicatione habetur productum supra inventum; cujus coefficientes fracti oriuntur ex eo, quod singulæ summæ divisæ sint per $\tfrac{1}{2}$, *ut evidens est.*

SCHOL. II. *Porro egregii hujus problematis, teste* Adriano Metio (a), *auctor est.* Theon Alexandrinus,

(a) Geometr. Pract. part. 2. cap. 3. num. 4.

nus *magnus Geometra & Astronomus*. Dn. de la Hire (a) *tanti fecit, ut illud Academiæ regiæ Parisiensi, faciliori solutione concinnatum proposuerit*.

PROBL. V.

In dato semicirculo ducta perpendiculari DE *ad diametrum* AC, *ducere ab extremitate diametri rectam* AB, *ita ut pars intercepta* FB *æqualis sit semidiametro* AO, *vel* CO. Fig. 4.

Esto factum: ductisque BG parallela perpendiculari DE, & recta BC, sit diameter $AC = a$ $AE = b$, $AB = x$; erit $AF = x - \frac{1}{2}a$, cum supponatur $FB = AO$, vel $CO = \frac{1}{2}a$.

Ob triangula BAG & EAF similia erit $AF . AE :: AB . AG$, & in terminis analyticis

$$x - \frac{1}{2}a . b :: x . \frac{bx}{x - \frac{1}{2}a} \left(= \frac{2bx}{2x - a} \right) = AG$$

Similiter ob triangula ABC & BAG similia erit *per Cor. Propos.* 8. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet*.

$$CA . AB :: AB . AG$$

$$a . x :: x . \frac{2bx}{2x - a}$$

$$x^2 = \frac{2abx}{2x - a}$$

 Di-

(a) Memoires de l'Acad. des sciences an. 1700. & Acta Erudit. Lipsiæ an. 1704.

$$\textit{Multipl. per } 2x - a)\ 2x^3 - ax^2 = 2abx$$

$$\textit{Divid. per } 2x \quad x^2 - \frac{1}{2}ax = ab$$

$$\textit{Propos. } 1. \quad \textit{adde} \quad \frac{1}{16}a^2 \quad \frac{1}{16}a^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{16}a^2 + ab$$

$$x - \frac{1}{4}a = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

$$\textit{Extr. rad.} \quad x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

Innotescit ergo quantitas chordæ quæsitæ AB, quæ ducenda est a puncto A, ut imperatur. Etenim si ponatur $a = 4$ & $b = 1$; erit x ($= \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$) $= 1 + \sqrt{5}$; ideoque ipsa chorda $AB = 1 + \sqrt{5}$.

Aliter (*Fig.* 5.) Completo circulo, producatur DE in F, & sit diameter $AB = a$, $AE = b$, $DE = c$, $CG = AM$, vel $BM = \frac{1}{2}a$, $AC = x$; erit $AG = x - \frac{1}{2}a$.

Cum DF secta sit bifariam in E per *Prop.* 3. *l.* 3. *Eucl.*, & non bifariam in G, erit $\overline{DE}^2 = DG \times GF + \overline{GE}^2$ per *Propos.* 5. *l.* 2. sed $DG \times GF = AG \times GC$ per *Prop.* 35. *l.* 3. & $\overline{GE}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$ per *Prop.* 47. *l.* 1. Ergo $\overline{DE}^2 = AG \times GC + \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$, hoc est in terminis analyticis

$c^2 =$

$$c^2 = x^2 - \frac{1}{2} ax - b^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2} ax = b^2 + c^2$$

Quæ quidem æquatio resolvitur *per Prop.* 1. *hujus*, & habetur $x = \frac{1}{4} a + \sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2}$, quæ a superiori non differt. Nam posita AB (a) $= 4$, AE $(b) = 1$; erit $EB = 3$: proinde DE $(c) = \sqrt{3}$, cum sit media proportionalis inter AE & EB *per Cor. Prop.* 13. *l.* 6. *Eucl.* Erit ergo $c^2 = 3$, adeoque $\sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, & $x = 1 + \sqrt{5}$; atque hinc chorda $AC = 1 + \sqrt{5}$, ut prius.

PROBL. VI.

Datis in circuli diametro AB *duobus punctis* D & E *a centro* C *æquidistantibus, invenire in peripheria punctum* F, *a quo ductæ* FD, FC, & FE *sint in continua proportione geometrica*. Fig. 6.

Esto F punctum quæsitum, a quo demittatur perpendicularis FG. Sit $DC = CE = a$, $AD = EB = b$, $FC = CA$ vel $CB = r$, $DG = x$; erit $AG = b - x$, & $GB = 2a + b + x$.

$$AG \times GB = 2ab + b^2 - 2ax - x^2 = \overline{FG}^2$$

$$\text{adde } \overline{GD}^2 = x^2$$

Prop. 47. *l.* 1. $\overline{FD}^2 = 2ab + b^2 - 2ax$

At $GE = 2a + x$, & $\overline{GE}^2 = 4a^2 + 4ax + x^2$

adde $\overline{FG}^2 = 2ab + b^2 - 2ax - x^2$

Propos. cit. $\overline{FE}^2 = 4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax$

Sunt autem ex conditione problematis FE, FC, & FD in continua proportione geometrica; ergo etiam eorum quadrata *per Theor. 6. Cap. 5.*, nempe $\overline{FE}^2$, $\overline{FC}^2$, $\overline{FD}^2$, & in terminis analyticis

$$4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax \,.\, r^2 :: r^2 \,.\, 2ba + b^2 - 2ax$$

Fiant porro facilioris calculi gratia quantitates notæ $4a^2 + 2ab + b^2 = m$, & $2ba + b^2 = n$, erit

$$m + 2ax \,.\, r^2 :: r^2 \,.\, n - 2ax$$

Th. 4. Cap. 5. $mn + 2anx - 2amx - 4a^2x^2 = r^4$

Sch. Prop. 1. Cap. 5. $4a^2x^2 + 2amx - 2anx = mn - r^4$

Div. per $4a^2$ $x^2 + \frac{m - n}{2a} \times x = \frac{mn - r^4}{4a^2}$

Fiat $\frac{m - n}{2a} = 2p$, & $\frac{mn - r^4}{4a^2} = q$; erit *per Cor. Prop. 2.*

Cap. 6. æquatio $x^2 + 2px - q = 0$

Quæ quidem *per Prop. 3. hujus* facile resolvitur, eritque nota quantitas DG, seu punctum G, ex quo elevata perpendiculari GF, obtinetur in peripheria punctum quæsitum.

SCHOL. *Problemata Geometrica fere omnia constructionem geometricam admittunt. Nos hoc loco arithmeticas tantum regulas deduxisse contenti, geometricam constructio-*

ctionem ad caput ultimum referre statuimus, ne tyrones rerum multitudine & varietate perturbentur.

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

QUO calculus facilior evadat, supponitur jam secundus terminus ab æquatione sublatus: item fractiones, & termini radicales, ut in *Prop.* 2. 8. & 9. *Cap.* 6. docuimus.

Omnes æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad aliquam sequentium formularum reducuntur

$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 + px - q = 0$$

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum cubicarum genesis.

I. SIt æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes cubicas secundo termino carentes, quæ, ut ex signis apparet, duas habent radices positivas, & tertiam negativam duabus illis positivis æqualem; alias secundus terminus non evanesceret *per num.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6.

Sint igitur duæ radices positivæ $f - g$, & $f + g$, erit earum summa $= 2f$, earumque differentia $= - 2g$, & radix negativa $= - 2f$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, & $x + 2f = 0$, ex quarum facto oritur æquatio tertii gradus indeterminata *A*, tres radices reales continens, duas quidem positivas, & tertiam negativam earum summæ æqualem, scilicet:

$$A \quad \begin{array}{l} x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ \quad\;\; - ggx - 2ggf \end{array}$$

Comparentur hujus termini cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, cui ex hypothesi æquatur; fiunt duæ æquationes.

1.^{a} $3ff + gg = p$, hinc $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$

2.^{a} $2f^3 - 2ggf = q$, hinc $f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$ repræsentans omnes æquationes cubicas, in quibus (ut signa indicant) sunt duæ radices negativæ, & una positiva earum summæ æqualis; alias secundus terminus non evanuisset *per numer.* 4. *Propos.* 1. *Cap.* 6.

Sint igitur radices negativæ $-f + g$, & $-f - g$: earum summa $= -2f$ dat radicem positivam illis æqualem, earumque differentia erit $= -2g$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x + f - g = 0$, $x + f + g = 0$, & $x - 2f = 0$, ex quarum facto oritur æquatio indeterminata B, continens tres radices reales, duas negativas, & tertiam positivam, scilicet

$$B \quad \begin{array}{l} x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ \quad\;\; - ggx + 2ggf \end{array}$$

Cujus terminis comparatis cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px - q = 0$, cui æqualis supponitur, fiunt duæ æquationes

1.^{a} $-3ff - gg = -p$, hinc $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$

2.^{a} $-2f^3 + 2ggf = -q$, hinc $-f^3 + ggf = -\frac{1}{2}q$

Ex utraque æquatione A & B, in quibus f supponi-ponitur major, quam g (alias $f - g$ non esset radix positiva, nec $-f + g$ esset radix negativa, ut fuit suppositum) nonnulla inferuntur, ex quorum notitia maxime pendet æquationum cubicarum resolutio, scilicet.

1. Si duæ radices (sive positivæ, sive negativæ illæ sint) æquales existant; tunc cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini est æqualis quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

Nam in hoc casu in duabus æquationibus simplicibus $x - f + g = 0$, & $x - f - g = 0$, earum differentia seu quantitas $2g$ fit nulla, hoc est $2g = 0$; proinde in æquatione A (idem fit in æquatione B) evanescit quantitas $- ggx + 2ggf$, & remanet $x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$. Comparentur hi termini residui cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, oriuntur duæ æquationes; prima $- 3ff = - p$, seu $ff = \frac{1}{3} p$, secunda $- 2f^3 = + q$, seu $f^3 = - \frac{1}{2} q$. Harum prima elevetur ad cubum, & ad quadratum altera: erunt $f^6 = \frac{1}{27} p^3$, & $f^6 = \frac{1}{4} qq$; proinde $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

2. Si cubus idem ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major fuerit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est si $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, tunc tres radices reales erunt inæquales.

Nam comparatis terminis æquationis A cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, haben-

tur

tur æquationes illæ duæ, prima $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$ secunda $f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$, & elevando primam ad cubum, oritur

$$f^6 + ggf^4 + \frac{1}{3}g^4 ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Elevando autem secundam ad quadratum, habetur

$$f^6 - 2ggf^4 + g^4 ff = \frac{1}{4}qq$$

Si hæc ex illa auferatur, erit residuum

$$3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4 ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$$

Jam vero quia ex dictis f major est, quam g; erit quoque $3ggf^4$ major, quam $\frac{2}{3}g^4 ff$ (nam divisa utraque per $ggff$, quotus $3ff$ major erit, quam $\frac{2}{3}gg$): ideoque cum in superiori æquatione $3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4 ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ unum membrum sit positivum, erit quoque alterum membrum, nempe $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$; ergo $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

3. Si idem cubus fuerit minor quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, tunc æquatio duas radices imaginarias continebit. Nam si omnes reales essent, fieret ex dictis $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, vel $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

Hæc omnia vera existunt, quacunque alia formula generali assumpta, si pari ratione procedatur.

Co-

COROLL. *Ubi non adsunt radices imaginariæ, sed omnes sunt reales, tertius terminus semper apparet cum signo* —, *nempe* — p. *Si duæ radices sint positivæ, & rationales, ultimus terminus erit cum signo* + q. *Si negativæ, & rationales, erit* — q. *Contra vero si duæ radices irrationales sint, ultimus terminus erit* ± q.

PROPOSITIO II.

In æquationibus cubicis, an duæ radices sint æquales, & quænam sint, explorare.

I. SIt data æquatio $x^3 - 12x + 16 = 0$. Patet *per Propos.* 1. *ejusque Coroll.* haberi tres radices reales, duas quidem positivas & tertiam negativam; quæritur an duæ illæ positivæ sint æquales? Fiat comparatio terminorum cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, erit

$p = 12$	$q = 16$
$\frac{1}{27} p^3 = 64$	$\frac{1}{4} qq = 64$

Habentur ergo *per Prop. præc.* duæ radices æquales.

II. Ut una ex illis inveniatur, dividatur triplum ultimi termini per duplum coefficientis tertii termini; quotus dabit radicem quæsitam, hoc est $\frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = 2$. Tertia itaque radix erit — 4 earum summæ æqualis *per num.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6.

Demonstr. Nam ex *Prop. præc.* cum radices sunt æquales, tunc in æquationibus simplicibus $x - f + g = 0$, & $x - f - g = 0$ fit $g = 0$; hinc facta ex illis multiplicatione, & comparatis terminis æquationis, quæ inde oritur, cum terminis formulæ generaneralis, ut in *Prop. cit.* factum est, æquatio illa $3ff + gg = p$, fiet $3ff = p$; atque hinc $ff = \frac{1}{3}p$. Similiter $2f^3 - 2ggf = q$, fit $2f^3 = q$; unde oritur $f^3 = \frac{1}{2}q$. Dividatur jam hæc æquatio per illam, hoc est primum membrum per primum, & secundum per secundum membrum, erit $f^3 : ff = \frac{1}{2}q : \frac{1}{3}p$, unde $f = \frac{3q}{2p}$, quæ quidem æquatio allatam regulam nobis exhibet.

PROPOSITIO III.

In æquationibus cubicis, an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare?

I. Sit æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, quæ tres radices reales habet, duas quidem positivas, & tertiam duabus illis æqualem negativam *per Cor. Prop. 1. hujus*. Quæritur primo, an radix illa negativa, alterutra positiva major, sit rationalis?

Subtrahatur quantitas p ex quadrato proxime majori, & per residuum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, erit ipse idem radix rationalis quæsita. Si vero successive nullum reperiatur quadratum majus p, quod hunc præstet effectum, signum est, radicem illam esse irrationalem.

Sit exemplum $x^3 - 39x + 70 = 0$ (facta comparatione cum terminis formulæ generalis) erit $p = 39$, $q = 70$. Quadratum proxime majus, quam p, est $= 49$, ex quo subtracto p, erit $49 - 39 = 10$. Per hoc residuum dividatur $q = 70$, quotus 7 æqualis radici quadrati assumpti dat radicem rationalem negativam quæsitam.

Ex-

Explorandum deinde ſit, an aliqua ex radicibus poſitivis ſit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus, quam p, quod ſubtrahatur ex ipſo p, & per reſiduum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejuſdem quadrati aſſumpti, ille dabit radicem rationalem quæſitam. Si vero nullum ſucceſſive quadratum reperiatur minus ipſo p, quod hunc præſtet effectum, ſignum eſt, radices illas eſſe irrationales.

Sit eadem æquatio, quæ prius, $x^3 - 39x + 70 = 0$: cum ſit $p = 39$, $q = 70$, quadratum proxime minus p erit $= 36$, quo ſubtracto ex p, fit $39 - 36 = 3$, & dividendo per hoc reſiduum quantitatem $q = 70$, quotus $= 23\frac{1}{3}$ non eſt radix aſſumpti quadrati.

Sumatur quadratum adhuc minus, nempe 25, quo ſubtracto ex p, erit $39 - 25 = 14$, per quod reſiduum dividendo $q = 70$, habetur quotus $= 5$ æqualis radici quadrati aſſumpti, qui dat unam ex radicibus poſitivis rationalem, nempe 5.

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$, quam ex *Propoſ.* 1. *hujus*, *ejuſque Coroll.* liquet, habere tres radices reales, duas quidem negativas & tertiam poſitivam illis æqualem, proinde alterutra negativa majorem. Quæritur, an radix illa poſitiva ſit rationalis? Regula eſt eadem.

Sit exemplum $x^3 - 13x - 12 = 0$, erit $p = 13$, & $q = 12$. Quadratum proxime majus, quam p, eſt $= 16$, ex quo ſubtrahatur p, erit $16 - 13 = 3$, & dividendo per hoc reſiduum $q = 12$, habetur quotus 4, qui eſt æqualis lateri quadrati aſſumpti; proinde radix rationalis quæſita $= 4$.

Quæritur deinde, an aliqua ex radicibus negativis ſit rationalis? Sumatur quadratum proxime minus, quam p, hoc eſt 9, quod ex ipſo ſubtrahe, erit $13 - 9 = 4$, per quod reſiduum diviſo $q = 12$,

ha-

habetur quotus æqualis lateri quadrati aſſumpti, & radix rationalis quæſita, nempe -3.

Demonſtr. Poſitis duabus radicibus poſitivis (ut *in Propoſ.* 1. *hujus*) $f+g$, & $f-g$, earum ſumma $2f$ dat radicem negativam illis æqualem, ejuſque quadratum $= 4ff$, ex quo ſubtrahatur $3ff+gg$ ($= p$), reſiduum eſt $4ff-3ff-gg$, hoc eſt $ff-gg$; per quod reſiduum ſi dividatur $2f^3-2ggf$ ($= q$) remanet $2f$, radix ſcilicet quadrati $4ff$ & æquationis; unde patet ratio regulæ pro prima parte.

Pro altera parte fiat ex aliqua radice, ſive poſitiva $f-g$, ſive negativa $-f+g$ quadratum $ff-2gf+gg$, quod ſubtrahatur ex $3ff+gg$ ($= p$), reſiduum erit $2ff+2gf$, per quod dividendo $2f^3-2ggf$ ($= q$), quotus dat $f-g$, radicem ſcilicet quadrati & æquationis; unde evidens eſt ratio ſecundæ partis problematis.

Coroll. I. *Tum ex praxi, tum ex demonſtratione patet, ex quadrato aſſumpto ſubtrahi coefficientem* p, *ubi maxima radicum inquiritur: contra vero quadratum aſſumptum ſubtrahi debere ex coefficiente* p, *ubi radix una ex minoribus quæritur. Quod ſi in neutro caſu prodeat ultimi termini* q *diviſor talis, ex cujus diviſione habeatur quotus, qui ſit aſſumpti quadrati latus, ſignum eſt, radices illas quæſitas eſſe irrationales, ut ex* Propoſ. ſequenti *clarius apparebit.*

Coroll. II. *Inventa una ex radicibus rationalibus, ſive illa poſitiva, ſive negativa ſit, dividitur per illam æquatio, quæ fit ſecundi gradus, & aliæ duæ radices facile innoteſcunt* per Prop. 1. & 3. Cap. 8.

Schol. I. *Si radix inventa, quæ ſit* = a, *ponatur duarum reliquarum ſumma, erit illa coefficiens ſecundi termini in æquatione quadratica, quæ reliquas duas radices continet; & ſi per illam dividatur ultimus æqua-*

tio-

tionis datæ terminus q, *erit* $\frac{q}{a}$ *productum duarum ipsarum radicum in æquatione quadratica contentarum, nempe* $x^2 - ax + \frac{q}{a} = 0$, *si radices illæ positivæ sint; vel* $x^2 + ax \frac{q}{a} = 0$, *si negativæ: adeoque in primo casu radix una positiva erit* $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$, *altera* $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. *In secundo casu una negativa* $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$, *altera* $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a})}$. *Sic in superiori æquatione* $x^3 - 13x - 12 = 0$ *cum inventa fuerit radix positiva* $= 4$, *quæ reliquis duabus negativis æqualis esse debet, si dicatur* a, *erit* $\frac{q}{a} = \frac{12}{4} = 3$; *proinde ex allata formula erit una radix negativa* $x = -2 - \sqrt{4-3} = -3$, *altera* $x = -2 + \sqrt{4-3} = -1$.

SCHOL. II. *Ubi duplex signum occurrit* $\pm$ *vel* $\mp$; *hæc est regula: in primo casu sumitur signum positivum, in secundo negativum. Plerumque tamen* $\pm$ *significat, quantitatem illam tum positive, tum negative posse usurpari, ut* in Schol. 2. Prop. 1. Cap. 8. *dictum est*.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Æquationes cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem continent, expedire.

Æquationes cubicas secundo termino carentes tunc duas radices imaginarias continere, certum est:

1. Cum tertius terminus p afficitur quidem signo $-$, sed $\frac{1}{27}p^3$ minus est, quam $\frac{1}{4}qq$, *ut in Prop. 1. hujus* dictum est, & tunc æquatio generalis erit $x^3 - px \pm q = 0$.

2. Cum tertius terminus signo $+$ afficitur, in quo casu formula generalis est $x^3 + px \pm q = 0$.

3. Demum cum æquatio secundo & tertio termino caret, (quæ *æquatio pura* tertii gradus dicitur) ut $x^3 \pm q = 0$; tunc autem radix realis semper erit $x = \sqrt[3]{\pm q}$.

In ejusmodi autem æquationibus habetur $-q$, ubi radices imaginariæ negativæ sunt; habetur $+q$, ubi radices imaginariæ sunt positivæ: adeoque in formulis generalibus ponitur utrumque signum $\pm q$.

In his resolvendis quæritur primum radix realis, quæ erit vel positiva, vel negativa, semper æqualis summæ duarum radicum imaginariarum; alias secundus terminus tolli non potuisset. Ipsa vero radix realis potest esse rationalis & irrationalis. An sit rationalis, ita detegitur.

I. Sumatur quadratum minus, vel majus, quam p, cui addatur $\pm p$; hoc est si in data æquatione sit $-p$, sumatur $-p$; si vero sit $+p$, sumatur $+p$; & per hoc residuum, vel summam dividatur q. Si divisio dat quotum, qui sit radix quadrati assumpti, habetur radix rationalis quæsita, ut in primo & secundo exemplo ſequenti ; alias eſt irrationalis , ut in tertio exemplo.

Data ſit æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$, quæ comparari debet cum formula generali $x^3 - px + q = 0$. Cum autem $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ minor ſit, quam $\frac{1}{4}qq = 9$, jam manifeſtum eſt, duas radices imaginarias, & quidem poſitivas ob $+q$ in ea deliteſcere. Sumatur quadratum 4, cumque habeatur $-p = -1$, per quadratum $4 - 1 = 3$ dividatur $q = 6$; quotus, qui eſt latus quadrati aſſumpti, dat radicem realem rationalem negativam -2 *per num.* 4. *Propoſ.* 1. *Cap.* 6.

Radices imaginariæ habentur *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8., nempe $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam data æquatio ſi dividatur per radicem rationalem inventam, deprimitur ad ſecundum gradum, ut patet.

II. Data ſit æquatio $x^3 + 27x - 28 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^3 + px - q = 0$, & ſignum $+p$ indicat, duas radices imaginarias in ea contineri: quæritur radix rationalis ejuſdem. Sumatur quadratum 1, cui addatur $p = 27$, & per hanc ſummam $1 + 27 = 28$ dividatur $q = 28$: quotus 1, cum ſit latus quadrati aſſumpti, dat radicem rationalem quæſitam.

Radices vero imaginariæ (depreſſa æquatione ad ſecundum gradum) habentur *per propſ.* 1. & 3. *Cap.* 8. $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, & $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, negativæ quidem, ut æquationis datæ ſigna indicant; proinde radix realis neceſſario poſitiva eſt.

III. Sit æquatio $x^3 - 6x - 16 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, & quia $\frac{1}{27}p^3 = 8$ minus eſt, quam $\frac{1}{4}qq = 64$, ſignum eſt, haberi duas radices imaginarias. Videndum, an radix realis ſit rationalis. Sumatur quadratum 4, cui addatur $-p = -6$, & per ſummam $4 - 6 = -2$ diviſo $-q = -16$, habetur $+8$, quod quidem non eſt latus quadrati aſſumpti. Sumatur aliud ſucceſſive quadratum, nempe 9, cui addatur $-p = -6$, & per ſummam hanc $9 - 6 = 3$ dividatur $-q = -16$. Sed hoc cum fieri non poſſit exacte & ſine reſiduo, ſumatur ſucceſſive aliud quadratum majus, nempe 16, quod additum ad $-p = -6$, ſumma fit 10, per quam pariter non eſt diviſibilis ſine reſiduo quantitas $q = 16$. Et cum aliud & aliud quadratum fruſtra ad hunc effectum aſſumatur, ſignum eſt, radicem realem eſſe irrationalem, alia ſane methodo inferius inveniendam *per* Prop. 6.

Demonſtr. fere eadem eſt ac *præc. Propoſ.* Nam ſi ſupponantur duæ radices imaginariæ negativæ $-f + \sqrt{-3gg}$, & $-f - \sqrt{-3gg}$, ex quibus fiant æquationes ſimplices $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$, & $x + f + \sqrt{-3gg} = 0$; earum ſumma $2f$ dabit radicem realem poſitivam, quæ ob ſecundum terminum, quo æquatio caret, illis debet eſſe æqualis. Habetur itaque $x - 2f = 0$. Multiplicentur tres hujuſmodi æquationes, oritur æquatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ \quad\;\; + 3ggx - 6ggf \end{array}$$

Et facta comparatione cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px - q = 0$, erit

$$-3ff + 3gg = \pm p, \ \& \ -2f^3 - 6ggf = -q$$

Quod ſi radices imaginariæ poſitivæ fuerint, ſcilicet $f + \sqrt{-3gg}$, & $f - \sqrt{-3gg}$, tunc radix realis earum ſummæ æqualis ob ſecundum terminum, qui deeſt, neceſſario erit negativa, nempe $-2f$, factaque, ut ſupra, multiplicatione trium æquationum ſimplicium, oritur

x^3

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx + 2f^3 &= 0 \\ + 3ggx + 6ggf & \end{aligned}$$

Comparatis hujus terminis cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px + q = 0$, habetur

$$-3ff + 3gg = \pm p, \ \& \ 2f^3 + 6ggf = q$$

Proinde si $4ff$ (quadrato radicis realis $\pm 2f$) addatur $-3ff + 3gg = \pm p$, summa erit $4ff - 3ff + 3gg$, hoc est $ff + 3gg$: per quam si dividatur $-2f^3 - 6ggf = -q$ in primo casu, vel $2f^3 + 6ggf = q$ in secundo casu; quotus dabit radicem realem quæsitam $\pm 2f$.

SCHOL. *In æquationibus puris tertii gradus* $x^3 \pm q = 0$ *præter radicem realem* $x = \sqrt[3]{q}$, *vel* $x = \sqrt[3]{-q}$, *dantur quoque aliæ duæ radices, quæ ex dictis in* Prop. *imaginariæ sunt. Hæ autem sic inveniuntur. Dividatur* $x^3 - q = 0$ *per ejus radicem realem inventam* $x - \sqrt[3]{q} = 0$, *quotus* $x^2 + x\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2}$ *erit æquatio secundi gradus, quæ duas radices imaginarias continebit. Fiat brevitatis gratia* $q = 8$, *erit* $x^3 - 8 = 0$, *ejusque radix realis* $x - 2 = 0$, *per quam dividendo* $x^3 - 8 = 0$, *habetur æquatio secundi gradus* $x^2 + 2x + 4 = 0$, *cujus radices, ut ex signis patet, imaginariæ sunt, & quidem negativæ, nempe* $-1 + \sqrt{-3}$, *&* $-1 - \sqrt{-3}$. *Similiter divisa æquatione* $x^3 + 8 = 0$ *per ejus radicem* $x + 2 = 0$, *invenitur* $x^2 - 2x + 4 = 0$, *quæ dat duas radices imaginarias positivas* $1 + \sqrt{-3}$, $1 - \sqrt{-3}$. *Sic etiam si fiat* $q = 1$, *seu* $x^3 - 1 = 0$, *erunt tres ipsius unitatis radices cubicæ* 1, $-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$, *&* $-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}$.

PROPOSITIO V.

Æquationes Cubicas, in quibus una ſaltem radix eſt rationalis, brevius expedire.

I. SIt æquatio data $x^3 + 12x = 427$, cujus una radix rationalis inquiritur.

Quia incognitæ cubus minor eſt cubo cognitæ, hoc eſt $x^3 < 427$, nam $x^3 = 427 - 12x$; ſumatur radix cubica ipſius 427 proxime minor, nempe 7, ejuſque cubus 343 ſubtrahatur ex ipſa quantitate cognita 427, ſubtracto ex altera parte incognitæ cubo x^3. Ex reſiduo $12x = 84$ habetur $x = 7$, radix æquationis aſſumptæ radici cubicæ æqualis, nempe

$$\begin{array}{ll} & x^3 + 12x = 427 \\ \textit{Subtr.} & x^3 \qquad\quad\;\; 343 \\ \hline & \quad + 12x = 84 \\ \textit{Divid. per } 12 & \qquad\; x = 7 \end{array}$$

II. Sit æquatio propoſita $x^3 - 12x = 1584$: cum ſit $x^3 > 1584$, nam $x^3 = 1584 + 12x$; ſumatur radix cubica proxime major ipſius 1584, nempe 12, ejuſque cubus 1728 ſubtrahatur ex ipſo 1584, ſubtracto pariter incognitæ cubo x^3, habetur radix quæſita 12 aſſumptæ radici æqualis

$$\begin{array}{ll} & x^3 - 12x = 1584 \\ \textit{Subtr.} & x^3 \qquad\quad\;\; 1728 \\ \hline & \quad - 12x = -144 \\ \textit{Divid. per } 12. & \qquad\; x = 12 \end{array}$$

III. Sit æquatio $x^3 + 27x = 28$, ut *in præced. Prop.* facile cognoſcitur, cubum x^3 minorem eſſe cubo ipſius 28; nam $x^3 = 28 - 27x$. Radix cubica proxime minor ejuſdem 28 eſt 3, ejuſque cubus 27, qui-

qui ſubductus a 28 relinquit 1: proinde fieret $x = \frac{1}{27}$, qui non eſt valor quæſitus, ut patet. Sumpta radice cubica adhuc minori, nempe 2, factaque cubi ſubtractione, idem ſequitur inconveniens: haberetur enim $x = \frac{20}{27}$. Sumatur itaque pro radice cubica ipſius 28 unitas, ejuſque cubo 1 ſubtracto ex eodem 28, habetur $x = 1$ radix quæſita.

$$
\begin{array}{lr}
 & x^3 + 27x = 28 \\
\textit{Subtr.} & x^3 \qquad\quad 1 \\
\hline
\textit{Div. per } 27 & + 27x = 27 \\
 & x = \frac{27}{27} = 1
\end{array}
$$

COROLL. *Patet ratio, cur in hoc tertio exemplo radix cubica proxime minor ad rem non fuerit; ſed multo minor, imo omnium minima apte fuerit aſſumpta. Nam cubus incognitæ* x^3 *minimam habet rationem ad quantitatem* 28. *Adduntur enim illi* $27x$, *ut habeatur æquatio. Hoc pro ſimilibus caſibus advertatur.*

SCHOL. *Æquationes cubicæ, de quibus hactenus egimus, in quibus ſcilicet una ſaltem radix rationalis inventa fuit, poterant certe reſolvi per ea, quæ diximus in* Cap. 7. *Sed quis non videt, hanc viam eſſe breviorem, cum opus non ſit plures ultimi termini diviſores tentare, pluresque diviſiones peragere? Sentiant aliud, qui volunt.*

PROPOSITIO VI.

Æquationes Cubicas, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.

I. Sit æquatio $x^3 - px - q = 0$, in qua duas radices imaginarias & realem irrationalem contineri jam conſtet *per Prop.* 4. & 5. *hujus*: inveniri debet ipſa radix irrationalis.

1. Subtrahatur $\frac{1}{27}p^3$ ex $\frac{1}{4}qq$, & ex residuo extrahatur radix quadrata, cui addatur $\frac{1}{2}q$ dimidium ultimi termini. Et ex hac summa extracta radice cubica, habetur prima pars radicis realis irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$$

2. Dividatur quantitas p per triplum primæ partis radicis jam inventæ; quotus dabit alterum radicis partem priori addendam, scilicet

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}$$

Formula proinde generalis quæsitæ radicis est hujusmodi

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}$$

Sit exemplum æquatio $x^3-6x-16=0$, in qua per *Prop. præc.* radix realis est irrationalis: facta terminorum comparatione cum formula generali, erit $p=6$, & $q=16$; proinde $\frac{1}{27}p^3=8$, & $\frac{1}{4}qq=64$, hinc $\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3=64-8=56$. Hujus residui radix quadrata, nempe $\sqrt{56}$, addatur ad $\frac{1}{2}q=8$, & ex hac summa extrahatur radix cubica; erit prima pars radicis irrationalis quæsitæ $\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$. Et dividendo $p=6$ per triplum hujus

jus primæ partis, obtinetur altera pars radicis, videlicet

$$\frac{6}{3\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}}.$$ Tota itaque radix erit

$$x = \sqrt[3]{8+\sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}}$$

II. Si æquatio data $x^3 + px - q = 0$, in qua tertius terminus eſt cum ſigno $+$, eadem eſt regula, ſi duo excipias. Primo $\frac{1}{27}p^3$, & $\frac{1}{4}qq$ addi debent, non ſubtrahi. Secundo radicis inventæ partes non ſunt addendæ, ſed ſecunda ex prima ſubtrahitur, ideoque formula generalis erit

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Sit exemplum $x^3 + 3x - 26 = 0$, facta comparatione cum ſuperiori formula generali, erit $p = 3$, & $q = 26$; proinde $\frac{1}{27}p^3 = 1$, & $\frac{1}{4}qq = 169$. Hinc $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = 170$, & $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{170}$, quæ radix addatur ad $\frac{1}{2}q = 13$, & ex ſumma extrahatur radix cubica, erit $\sqrt[3]{13+\sqrt{170}}$ prima pars radicis, & dividendo per hujus triplum quantitatem $p = 3$, habetur ſecunda pars ſubtrahenda ex prima; proinde tota radix erit

$$x = \sqrt[3]{13+\sqrt{170}} - \frac{1}{\sqrt[3]{13+\sqrt{170}}}$$

Demonſtr. Sit ut in *Prop.* 4. æquatio, duas radices

 ima-

imaginarias negativas, & unam positivam illis æqualem continens

$$\begin{array}{l} x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ \quad + 3ggx - 6ggf \end{array}$$

factaque comparatione cum terminis formulæ primæ generalis $x^3 - px - q = 0$, erit $-3ff + 3gg = -p$, seu $3ff - 3gg = p$, unde $ff - gg = \frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$A \quad f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Similiter quia $-2f^3 - 6ggf = -q$, erit $2f^3 + 6ggf = q$, & $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, & quadratum utriusque membri

$$B \quad f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Jam si ex æquatione B subtrahatur æquatio A, residuum erit

$$9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extractaque radice quadrata, habetur

$$3gff + g^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Cui addatur superior æquatio $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, fit summa

$$f^3 + 3ggf + 3gff + g^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Ex qua si radix cubica extrahatur, prodit prima pars radicis

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

Di-

Dividendo autem superiorem æquationem $ff - gg = \frac{1}{3}p$ per hanc ultimam, hoc est primum membrum per primum, & secundum per secundum, oritur

$$f - g = \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$$

Quæ duæ æquationes simul junctæ dant realem radicem quæsitam $2f$, nempe

$$2f (= x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$$

Demonstr. Quoad secundam formulam $x^3 + px - q = 0$. Sit eadem æquatio, in qua tamen supponitur g major f,

$$\begin{array}{l} x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ \quad + 3ggx - 6ggf \end{array}$$

Facta comparatione cum terminis formulæ generalis, erit $3gg - 3ff = p$; unde $gg - ff = \frac{1}{3}p$, & utriusque membri cubus

$$M \quad g^6 - 3ffg^4 + 3f^4gg - f^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Similiter habetur $-2f^3 - 6ggf = -q$, seu $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$ & utriusque membri quadratum

$$N \quad f^6 + 6f^4gg + 9ffg^4 = \frac{1}{4}qq$$

Addantur duæ æquationes M & N, erit summa

$$g^6 + 6ffg^4 + 9f^4gg = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$$

Ex

Ex qua si extrahatur radix quadrata, prodit

$$g^3 + 3ffg = \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$$

Huic adde æquationem superiorem $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, erit

$$g^3 + 3ffg + 3ggf + f^3 = \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$$

Atque hinc radice tertia extracta, oritur prima pars radicis quæsitæ, nempe

$$g + f = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Ut secundam partem obtineas, divide per hanc primam partem æquationem superiorem $gg - ff = \frac{1}{3}p$, scilicet

$$\frac{gg - ff}{g + f} = \frac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}\text{, erit}$$

$$g - f = \frac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Quod si hæc ex priori parte radicis subducatur, erit radix quæsita

$$2f(=x) = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

COROLL. *Si in alterutra formula haberetur* $+ q$, *eadem manet demonstratio, eo solum discrimine, quod in eo casu radices imaginariæ essent positivæ, & radix realis illis æqualis negativa* $- 2f$.

SCHOL.

SCHOL. I. *Per radicem irrationalem inventam dividi debet æquatio, & ad secundum gradum deprimi, ut radices imaginariæ innotescant. Quo id commodius fiat, substituatur loco ejusdem radicis irrationalis quantitas rationalis. Sit v. g. æquationis* $x^3 - px - q = 0$ *radix irrationalis inventa* $\sqrt{3}$, *fiat* $\sqrt{3} = m$, *& dividendo per* $x - m$ *ipsam æquationem, oritur æquatio secundi gradus* $x^2 + mx + m^2 - p = 0$, *quæ duas radices imaginarias continet, facile inveniendas* per Prop. 1. & 3. Cap. 8. *Residuum autem illud* $m^3 - mp - q$, *quod ex hac divisione habetur, negligitur tanquam zero, seu nihil. Hoc recte fieri hinc patet, quod si substituas loco ipsius* m *incognitam* x, *cujus valorem repræsentat, termini æquationis datæ restituuntur.*

SCHOL. II. *Hactenus dicta sufficerent ad plenam æquationum cubicarum notitiam. Sed æquum non est* Cardani *regulas prorsus omittere, quas* Cartesius, Newtonus, Wolfius, *& fere omnes recentiores celebrarunt. Earum inventionem* Scipioni Ferreo *Bononiensi* Cardanus *tribuit. Audiunt vulgo* Cardani *regulæ, quod fortasse ipse omnium primus publicaverit. Miror, quod eruditi viri* Fontanellus (a), *&* Lamy (b) *easdem* Varignono *tanquam auctori attribuerint.*

PROPOSITIO VII.

Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.

I. SIt æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$. Fiat $x = f + g$ (fieri debet $f - g$, ubi habetur $+ px$) erit

$$x^3 = f^3 + 3ffg + 3ggf + g^3$$

Est

(a) Histoire de l'Acad. Royale des Scien. 1699.
(b) Elemens de Mathematique a Paris 1704.

Eſt autem $3ffg + 3ggf = 3fg \times \overline{f+g}$, & ex hypotheſi $x = f+g$; proinde $3fg \times \overline{f+g} = 3fgx$; adeoque $3fgx = 3ffg + 3ggf$: unde

$$x^3 = f^3 + 3fgx + g^3$$
$$x^3 - 3fgx - f^3 - g^3 = 0$$

Comparando jam hujus æquationis terminos cum terminis æquationis generalis aſſumptæ, oriuntur duæ æquationes (duo puncta (:) diviſionem ſignificant) ſcilicet

1.ª $3fg = p$ $g = \frac{1}{3} p : f$ $g^3 = \frac{1}{27} p^3 : f^3$	2.ª $f^3 + g^3 = q$

Et ſubſtituendo in ſecunda æquatione valorem ipſius g^3, erit

$$f^3 + \frac{1}{27} p^3 : f^3 = q$$

Mult. per f^3 $\quad f^6 + \frac{1}{27} p^3 = qf^3$

Sch. Prop. 1. *Cap.* 5. $\quad f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27} p^3$

Hæc autem æquatio utpote derivativa ſecundi gradus facile reſolvitur *per Prop.* 4. *Cap.* 8. hoc pacto

$$f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27} p^3$$
$$\frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq$$

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$$

Extr.

Extr. rad. $f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

Extr. rad. Cubica $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

Erat autem $f^3 + g^3 = q$; proinde $g^3 = q - f^3$: substituendo igitur loco f^3 ejus valorem, habetur

$g^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

Extr. rad. Cubica $g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

Atque hinc $x (= f + g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ $+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Quæ quidem est formula generalis radicis pro æquatione $x^3 - px - q = 0$.

COROLL. I. *Si æquatio habeat* $+q$, *ut* $x^3 - px + q = 0$, *tunc in formula generali radicis habetur* $-\frac{1}{2}q$. *In cæteris nihil differt, nempe* $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

II. Sit æquatio generalis $x^3 + px - q = 0$, fiat $x = f - g$ (ob $+px$), erit

$x^3 =$

$$x^3 = f^3 - 3ffg + 3ggf - g^3$$

$$-3ffg + 3ggf = -3fg \times \overline{f-g}$$

Sed ex hypothesi $x = f - g$; ergo $-3fg \times \overline{f-g}$ $= -3fgx$. Proinde subrogatis in superiori æquatione $-3fgx$ pro $-3ffg + 3ggf$, habetur

$$x^3 = f^3 - 3fgx - g^3$$

$$x^3 + 3fgx - f^3 + g^3 = 0$$

Comparatis terminis hujus cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 + px - q = 0$, habentur duæ æquationes

1.ª $3fg = p$	2.ª $g^3 - f^3 = -q$
$g = \frac{1}{3} p : f$	
$g^3 = \frac{1}{27} p^3 : f^3$	

Ponatur in secunda valor ipsius g^3, erit

$$\frac{1}{27} p^3 : f^3 - f^3 = -q$$

Mult. per f^3 $\quad \frac{1}{27} p^3 - f^6 = -qf^3$

Sch. Prop. 1. *Cap.* 5. $f^6 - qf^3 = \frac{1}{27} p^3$

Ex hac æquatione derivativa secundi gradus facile extrahitur radix *per Prop.* 4. *Cap.* 8. nam addendo utrinque $\frac{1}{4} qq$, habetur

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3$$

Extr. rad. $\quad f^3 - \frac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$

$f^3 =$

$$f^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

Extr. rad. *Cubica* $$f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$$

Erat autem $g^3 - f^3 = -q$, proinde $g^3 = -q + f^3$, & ſubrogato valore ipſius f^3, oritur

$$g^3 = -\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

Extr. rad. *Cubica* $$g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$$

Atque hinc $x (= f - g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ $- \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

COROLL. II. *Quod ſi in æquatione fuerit* $+ q$, *ut* $x^3 + px + q = 0$; *tunc in formula generali prima pars radicis habet* $-\frac{1}{2} q$, *eritque* $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$ $- \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$.

PROPOSITIO VIII.

Æquationes cubicas per formulas generales Cardani reſolvere.

OMnes æquationes cubicæ, ut in principio hujus capitis adnotavimus, ad tres ſequentes formulas reduci poſſunt.

I. x^3

$$\text{I.}\quad x^3 - px - q = 0$$
$$\text{II.}\quad x^3 - px + q = 0$$
$$\text{III.}\quad x^3 + px - q = 0$$

Singulis autem ſingulæ reſpondent formulæ generales radicis cubicæ earumdem, quas ex Cardani methodo *in præc. Prop.* invenimus, ſcilicet

$$\text{I.}\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\text{II.}\ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\text{III.}\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Harum formularum uſum celebratiſſimum exempla, quæ ſequuntur, ſatis oſtendent.

I. Sit data æquatio $x^3 - 15x - 4 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, erit $p = 15$, $\frac{1}{3}p = 5$, & $\frac{1}{27}p^3 = 125$. Item $q = 4$, $\frac{1}{2}q = 2$, & $\frac{1}{4}qq = 4$. Hinc $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{4 - 125} = \sqrt{-121}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ prima pars radicis. Similiter $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ dat alteram partem. Unde habetur $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Quod

Quod si ex binomio cubico $2+\sqrt{-121}$, & $2-\sqrt{-121}$ radix extrahatur per methodum inferius tradendam, erit una pars radicis $2+\sqrt{-1}$, altera $2-\sqrt{-1}$, ideoque $x = 4$.

Divisa autem æquatio data per radicem jam inventam hoc, est per $x - 4$, deprimitur ad æquationem secundi gradus, ejusque radices reliquæ facile eruuntur *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8.

II. Sit data æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $p = 1$, $\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$. Item $q = 6$, $\frac{1}{2}q = 3$, $\frac{1}{4}qq = 9$. Hinc $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{9 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{242}{27}}$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat primam radicis partem. At vero $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat alteram; proinde $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}} =$ (radice cubica ex utroque membro extracta *per Prop.* 10. *hujus*) $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, -1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = -2$.

III. Sit data æquatio $x^3 + 3x - 6 = 0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3 + px - q = 0$, erit $p = 3$, $\frac{1}{3}p = 1$, & $\frac{1}{27}p^3 = 1$. Item $q = 6$, $\frac{1}{2}q = 3$, $\frac{1}{4}qq = 9$; proinde $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$

 =

$= \sqrt{9+1}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}}$; atque $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}}$.

SCHOL. *Omisimus cum* Wolfio *quartam formulam cubicam* $x^3 + px + q = 0$, *utpote inutilem, seu minus necessariam, cujus radix non differt a radice tertiæ formulæ, nisi in hoc tantum, quod in prima parte radicis apponi debet* $- \frac{1}{2}q$, *in secunda vero* $+ \frac{1}{2}q$. *Imo ad solvendam quamcunque æquationem cubicam, cui desit secundus terminus, sufficit prima* Cardani *formula, qua una tanquam generali* Canone *potest quis satis commode uti.*

PROPOSITIO IX.

Idem Problema brevius absolvitur.

SIt æquatio generalis cubicas omnes repræsentans, quæ secundo termino carent, $x^3 + px + q = 0$. Fiat $x = a + b$ (a & b sunt indetetminatæ) erit

$$x^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \times \overline{a+b}, \;\&\; x = a+b$$

Proinde $3a^2b + 3ab^2 = 3abx$

Adeoque $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Posito hoc valore loco ipsius x^3 in æquatione generali, habetur

$$a^3 + 3abx + b^3 + px + q = 0$$

Fiant duæ æquationes, quarum altera contineat

quan-

quantitates radicales, altera rationales, & utraque æquatur zero.

$1.^a\ 3abx + px = 0 \qquad 2.^a\ a^3 + b^3 + q = 0$

Ex prima habetur $b = -\frac{p}{3a}$, & $b^3 = -\frac{p^3}{27a^3}$.

Hoc valore posito in secunda æquatione, oritur

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} + q = 0$$

Mult. per a^3 $\qquad a^6 + qa^3 = \frac{p^3}{27}$

Et resoluta hac æquatione derivativa secundi gradus, addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$ *per Prop.* 4. *Cap.* 8. habetur.

$$a^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem $b = -\frac{p}{3a}$, proinde secunda pars radicis (ob $x = a + b$) obtinebitur dividendo $-p$ per triplum primæ partis radicis inventæ, hoc est

per $3a$, eritque $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \dfrac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$.

 I. Sit

I. Sit æquatio $x^3 - 7x - 6 = 0$, erit $p = -7$, & $\frac{p^3}{27} = -\frac{343}{27}$. At $q = -6$, & $\frac{1}{4}qq = 9$, hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}.$$

II. Sit æquatio $x^3 - 6x + 8 = 0$: comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, erit $p = -6$, & $\frac{1}{27}p^3 = -8$: item $q = 8$, & $\frac{1}{4}qq = 16$. Hinc habetur

$$x = \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}.$$

COROLL. *Hæ formulæ radicis generales conveniunt, ut patet, cum formulis, quas* in Propos. 6. hujus *alia via tradidimus. Sunt hæ quidem multo simpliciores illis, quas in superiori* Prop. 7. *explicavimus, cum hæ unicam radicis extractionem, illæ duas requirant.*

SCHOL. I. *At dubitant hic tyrones, an per diversas ejusmodi formulas eadem omnino radix obtineatur. An ex gr. superioris primæ æquationis* $x^3 - 7x - 6 = 0$ *radix per formulam* Propos. hujus *expressa* $\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}}}$ *sit omnino eadem cum æquationis ejusdem radice, quæ per primam* Cardani *formulam haberetur, nempe* $\sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, *hoc est an secunda hujus pars secundæ parti alterius formulæ sit* *æqualis*. *Sed nullum eſt prorſus dubium. Ponatur enim*

$$7 \qquad \frac{7}{3}$$

$$3\sqrt[3]{3\pm\sqrt{-\frac{100}{27}}},\ \textit{seu}\ \sqrt[3]{3\pm\sqrt{-\frac{100}{27}}} = \sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}},$$

erit ex communi lege æquationum $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$
$\times \sqrt[3]{3\pm\sqrt{-\frac{100}{27}}}$, *factaque radicalium multiplicatione* per Prop. 12. Cap. 4. *invenitur* $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{\frac{343}{27}} = \frac{7}{3}$. *Et quidem extracta radice tertia ex binomio cubico* $3 \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}$ per Prop. 10. hujus, *habetur* $1 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}}$, *adeoque* $1 + \sqrt{-\frac{4}{3}} \times 1 - \sqrt{-\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$, *ut prius*; *proinde evidens eſt*, *ex utraque formula eamdem radicem obtineri*.

SCHOL. II. *Si in æquatione cubica radix aliqua rationalis exiſtat*, *tunc ejuſmodi formulas inutiles quidem eſſe cenſeo*, *cum talis æquatio via breviſſima reſolvi poſſit* per Prop. 4. vel 5. hujus; *& abſurdi genus ſit*, *radicem rationalem per terminos radicales*, *imo etiam per radices imaginarias inquirere*. *Quod ſi æquatio duas radices imaginarias continet & unam realem irrationalem*; *tunc hujuſmodi formulæ opportune adhibentur*.

SCHOL. III. *Cæterum ubi in æquatione* $x^3 - px \pm q = 0$, *habetur* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$; *adeoque tres radices reales*, *& inæquales ſunt* per Prop. 1. num. 2. *& nulla earum rationalis invenitur* per Propoſ. 3. vel 5.; *tunc neceſſario* $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ *erit quantitas imaginaria*. *Proinde radices*, *quæ ex natura æquationis reales eſſe debent*,

bent, tanquam imaginariæ per Cardani, *aliorumque formulas nobis exhibentur. Quod plane est absurdum. Et licet sagacissimum Analystarum ingenium, ut huic malo occurreret, ex binomio cubico radices imaginarias involvente radicem realem erui posse docuerit, quod & nos in sequenti Propos. explicabimus, id tamen nodum non solvit. Nam hoc tunc solum bene est, cum æquatio unam saltem radicem realem & simul rationalem continet: sed ubi nulla rationalis est, & omnes reales, tunc ars deficit, nullaque ratione pet Analysim radices ejusmodi exprimi possunt. Et hic dicitur* casus irreductibilis, & irresolutus; *in quo opus est ad Geometriam confugere, quæ radices illas per lineas exprimit: quemadmodum ipsa rationem, quam quadrati latus ad diametrum habet incommensurabilem, quæque numeris explicari non potest, per lineas opportune designat.*

PROPOSITIO X.

Ex binomio cubico radicem extrahere.

EXtrahenda sit radix cubica ex binomio $20 + \sqrt{392}$. Reducatur pars radicalis $\sqrt{392}$ ad simpliciorem expressionem *per Cor. 1. Prop. 2. Cap. 4.* fiet $14\sqrt{2}$.

Certum est binomiæ radicis partem unam fore $\sqrt{2}$, vel hujus multiplum (ut in secundo exemplo) per numerum rationalem exprimendum, quem voco m. Nam si $\sqrt{2}$ non ingrederetur radicem, neque cubum ingrederetur, ut manifestum est.

Ponatur itaque binomii cubici $20 + 14\sqrt{2}$ pars rationalis $20 = a$, irrationalis autem $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$; erit tota radix $a + m\sqrt{c}$, ex qua (a, c, m sunt indeterminatæ) fiat cubus

$$a^3 + 3a^2 m\sqrt{c} + 3mmac + m^3c\sqrt{c}$$

Cu-

Cujus pars rationalis est $a^3 + 3mmac$; pars irrationalis $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$. Quia vero $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^3 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}.$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{2}$, habetur

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2 &= 14 \\ 3a^2 &= 12 \\ a^2 &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Valore autem ipsius a in altera radicis parte substituto, erit

$$a^3 + 3mmac = 8 + 12 = 20$$

Quod quidem cum hypothesi optime convenit, proinde radix cubica $a + m\sqrt{c} = 2 + \sqrt{2}$.

II. Sit extrahenda radix cubica ex binomio $\sqrt{18252} - 135$. Reducatur *per Prop. 2. Cap. 4.* ad simplicem expressionem, fiet $78\sqrt{3} - 135$.

Ponatur radix esse $m\sqrt{c} - a$ (hoc est $78\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, & $-135 = -a$) & fiat cubus

$$m^3c\sqrt{c} - 3m^2ac + 3a^2m\sqrt{c} - a^3$$

Cum sit $\sqrt{3} = \sqrt{c}$, pars irrationalis erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 3a^2m\sqrt{3} = 78\sqrt{3}.$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, erit

$$\begin{aligned} 3 + 3a^2 &= 78 \\ 3a^2 &= 75 \\ a^2 &= 25 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Quo valore subrogato in altera radicis parte, habetur

$$-a^3 - 3m^2 ac = -125 - 45 = -170$$

Quod cum hypothesi minime convenit; deberet enim esse -135: proinde signum est, m sumptum esse justo minorem.

Ponatur $m = 2$, adeoque $m\sqrt{c} = 2\sqrt{3}$, erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 24\sqrt{3} + 6a^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

Div. per $\sqrt{3}$) $\quad 24 + 6a^2 = 78$

$$6a^2 = 54$$

$$a^2 = 9\text{, hinc } a = 3$$

Proinde pars rationalis $-a^3 - 3m^2ac = -27 - 108 = -135$. Quod quia cum hypothesi recte convenit; infertur, radicem cubicam $m\sqrt{c} - a = 2\sqrt{3} - 3$.

III. Sit binomium $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, cujus radix cubica quæritur. Habetur *per Propos.* 2. *Cap.* 4 $\sqrt{-\frac{100}{27}} = \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$. Hinc ponatur $3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}} = a + m\sqrt{c}$ radici, ex qua fiat cubus

$$a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$$

Et quia $\sqrt{c} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$, pars radicalis erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{-\frac{4}{3}} + m^3 \times -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}.$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{-\frac{4}{3}}$, oritur

$$3a^2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}\text{, \& } 3a^2 = \frac{9}{3}$$

$$a^2 = \frac{9}{9}\text{, \& } a = \pm 1$$

Quo valore substituto, habetur pars rationalis

$$a^3 + 3m^2ac = -1 + 4 = 3$$

Quod

Quod convenit cum hypothesi, unde radix quæsita $a + m\sqrt{c} = 1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$.

IV. Extrahenda sit radix cubica ex binomio, cujus utraque pars est irrationalis $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, quod *per Propos.* 2. *Cap.* 4. fit $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$.

Ponatur prima pars radicis $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, secunda vero $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$; adeoque tota radix erit $m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$, & cubus ex illa factus

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}$$

Atque hinc ob $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, erit una pars

$$m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, habetur

$$3 + 6n^2 = 9,\ \&\ 6n^2 = 6$$

hinc $n = 1$

Ideoque hoc valore in altero membro substituto, erit

$$3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

Quod sane cum hypothesi convenit, unde radix cubica qnæsita $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

COROLL. *Cum substituto valore provenit numerus numero rationali major (ut in secundo exemplo pro* — 135 *proveniebat* — 170) *signum est, valorem ipsum* m *sumptum esse justo minorem; adeoque sumendum alium illo majorem. Sin autem pro* — 135 *provenisset numerus minor, tunc esset indicium,* m *sumptum esse justo majorem; proinde si in primo casu fuit* m = 1, & *in secundo* m = 2, *sumi debet intermedium, hoc est* m = 1 $\frac{1}{2}$. *Quo facto, si res nec bene succedat, signum est, binomii radicem, qualis quæritur, non haberi. Cæterum valor ipsius* m *semper debet esse vel numerus integer, vel saltem integri dimidius.*

SCHOL.

SCHOL. I. *Si* m *non est pars aliquota quantitatis, quæ signo radicali præfigitur, radix cubica non obtinetur, quod advertatur.*

SCHOL. II. *Præclara hæc methodus est* Jo: Wallisii (*a*), *quæ, ut ipse ait, est cæteris longe simplicior. Nam quæ primum* a Francisco Schotenio (*b*), *deinde* a Jacobo Ozanam (*c*) *aliisque inde Scriptoribus tradita est regula, prolixior est, & plures exigit cautiones. Quæ autem traditur a* Wolfio (*d*) *per analysim, non modo prolixior est, sed æquationis cubicæ solutionem involvit, cujus radix non ita facile occurrit; imo illa, nisi sit rationalis, inveniri non potest. Ex hac vero methodo cito certi sumus, an radix quæsita ex binomio dato extrahi possit.*

SCOLL. III. *Pro facili & expedito examine radicis ex binomio cubico inventæ, satis erit investigare ejus partem rationalem tantum: quod fit addendo cubum partis rationalis ad triplum ejusdem partis multiplicatæ per quadratum partis alterius. Sic ex binomio* $78\sqrt{3} - 135$ *sit radix inventa* $2\sqrt{3} - 3$. *Adde cubum partis rationalis* -3, *scilicet* -27, *ad triplum ejusdem partis* -9 *multiplicatæ per quadratum partis alterius* 12, *nempe ad* -108, *summa dat* -135: *quod quia convenit cum parte rationali binomii dati; constat,* $2\sqrt{3} - 3$ *esse veram radicem. Cæterum radix cubica per superiorem* Wallisii *methodum inventa hoc examine probari non indiget, cum de ipsa aliunde certi simus.*

SCHOL. IV. *Quod si e binomio cubico radix extrahi nullo modo possit, & æquationis datæ radices per* Cardani *regulas expressæ valde implicatæ appareant, tunc præstat, ut* Franciscus Schotenius (*e*) *opportune admonet, æqua-*

(*a*) Algebra Cap. 47. Oper. Tom. 2. (*b*) Comment. Geometr. Cartes. edit. 3. pag. m. 389. (*c*) Nouveaux Elemens de Algeb. Cap. 5. Probl. VIII. (*d*) Elementa Analys. edit. 3. Probl. 169. (*e*) Comment. in lib. 3. Geom. Cartes.

æquationem illam ex sola sua constitutione innuere, quam ipsam confuse per easdem Cardani *formulas exprimere. Sic data æquatione* $x^3 = 8x + 24$, *ejus naturam facilius concipies, si dicas, radicem hujus æquationis* x *talem esse, ut si multiplicetur per* 8, *& insuper addantur* 24, *æqualis sit futura suo cubo* x^3, *quam si eamdem per* Cardani *formulam primam hoc modo exprimas*: $x = \sqrt[3]{12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. *Ec sic de aliis.*

PROBLEMATA CUBICA

PROBL. I.

Data summa duorum cuborum & differentia laterum, latera ipsa invenire.

Sit summa cuborum $= 2a$, latera $= 2x$, quorum differentia sit $= 2b$; erit latus majus $x + b$, minus $x - b$ *per Theor.* 3. *Cap.* 5. Cubi vero ex ipsis dant æquationem, quæ sequitur

$$2x^3 + 6b^2x = 2a$$

Div. per 2.

$$x^3 + 3b^2x = a$$

$$x^3 + 3b^2x - a = 0$$

Si fiat $a = 14$, $b = 1$; erit æquatio determinata

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Quæ resolvitur *per Propos.* 4. *hujus*. Nam assumendo quadratum 4, erit $4 + 3 = 7$; per quem dividendo 14, quotus 2 (radix quadrati assnmpti) dat radicem æquationis quæsitam. Erit ergo unum latus $x + b = 2 + 1$, alterum $x - b = 2 - 1$.

Brevius resolvitur *per Prop.* 5. *hujus*. Nam sumpta

pta radice cubica proxime minori ipsius 14, nempe 2, fit cubus 8, & facta hinc inde utriusque cubi subtractione, habetur statim $x = 2$

$$\begin{array}{ll} & x^3 + 3x = 14 \\ \textit{Subtr.} & x^3 \qquad\quad 8 \\ \hline & + 3x = 6 \\ & x = 2 \end{array}$$

PROBL. II.

Data summa duorum cuborum & rectangulo sub lateribus, invenire ipsa cuborum latera.

Sit cuborum summa $= 2a$, rectangulum ex lateribus $= 2b$, latus unum quæsitum $= x$, & alterum $= y$; erit $x^3 + y^3 = 2a$, & $xy = 2b$: hinc $y = \frac{2b}{x}$, & $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$ Et substituto in prima æquatione loco y^3 ejus valore, habetur

$$x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$$

$$\begin{array}{ll} & x^6 + 8b^3 = 2ax^3 \\ \textit{Mult. per } x^3 & x^6 - 2ax^3 = -8b^3 \end{array}$$

Quæ cun sit derivativa secundi gradus, si fiat $x^3 = z$, erit *per Prop.* 4. *Cap.* 8. æquatio

$$z^2 - 2az = -8b^3$$

Si supponatur $2a = 72$, & $2b = 8$, æquatio convertitur in sequentem

$$z^2 - 72z = -512$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Prop. 1. Cap. 8.} \quad \textit{adde} & 1296 \qquad 1296 \\ \hline & z^2 - 72z + 1296 = 784 \\ \textit{Extr. rad.} & z - 36 = \sqrt{784} \; (= 28) \\ & z = 36 + 28 = 64 \end{array}$$

Sed

Sed posita fuit $x^3 = z$; ergo $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Est ergo $x = 4$, & $y\ (= \frac{2b}{x}) = \frac{8}{4} = 2$.

P R O B L. III.

Invenire tres numeros arithmetice proportionales, quorum differentia & solidum ab illis factum sunt data.

Sit trium proportionalium quæsitorum differentia data $= d$, solidum $= s$, & numerorum quæsitorum primus $= x$, erit secundus $= x + d$, tertius $= x + 2d$ *per Schol.* 1. *Prop.* 3. *Cap.* 5., & solidum ab illis factum

$$x^3 + 3dx^2 + 2ddx = s$$

Auferatur secundus terminus *per Propos.* 5. *Cap.* 6. facto $x = y - d$, oritur æquatio

$$y^3 * - ddy = s$$

Proinde si supponatur $d = 3$, & $s = 28$, æquatio eadem erit

$$y^3 * - 9y = 28$$
$$y^3 - 9y - 28 = 0$$

Hæc autem facile resolvitur *per Prop.* 6. *hujus*. Fiat enim $p = 9$, $q = 28$; ex formula generali $x^3 - px \pm q = 0$ invenitur $y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \frac{3}{\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}}}$.

Ex hoc binomio cubico extracta radice *per Prop.* 10. *hujus*, habetur $y = 2 + \sqrt{1} + \frac{3}{2 + \sqrt{1}}$, factaque reductione, hoc est multiplicando primam partem per de-

denominatorem alterius, & addendo illi $\frac{1}{3}p$, seu (in hoc exemplo) 3, habetur $\frac{8+4\sqrt{1}}{2+\sqrt{1}}$. Fiat actu divisio *per Prop. 6. Cap.* 4. erit quotus 4. Est ergo $y = 4$; sed posita fuit $x = y - d$, unde erit $x = 4 - 3 = 1$. Sunt ergo numeri proportionales quæsiti 1, 4, 7, quorum solidum $= 28$.

COROLL. *Poterat quoque Problema resolvi* per Prop. 4. vel 5. hujus, *cum unam radicem rationalem habeat, ut patet: imo &* per Propos. 1. Cap. 7. *cum habeatur* 4 *unus ex ultimi termini divisoribus, positoque* $y = 4$, *tota æquatio evanescat. Malui tamen* per Prop. 6. hujus *illud resolvere, ut tyrones discant radices ex binomio cubico extractas reducere, & alia, in quibus difficultatem quandoque solent experiri.*

PROBL. IV.

Numerum 10 *ita dividere in quatuor partes geometrice continuo proportionales, ut si prima ducatur in* 8, *secunda in* 4, *tertia in* 3, *& quarta in* 1; *summa omnium fiat* 16.

SIt una dati numeri pars $= x$, & proportionis geometricæ denominator $= y$, erit ex prima problematis conditione $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$, & ex secunda $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$. Sumptoque ex utraque æquatione valore ipsius x, erit

$$x = \frac{10}{1+y+y^2+y^3},\quad x = \frac{16}{8+4y+3y^2+y^3}$$

Proinde $$\frac{10}{1+y+y^2+y^3} = \frac{16}{8+4y+3y^2+y^3}$$

Unde

Unde
$$y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$
$$1. \quad 3. \quad 9. \quad 27.$$
$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

Et dividendo per $y - 12$, nihil remanet, adeoque $y = 12$. Sed cum radix superioris equationis ad fractiones tollendas multiplicata sit per progressionem geometricam triplam; erit 12 triplum quæsitæ radicis: hinc posito in alterutra æquatione $y = 4$, erit $x = \frac{2}{17}$ prima pars quæsita, reliquæ vero $\frac{8}{17}$, $\frac{32}{17}$, $\frac{128}{17}$, quarum summa $\frac{170}{17} = 10$, & si singulæ ducantur in numeros imperatos, erit earum summa $\frac{272}{17} = 16$, ut patet.

SCHOL. *Problematis hujus auctor est* Lucas Paciolus (*a*) *a quo fuit particulari ratione per numeros determinatos solutum. Generalem ejusdem solutionem per Algebram tentavit* Joannes Camillus Gloriosus (*b*), *sed cum immenso pene calculo plures paginas implevisset, opus omnino non absolvit. Concinna hæc solutio ab* Antonio de Monforte (*c*) *tradita est.*

P R O B L. V.

Datis duabus rectis, alteram earum ita producere, ut alterius quadratum ad quadratum partis productæ eamdem rationem habeat, quam pars producta ad totam rectam.

SInt rectæ datæ a & b, & producatur b, cujus pars producta sit x; tota recta erit $b + x$, & ex conditione probl.

a^2

(*a*) Arithm. Quæst. 27. (*b*) Exercitat. Mathemat. 4. Neap. 1635. (*c*) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

$$a^2 . x^2 :: x . b + x$$

Theor. 4. *Cap.* 5. $x^3 = a^2 b + a^2 x$

$$x^3 - a^2 x - a^2 b = 0.$$

Sit $a = 2$, $b = 12$, æquatio fiet

$$x^3 - 4x - 48 = 0$$

Cujus resolutio facile obtinetur *per Prop.* 4. *vel* 5. *hujus*, ex quibus innotescit $x = 4$; unde $b + x = 16$. Quod si ponatur $a = 2$, $b = 5$, fiet æquatio, quæ nonnisi per Cardani regulas expeditur, nempe

$$x^3 - 4x - 20 = 0$$

Erit igitur $p = 4$, $\frac{1}{3} p = \frac{4}{3}$, & $\frac{1}{27} p^3 = \frac{64}{27}$. Item $q = 20$, $\frac{1}{2} q = 10$, $\frac{1}{4} qq = 100$. Hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{\tfrac{2636}{27}}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{\tfrac{2636}{27}}}$$

Hujus autem binomii cubici radix (si quidem extrahi possit) obtinebitur *per Prop.* 10. *hujus*

P R O B L. VI.

Invenire triangulum ABC, *cujus latera* AB, AC, BC, *& perpendiculum* DC *sint in arithmetica proportione*. Fig. 7.

Ponatur perpendiculum $CD = x$, differentia laterum trianguli $= d$, erit $BC = x + d$, $AC = x + 2d$, $AB = x + 3d$ *per Schol.* 1. *Propos.* 3. *Cap.* 5. Est autem $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.* Erunt proinde $AD = \sqrt{(\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2)}$, & $BD = \sqrt{(\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2)}$; adeoque $AD = \sqrt{}$

4dx

$\overline{4dx + 4d^2}$, & $BD = \sqrt{2dx + d^2}$; proinde tota AB $(= x + 3d) = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$

Fiat calculi commodo $x + 3d = m$, erit

$$m = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

$$m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$$

Elevetur utrumque membrum ad quadratum, ut radicales exterminentur *per Reg.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 5. erit

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$$

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

Elevato rursus ad quadratum utroque hujus æquationis membro, & facta terminorum reductione *per Lem. Cap.* 1. habetur

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0$$

Substitutis autem valoribus loco m^4, & m^2, factaque reductione *per Lem. cit.* invenitur tandem æquatio

$$x^3 - 24d^2x - 48d^3 = 0$$

Quæ quidem est eadem, quam innuit Newtonus (a) in hoc eleganti problemate, cujus ipse auctor est. Resolvitur autem ultimo *per Prop.* 8. *vel* 9. *hujus*. Nam fiat $d = 1$, $p = 24$, $\frac{1}{3}p = 8$, & $\frac{1}{27}p^3 = 512$: item $q = 48$, $\frac{1}{2}q = 24$, & $\frac{1}{4}qq = 576$, invenitur per Cardani formulas $x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV. Londini an. 1722.

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis, & aliis altiorum graduum.

SEcundus terminus, radicales, & fractiones supponuntur, si forte adsint, ad æquatione sublatæ per *Propos.* 2. 8. & 9. *Cap.* 7.

PROPOSITIO I.

Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.

SIt æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus secundo termino carentes

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Cum hæc concipi possit veluti orta ex duabus æquationibus secundi gradus, quas *Componentes* vocabimus, nempe

$$x^2 + yx + f = 0, \quad \& \quad x^2 - yx + g = 0$$

Fiat ex earum multiplicatione æquatio æqualis priori $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, secundo termino carens (ob terminos $+yx$, & $-yx$ contrario signo affectos) nimirum

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^2 - fyx + fg = 0 \\ + gx^2 + gyx \\ - y^2x^2 \end{array}$$

Comparentur æquationis utriusque termini; erunt tres æquationes

$$f + g - y^2 = p, \quad gy - fy = q, \quad \& \quad fg = r$$

Ex

Ex quibus efformari debet alia, in qua non occurrat ulla incognita præter y, quæ in utraque componente est secundi termini coefficiens.

Hinc quia $f+g-y^2=p$, erit quoque $f+g=p+y^2$; & multiplicando omnes terminos per y, fit

$$fy+gy=py+y^3$$

Sed habetur ex secunda æquatione $gy-fy=q$; ergo hæ duæ æquationes simul additæ efficiunt $2gy=py+y^3+q$. Si subtrahantur vero, fiunt $2fy=py+y^3-q$; unde eruuntur ipsarum f & g valores, scilicet

$$g=\frac{py+y^3+q}{2y},\ f=\frac{py+y^3-q}{2y}$$

$$fg=\frac{py+y^3-q}{2y}\times\frac{py+y^3+q}{2y}$$

$$fg=\frac{p^2y^2+2py^4+y^6-q^2}{4y^2}$$

Mult. per $4y^2$

$$4fgy^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

Erat autem $fg=r$; proinde si utrumque membrum multiplicetur per $4y^2$: erit $4fgy^2=4ry^2$; ideoque fiet

$$4ry^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

Et ordinata æquatione habetur æquatio generalis cubica, nimirum

$$\begin{array}{l}y^6+2py^4+p^2y^2-q^2=0\\ \qquad\qquad\ \ -4ry^2\end{array}$$

Quæ, licet sexti gradus esse appareat, habetur tanquam cubica, cum omnes incognitæ termini sint divisibiles per 2, & dicitur *Cubica derivata*, cui innititur æquationum omnium quarti gradus resolutio, ut per exempla, quæ sequuntur, planum fiet.

Coroll. I. *Cum æquatio hæc* Cubica derivata *sit generalis, utpote orta ex æquatione illa generali* $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, *quæ æquationes omnes quarti gradus repræsentare supponitur; hinc est, quod data quarti gradus æquatione speciali, poterit statim haberi ejus Cubica derivata, substituendo in cubica generali loco* p, q, & r *valores æquationis particularis datæ. Sit data æquatio* $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, *erit* $p = -4$, $q = -8$, & $r = 35$. *Positis his valoribus in cubica generali, habetur cubica derivata particularis* $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. *Similiter sit data æquatio* $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$; *erit* $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$. *Unde Cubica derivata erit* $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$. *Quæ quidem semper considerari poterit, ut simpliciter cubica, & tanquam mere cubica resolvi, secundo termino sublato. Nam si ponatur* $y^2 = z$, *fiet* $z^3 - 34z^2 + 313z - 400 = 0$, & *ob* $z = y^2$, *erit* $\sqrt{z} = y$.

Coroll. II. *Si in duabus illis componentibus* $x^2 + yx + f = 0$, & $x^2 - yx + g = 0$ *ponatur valor duarum indeterminatarum* f & g per hanc Propos. *inventus, oriuntur duæ æquationes*

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Quæ quidem, cognito valore y, *fiunt omnino cognitæ & determinatæ, ut patet.*

Schol. I. *Si in data æquatione particulari habeatur* $\pm$ p, *tunc in utraque harum duarum ponitur*

$\pm$

$+\frac{1}{2}p$. *Contra vero in utraque ponitur* $-\frac{1}{2}p$, *si æquatio particularis data habeat* $-p$.

SCHOL. II. *Si in data æquatione habeatur* $+q$, *tunc in una duarum, in qua scilicet habetur* $+yx$, *ponitur* $-\frac{q}{2y}$. *In altera, in qua est* $-yx$, *ponitur* $+\frac{q}{2y}$. *Contra vero si in data æquatione habeatur* $-q$, *ponendum est* $-\frac{q}{2y}$ *in illa, in qua habetur* $-yx$, & $+\frac{q}{2y}$ *in altera, ubi reperitur* $+yx$.

PROPOSITIO II.

Æquationes quarti gradus resolvere.

ÆQuatio data reducatur ad cubicam *per Cor.* 1. *Prop. præc.* & ex cubica derivata extrahatur radix *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. si sit rationalis, vel *per Propos.* 8. *aut* 9. si sit irrationalis. Radicis hujus cubicæ valor, tum etiam valores p & q æquationis datæ ponantur in duabus illis indeterminatis secundi gradus, quæ habentur in *Coroll.* 2. *Prop. præc.* Facile erit obtinere quatuor æquationis datæ radices, quemadmodum exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio, qua Cartesius (*a*) ipse utitur, $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, erit (facta comparatione cum formula generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$) $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, ejusque cubica derivata $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Inveniatur valor y *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. tollendo prius secundum terminum. Vel brevius reperiri potest, dividendo æquationem ipsam per aliquod quadratum, quod inter divisores ultimi termini exi-

 stat,

(*a*) Geometr. lib. III. edit. 3. pag. m. 80.

ſtat, ex. gr. per $yy - 16$. Sic enim diviſio exacte ſuccedit; unde $yy = 16$, & $y = 4$.

Hoc valore una cum valoribus p & q poſito in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, habentur duæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$ *per Coroll.* 2. *Prop. præc.* in quibus apparent ſigna + & −, ut docuimus *in Schol.* 1. *&* 2. *Prop. cit.* earumque reſolutio obtinetur *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8. Radices enim prioris ambæ negativæ ſunt $-2 + \sqrt{2}$, & $-2 - \sqrt{2}$; alterius vero affirmativæ $2 + \sqrt{7}$, & $2 - \sqrt{7}$.

II. Sit æquatio $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$: comparatis terminis cum formula generali, erit $p = -12$, $q = 12$, & $r = -3$; ejuſque cubica derivata $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* cujus radix invenitur *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. Vel brevius dividendo æquationem per aliquem ultimi termini diviſorem v. g. per $yy - 12$, per quem diviſio exacte ſuccedit. Eſt ergo $yy = 12$, & $y = 2\sqrt{3}$.

Ponatur hic valor ſimul, & valores p & q in duabus indeterminatis ſecundi gradus, ut factum eſt ſupra in primo exemplo; erunt duæ ſecundi gradus æquationes $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ *per Coroll.* 2. *&* *Schol.* 1. *&* 2. *Prop. præc.* Quarum radices facile obtinentur *per Prop.* 1. *Cap.* 8. addendo utrique quadratum quantitatis cognitæ ſecundi termini diviſæ per 2, nempe addendo + 3 (nam $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, cujus quadratum $= 3$) Prioris ergo radices ſunt $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$. Posteris vero sunt $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$, & $-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}$.

III. Sit æquatio $x^4-6x^2+12x-10=0$. Comparatis terminis cum formulæ generalis terminis, erit $p=-6$, $q=12$ & $r=-10$, & ejus cubica derivata $y^6-12y^4+76y^2-144=0$, seu $z^3-12z^2+76z-144=0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Hæc autem cum nullum divisorem admittat, indicio est, non habere valorem rationalem. Inveniatur ergo valor ejusdem *per Propos.* 8. *Cap.* 9. sed prius auferatur ab æquatione secundus terminus hoc pacto. Fiat $z-4=v$, erit $z=v+4$, factaque potestatum substitutione, habetur transformata secundo termino carens, scilicet

$$\begin{array}{r|l} z^3 & =v^3+12v^2+48v+64 \\ -12z^2 & -12v^2-96v-192 \\ +76z & +76v+304 \\ -144 & -144 \\ \hline \text{Summa} & \;\;v^3 \quad * \quad +28v+32=0 \end{array}$$

Ex hac æquatione eruitur valor v per *Schol. Propos.* 8. *Cap.* 9. nempe

$$v=\sqrt[3]{-16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}-\sqrt[3]{16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}$$

Sed posita fuit $z-4=v$; proinde erit

$$z=4+\sqrt[3]{-16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}-\sqrt[3]{16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}$$

Erat autem $y^2=z$; unde $y=\sqrt{z}$, atque hinc

$$y=\sqrt{2+\sqrt[3]{-16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}-\sqrt[3]{16+\sqrt{\frac{28864}{27}}}}$$

Hoc valore ipsius y simul cum valoribus p & q subrogatis in duabus illis æquationibus secundi gradus, ut in primo & secundo exemplo factum est, hæ determinantur *per Coroll.* 2. *Prop. præc.* & quatuor, quæ inde eruuntur radices, dant radices æquationis propositæ. Hoc autem cum calculum valde prolixum & permolestum exigat, necesse non erit ultra pergere: nam problemata, quæ ab æquationibus hujus generis dependent, ad Solidorum Geometriam amandantur.

COROLL. *Valor incognitæ* y *ex cubica derivata inventus vel rationalis est, ut in primo exemplo; vel radices quadraticas continet, ut in secundo; vel denique est irrationalis radicales cubicas involvens, ut in tertio. In primo & secundo casu æquatio quarti gradus dicitur* plana, *& in duas secundi gradus divisibilis est, ut vidimus. In tertio casu æquatio vere & proprie quarti gradus dicitur, ut & a nonnullis* affectionem cubicam *continere. Problema autem, ad quod solvendum ordinatur, dicitur* solidum, *quod non per regulam & circinum, sed per aliquam sectionem conicam, cujus ope radices exhibentur, construi tantummodo potest.*

PROPOSITIO III.

An biquadraticæ, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolvi possint.

CUm certum sit, biquadraticas, quæ duas radices reales & duas imaginarias habent, resolvi posse, ex eo quod tunc earum cubica derivata unam realem, & duas imaginarias radices contineat, adeoque solubilis sit *per Prop. 4. Cap. 9.*; cum tamen biquadratica quatuor imaginariis radicibus constat, tunc omnes ejus cubicæ derivatæ radices reales fiunt, proinde oritur dubium, an in eo casu resolvi valeat.

I. Sit igitur æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Comparentur hujus termini cum terminis formulæ generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$; erit $p = 1$, $q = 2$, $r = 6$, & ejus cubica derivata $y^6 + 2y^4$

$-23y^2-4=0$ *per Cor.* 1. *Prop.* 1. *hujus*. Hæc si dividatur per $yy-4$, nihil remanet; proinde $y=2$: quo valore una cum valoribus p & q in duabus componentibus *per Cor.* 2. *Propos. cit.* fiunt $x^2-2x+3=0$, & $x^2+2x+2=0$, earumque radices, ut ex signis patet, sunt imaginariæ; nempe $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$, & $-1+\sqrt{-1}$, $-1-\sqrt{-1}$.

II. Sit æquatio $x^4+70x^2-3744x+27993=0$: comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, ut supra, invenitur ejus cubica derivata *per Coroll.* 1. *Propos.* 1. *hujus* $y^6+140y^4-107072y^2-14017536=0$, & dividendo illam per $yy-324$, cum divisio exacte fiat, erit $yy=324$, & $y=18$; quo valore in duabus componentibus posito *per Coroll.* 2. *Propos. cit.* fiunt $x^2-18x+93=0$, & $x^2+18x+301=0$, ex quibus quatuor radices imaginariæ prodeunt, $9+\sqrt{-12}$, $9-\sqrt{-12}$, $-9+\sqrt{-220}$, $-9-\sqrt{-220}$.

Coroll. I. *Atque hinc patet, biquadraticas, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, sortiri posse cubicam derivatam, quæ radicem aliquam realem & rationalem contineat, quæ quidem vel per aliquem divisorem, vel per extractionem radicis ex binomio cubico obtineatur, tunc vero tam ipsam, quam biquadraticam optime posse resolvi. Quanquam biquadratica ejusmodi ad problematis solutionem, ad quod erat ordinata, inepta sit, cum nulla radix realis ad illud construendum assignari valeat, ut. Cartesius advertit.*

Coroll. II. *At generatim si cubica derivata talis sit, ut tres radices reales irrationales contineat, ita ut* casum irreductibilem *involvat, de quo* in Schol. 3. Propos. 9. Cap. 9. *tunc neque ipsa, neque biquadratica solvi poterunt, cum omnis æquationum quarti gradus reso-*

resolutio a cubicæ derivatæ solutione maxime pendeat, eique tanquam fundamento innitatur.

PROPOSITIO IV.

Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.

Alia quoque methodus æquationes biquadraticas resolvendi, & illas in duas planas secundi gradus dividendi, si divisibiles sint, excogitata fuit a Cl. Huddenio; quæ insuper id habet commodi, ut si adsit secundus terminus, nihil obstet.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus, etiam secundo termino præditas

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

Dividatur in duas partes, ita ut altera contineat $x^4 + px^3$, altera $x^2 + rx + s$, utraque scilicet parium dimensionum potestates x^4, & x^2, erit

$$x^4 + px^3 = - qx^2 - rx - s$$

Ut prima pars quadratum fiat, ponatur radix $x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} y$, ejus quadratum erit

$$\begin{aligned} x^4 + px^3 + \tfrac{1}{4} p^2 x^2 &+ \tfrac{1}{2} pyx + \tfrac{1}{4} yy \\ &+ yx^2 \end{aligned}$$

Quod quidem alteri quoque æquationis parti addatur, omissis $x^4 + px^3$, cui æqualis supponitur $- qx^2 - rx - s$; ita ut loco $x^4 + px^3 = - qx^2 - rx - s$ habeatur

$$\begin{aligned} x^4 + px^3 + \tfrac{1}{4} p^2 x^2 + \tfrac{1}{2} pyx + \tfrac{1}{4} yy &= - qx^2 - rx - s \\ yx^2 \qquad\qquad\qquad &\quad \tfrac{1}{4} p^2 x^2 + \tfrac{1}{2} pyx + \tfrac{1}{4} yy \\ &\quad yx^2 \end{aligned}$$

Cum

Cum igitur prima pars sit quadratum, altera quoque pars quadrato æquari debet. Ponatur, hujus radix esse $vx + z$; ejus quadratum erit $vvx^2 + 2vzx + zz$; utque habeantur valores v, & z, fiat terminorum comparatio; erit

$$vv = \tfrac{1}{4}pp - q + y, \ \& \ v = \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}$$

$$2vz = \tfrac{1}{2}py - r, \ \& \ z = \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2v},$$ hoc est

$$z = \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}}.$$ Proinde radix $vx + z$ erit

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}},$$ cujus quadratum

$$\overline{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \times xx + \overline{\tfrac{1}{2}py - r} \times x + \frac{\tfrac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y}$$

Comparando jam hujus quadrati terminos cum terminis quadrati secundæ partis præcedentis æquationis, destruuntur termini similes, & remanet

$$\frac{\tfrac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y} = \tfrac{1}{4}yy - s$$

Factaque multiplicatione, & ordinata æquatione, oritur cubica generalis

$$y^3 - qyy \begin{array}{l} -4sy \\ +pry \end{array} \begin{array}{l} -pps \\ +4qs \\ -rr \end{array} = 0$$

Cujus valoribus p, q, r, s per coefficientes æquationis specialis datæ determinatis, quæritur valor ipsius y. Quo invento, si rationalis sit, poterunt ejusdem ope determinari duæ sequentes æquationes secundi gradus, quæ ex æqualium quadratorum radicibus componuntur, & per illas æquatio proposita dividi, ut, quæ inferius sequuntur exempla, rem ostendunt.

$$x^2 + \frac{1}{2}px + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}px - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} = 0$$

I. Data sit æquatio $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$; erit $p = -1$, $q = -3$, $r = 1$, $s = 2$, quibus valoribus in cubica generali positis, fit $y^3 + 3y^2 - 9y - 27 = 0$, quæ si dividatur per $y + 3$, nihil remanet; est ergo $y = -3$, qui valor, cum sit rationalis, indicio est, æquationem datam in duas secundi gradus esse divisibilem. Ponatur igitur hic valor una cum valoribus p, q, r in duabus præcedentibus secundi gradus; eruitur ex prima $x^2 - 1 = 0$, ex altera $x^2 - 1x - 2 = 0$, & per utramque æquatio data dividi potest, ut patet.

II. Sit Cartesii æquatio a nobis allata *in Propos. præc.* $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$. Erit $p = 0$, $q = -17$, $r = -20$, $s = -6$; & per hos valo-

valores cubica generali determinata, invenitur $y^3 + 17y^2 + 24y + 8 = 0$, quæ si dividatur per $x + 1$, nihil remanet. Est ergo $y = -1$, & hoc valore in duabus secundi gradus substituto, inveniuntur $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$, omnino ut antea per Cartesii regulam.

Coroll. *Si valor ipsius* y *ex cubica inventus non sit rationalis, æquatio proposita quarti gradus non erit divisibilis in duas secundi gradus, sed problema erit solidum.*

Schol. *Cum præclaræ hujus methodi artificium* Huddenius *nobis occultum reliquerit, illud* Antonii de Monforte *solertia detexit* (a). *Quod & nos, paucis mutatis, hoc loco referre in laudem Cl. Viri de Mathesi optime meriti, æquum duximus.*

PROPOSITIO V.

Æquationem biquadraticam puram, vel secundo & quarto termino carentem solvere.

I. Sit æquatio biquadratica pura $x^4 = q$, vel $x^4 = -q$. Extrahatur primo radix quadrata; erit $x^2 = \sqrt{q}$, vel $x^2 = \sqrt{-q}$. Deinde iterum extrahatur eadem radix; & habebitur $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, vel $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Sit ex. gr. $x^4 = 50$, erit $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; extractaque rursus radice, erit $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

II. Si in æquatione biquadratica, præter secundum terminum, desit etiam quartus (sæpe fit, ut auferendo secundum terminum, quartus quoque evanescat) ut $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$; facile erit eam resolvere, ut derivativam secundi gradus *per Prop.* 4. *Cap.* 8.

Coroll.

(a) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

Coroll. *Omnes ergo biquadraticæ, quæ primum & ultimum terminum tantum habent, vel quæ termino secundo, & quarto carent, ab omni affectione cubica sunt immunes, & in duas secundi gradus dividi possunt.*

Schol. Raphael Bombelli ([a]) *Bononiensis anno* 1579. *æquationes biquadraticas resolvendi methodum in sua Algebra tradidit, sed a* Ludovico de Ferrariis *eam accepisse, ferunt. Quicquid sit, Italorum hominum ingenium & gloria fuit hucusque progredi* ([b]). *Post* Vietam Cartesius *nova sua methodo mirum quantum illam illustraverit, quem deinde secuti sunt ducem quotquot de Analysi scripserunt. Cæterum majores nostri ultra æquationes biquadraticas non sunt progressi, summam rei difficultatem prospicientes. Recentiores aliqui generalem æquationes quascunque resolvendi methodum tradiderunt; non advertentes fortasse, eam methodum inutilem jure censeri, quæ immensum (quod ipsi fatentur) & inexplicabilem fere calculum postulat. Nos dumtaxat de reductione æquationum quarti, quinti, & sexti gradus paulo post agemus: quæ si reducibiles sint, facile possunt per ea, quæ de cubicis & biquadraticis diximus, resolvi. Sin autem reduci non poterunt, saltem constabit, problema, ad quod illæ ordinantur, esse solidum, & nonnisi per Sectiones Conicas resolvendum. Sed tyronum studio obsequentes nonnulla quarti gradus problemata ad eorum ingenii exercitationem præmittimus.*

PRO-

(*a*) Algebra lib. 2. pag. 353. Wallisii Algeb. cap. IV. pag. 229.
(*b*) Histoire de l'Acad. Royale des scien. an. 1705. p. m. 103.

PROBLEMATA QUARTI GRADUS

PROBL. I.

Numerum datum in duos ita dividere, ut eorum quadrata inter se multiplicata producant numerum æqualem numero dato c.

Esto numerus datus dividendus $= 2a$, & partium differentia $= 2x$; erit pars major $a + x$, minor vero $a - x$ *per Theor.* 3. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Et ex conditione problematis habetur

$$\overline{a + x}^2 \times \overline{a - x}^2 = c$$
$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$$

Brevitatis gratia, ut quantitates a & c determinentur, pono $2a = 14$, & $c = 2304$; erit æquatio, & quidem derivativa secundi gradus, facile resolvenda *per Prop.* 4. *Cap.* 8.

$$\begin{array}{llll} & x^4 - 98x^2 + 2401 & = & 2304 \\ & x^4 - 98x^2 & = & -97 \\ \textit{adde} & \quad 2401 & & 2401 \\ \hline & x^4 - 98x^2 + 2401 & = & 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Extr. rad.} & x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48 \\ & x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1} \\ & x = 1 \end{array}$$

Unde $a + x = 8$, & $a - x = 6$, quorum quadratis invicem multiplicatis æquatur $c = 2304$.

PRO-

P R O B L. II.

Invenire quatuor numeros in continua proportione arithmetica, qui inter se multiplicati faciant numerum a.

POne numerum datum $a = 100$, & terminorum differentiam $= d$. Sit primus terminus x, erit secundus $x + d$, tertius $x + 2d$, & quartus $x + 3d$ *per Sch.* 1. *Prop.* 3. *Cap.* 5. quibus invicem multiplicatis, habetur æquatio

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0$$

Inventis autem *per Prop.* 9. *Cap.* 1. ultimi termini divisoribus 1, 2, 4, 5 &c. tentetur divisio per $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 4$ &c. quæ non succedit sine residuo. Tollatur secundus terminus æquationis *per Propos.* 5. *Cap.* 7. Quamobrem fiat $x = z - \frac{3}{2} d$; æquatio transformabitur in sequentem derivativam secundi gradus, quæ secundo & quarto termino caret, nempe

$$z^4 * - \frac{5}{2} d^2z^2 * + \frac{9}{16} d^4 - 100 = 0$$

Proinde si ponatur $d = 1$, erit

$$z^4 - \frac{5}{2} z^2 = 99 \frac{7}{16}$$

adde $$\frac{25}{16} \qquad \frac{25}{16}$$

$$z^4 - \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{16} = 101 \frac{}{}$$

Extr. rad.

$$z^2 - \frac{5}{4} = \sqrt{101}$$

$z^2 =$

$$z^2 = \tfrac{5}{4} + \sqrt{101}$$

Extr. rad. $z = \sqrt{\tfrac{5}{4} + \sqrt{101}}$

Sed posita fuit $x = z - \frac{3}{2}d$; erit ergo primus terminus quæsitus $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2}$, secundus $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{1}{2}$, tertius $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{1}{2}$, quartus $x + 3d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{3}{2}$. Factum ex primo & quarto est $-1 + \sqrt{101}$, factum vero ex secundo & tertio est $+1 + \sqrt{101}$ *per num.* 4. *Propos.* 12. *Cap.* 4. Atque hinc $\overline{-1 + \sqrt{101}} \times \overline{+1 + \sqrt{101}} = 100$.

Sit iterum $a = 100$, $d = 2$; æquatio superior fiet $z^4 - 10z^2 - 91 = 0$, seu

$$z^4 - 10z^2 = 91$$

adde $\qquad 25 \qquad 25$

$$z^4 - 10z^2 + 25 = 116$$

Extr. rad. $z^2 - 5 = \sqrt{116}$

$$z^2 = 5 + \sqrt{116}$$

$$z = \sqrt{5 + \sqrt{116}}$$

Sed $x = z - \frac{3}{2}d$; ergo primus terminus pro-

R por-

portionalis erit $x = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 3$, secundus $x + d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 1$, tertius $x + 2d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 1$, quartus $x + 3d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 3$. Proinde factum ex primo & quarto est $-4 + \sqrt{116}$, factum vero ex secundo & tertio $+4 + \sqrt{116}$ *per Propos. citat.*; adeoque $\overline{-4 + \sqrt{116}} \times \overline{+4 + \sqrt{116}} = 116 - 16 = 100$.

PROBL. III.

Tres numeros invenire, quorum quadrata sint harmonice proportionalia.

Sit quæsitorum primus 1, secundus x, tertius $x + 1$, eorumque quadrata 1, xx, $x^2 + 2x + 1$: quæ cum sint ex hypothesi harmonice proportionalia, erit maximum ad minimum, ut differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi, nimirum

$$x^2 + 2x + 1 \,.\, 1 :: 2x + 1 \,.\, xx - 1$$

Et multiplicatis mediis & extremis, habetur

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 2x + 1$$
$$x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0$$

Quæ quidem æquatio cum per nullum binomium divisibilis sit, tentanda est solutio *per Propos.* 4. *hujus*.

Sit igitur $p = 2$, $q = 0$, $r = -4$, $s = -2$: positisque his valoribus in cubica generali, oritur $y^3 - 8 = 0$, hoc est $y = 2$. Quo valore una cum valoribus p, r, s substituto in duabus secundi gradus æquationibus, fiunt

$x^2 +$

$$x^2 + 1x + 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 0, \ \& \ x^2 + 1x + 1 - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0$$
$$+ \sqrt{3} \times x \qquad\qquad\qquad - \sqrt{3} \times x$$

Cum autem ex neutra habeatur radix, quæ numeris explicari possit, ut evidens est, aliam viam, quam Jacobus de Billy (a) innuit ex Diophanti methodo, ingredimur, & est hujusmodi.

Inveniantur duo numeri quadrati tales, ut eorum differentia addita majori faciat quadratum. Ponantur, ut supra, quadrata $x^2 + 2x + 1$, & xx, quorum differentia $2x + 1$ addita majori, fit $x^2 + 4x + 2$. Cum autem hæc summa debeat æquari quadrato, si pro ejus latere sumatur $x - 2$; erit $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$; & sublatis utrinque terminis similibus, habetur $x = \frac{1}{4}$: quo valore in duobus quadratis assumptis posito, erunt $\frac{25}{16}$ & $\frac{1}{16}$, seu in integris 25 & 1, quorum differentia 24 majori quadrato addita facit quadratum 49, ut patet. Jam igitur numeri quadrati harmonice proportionales ab initio positi 1, xx, $x^2 + 2x + 1$ erunt 1, xx, $25xx$; adeoque $25xx . 1 :: 24xx . xx - 1$; & multiplicatis tum mediis, tum extremis, oritur $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$, seu $25x^2 = 49$, hoc est $x^2 = \frac{49}{25}$, & $25x^2 = \frac{1225}{25}$; proinde numeri quæsiti sunt 1, $\frac{49}{25}$, & $\frac{1225}{25}$, vel in integris 25, 49, 1225.

COROLL. *Si pro quadrati latere* x — 2, *ponatur* x — 3, *vel* x — 4 *&c. invenientur alii atque alii in infinitum tres numeri quadrati harmonice proportionales, ut supra.*

(a) Diophanti Redivivi p. 2. Probl. xvx.

SCHOL. *Duo hic notent tyrones : 1.° Hujus problematis solutionem ab ea conditione necessario pendere, ut duorum quadratorum, quæ assumuntur, differentia majori quadrato addita quadratum efficiet : 2.° Non esse omnino desperandum de solutione problematis, quæ primo impossibilis videatur ; nam si nequit per unam methodum, per aliam sæpe satis commode expeditur.*

PROBL. IV.

In rectangulo datis areæ & diametri aggregato, & differentia laterum, invenire latera, diametrum, & aream. Fig. 8.

SIt areæ & diametri summa = a, differentia laterum = $2d$, quæsitorum eorumdem laterum summa = $2x$; erit latus minus $AB = x - d$, majus vero $BC = x + d$ per *Theor.* 3. *Propos.* 3. *Cap.* 5. & ex eorum facto innotescit rectanguli BD area = $x^2 - d^2$, quæ si auferatur ex summa data = d, prodit diameter $AC = a - x^2 + d^2$.

Cum igitur sit $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ per *Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.*, erit in terminis analyticis

$$\overline{a - x^2 + d^2}^2 = \overline{x + d}^2 + \overline{x - d}^2$$

$$a^2 - 2ax^2 + 2ad^2 + x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = 2x^2 + 2d^2$$

$$\begin{aligned} x^4 - 2d^2x^2 &= 2d^2 - 2ad^2 - d^4 - a^2 \\ - 2ax^2 & \\ - 2x^2 & \end{aligned}$$

Et si ponatur $a = 58$, $d = 1$, æquatio determinabitur, nempe

$$x^4 - 120x^2 = -3479$$

Prop. 4. *Cap.* 8. $\quad 3600 \qquad 3600$

x^4 —

$$x^4 - 120x^2 + 3600 = 121$$

Extr. rad. $x^2 - 60 = \pm\sqrt{121}$

$$x^2 = 60 - 11 = 49$$

Extr. rad. $x = 7$

Erit ergo latus minus $x - d = 6$, majus $x + d = 8$, & area rectanguli $= 48$, quæ detracta ex aggregato areæ & diametri a ($= 58$), relinquit diametrum $= 10$, ut evidens est.

PROBL. V.

Data summa laterum trianguli, dataque ratione summæ quadratorum, quæ fiunt a lateribus, ad aream ejusdem trianguli, reperire latera. Fig. 9.

Pone summam laterum datam $= 2a$, atque hinc sume basim $AB = b$; erit aggregatum reliquorum $AC + CB = 2a - b$. Esto ex illis unum $AC = x$; erit aliud $2a - b - x$. Ratio vero summæ quadratorum ad trianguli aream ponatur, ut m ad n, sive 8 ad 1.

Ut inveniatur trianguli ipsius area, subtrahe ex semisumma laterum $= a$ singula trianguli ejusdem latera; erunt tres differentiæ $a - b$, $a - x$, $- a + b + x$: ex quarum facto ducto in semisummam laterum, obtinetur trianguli area per ea, quæ diximus *in Probl.* 4. *Cap.* 8. nempe

$$\sqrt{-a^4 + 2a^3 b + 2a^3 x - 3a^2 bx - a^2x^2 - a^2b^2 + ab^2x + abx^2}$$, quam voco g.

Summa vero quadratorum ex lateribus ejusdem trianguli erit

$$2x^2 + 2bx - 4ax + 2b^2 - 4ab + 4a^2$$, quam voco f.

Est autem ex conditione problematis

$$f . g :: m . n$$

Th. 6. Prop. 3. Cap. 5. $f^2 . g^2 :: m^2 . n^2$

Theor. 4. Propos. cit. $f^2 \times n^2 = g^2 \times m^2$

Positis proinde valoribus m^2, n^2, f^2, & g^2, factaque de more reductione, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 &+ 24a^2x^2 - 40a^3x - 40a^3b = 0 \\ + 2bx^3 &- 24abx^2 + 60a^2bx + 24a^2b^2 \\ &+ 3b^2x^2 - 24ab^2x - 4ab^3 \\ &\qquad + 2b^3x + 20a^4 \\ &\qquad\qquad + b^4 \end{aligned}$$

Jam si ponatur $a = 6$, & $b = 3$, prodit eadem æquatio determinata $x^4 - 18x^3 + 459x^2 - 3402x + 7209 = 0$. Hæc autem cum per nullum binomium dividi possit sine residuo, quærenda est, sublato secundo termino, ejus solutio *per Propos. 2. vel 3. hujus*:

Quod si manentibus, ut prius, $a = 6$, $b = 3$; fiat $m . n = 8\frac{1}{3} . 1$, seu $m . n = 25 . 3$, eademque methodo procedatur; invenietur æquatio determinata

$$\begin{array}{ccccc} x^4 - 18x^3 & + 483\frac{1}{4}x^2 & - 3622\frac{1}{2}x & + 7650 = 0 \\ 1. \quad 4. & 16. & 64. & 256. \\ \hline z^4 - 72z^3 & + 7736z^2 & - 231840z & + 1958400 = 0 \end{array}$$

Quæ si dividatur per $z - 16$, nihil remanet; est ergo $z = 16$. Sed ob progressionem geometricam quadruplam, qua multiplicatæ sunt radices prioris æquationis, erit $4x = z$, seu $4x = 16$, & $x = 4$. Proinde latus quæsitum $AC = 4$.

PRO-

PROBL. VI.

Datis, quadrato AC, *& recta* M *producere latus* DC *in* E, *ita ut ex angulo* A *ducta* AE, *pars intercepta* EF *æqualis sit datæ* M. Fig. 24.

SIt AB, vel $BC = a$, $BF = x$; erit $FC = a - x$. Sit M (ex hypothesi $= FE$) $= c$. Ob triangula similia CFE, & AFB, erit $CF\ (a - x) . FE\ (c) :: FB\ (x) . AF\ \frac{cx}{a - x}$. Et ob triangulum ABF rectangulum, est $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, hoc est $\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx$; atque hinc oritur

$$x^4 - 2ax^3 + 2aax^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$
$$ - ccx^2$$

Ut tollatur secundus terminus, fiat $x - \frac{1}{2}a = z$; oritur

$$z^4 + \frac{1}{2}aaz^2 - a^3z + \frac{5}{16}a^4 = 0$$
$$ - ccz^2 - accz - \frac{1}{4}aacc$$

Invenienda modo est ejus cubica derivata *per Prop.* 1. *hujus, ejusque Coroll.* proinde necesse est nosse, an termini hujus biquadraticæ sint cum signo $+$, vel $-$. Quod ex ipsis dati problematis conditionibus expiscari debemus; hoc est videndum, an $a > c$, vel contra $c > a$. Certum est, $FE\ (= M)$ esse $> AB$, vel BC; adeoque $c > a$, item $cc > aa$, & multo magis $cc > \frac{1}{2}aa$, Igitur tertius æquationis datæ terminus est negativus, nempe $\frac{1}{2}aa - cc = -p$. Similiter

$+ a^3 - acc = - q$. Demum quia $cc > aa$, erit $cc > \frac{5}{4} aa$, & multiplicando utrinque per aa, erit $aacc > \frac{5}{4} a^4$, & $\frac{1}{4} aacc > \frac{5}{16} a^4$; unde ultimus terminus est negativus, nempe $\frac{5}{16} a^4 - \frac{1}{4} aacc = - r$. Omnes ergo biquadraticæ termini sunt cum signo $-$. Nimirum $2p = aa - 2cc$, $p^2 - 4r = - a^4 + c^4$, $- q^2 = - a^6 - 2a^4 cc - aac^4$. Quibus in cubica generali derivata positis, habetur *per Propos. cit.*

$$\begin{array}{llll} y^6 + aay^4 & - a^4y^2 & - a^6 & = 0 \\ - 2ccy^4 & + c^4y^2 & - 2a^4cc & \\ & & - aac^4 & \end{array}$$

Jam videndum, an hæc divisibilis sit per aliquem ultimi termini divisorem sine residuo. Divisores sunt a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$ *per Propos.* 9. *Cap.* 1. Divisio tentari potest per $yy - aa$, vel $yy - aa - cc$. Et quidem dividendo per hunc secundum, nihil remanet. Quotus autem est $y^4 - ccy^2 + 2aay^2 + a^4 + aacc = 0$, unde patet, cubicam derivatam conflari ex duabus æquationibus, una secundi, altera quarti gradus. At nobis satis est æquatio secundi gradus $yy - aa - cc = 0$; unde habemus valorem ipsius y, hoc est $y = \pm \sqrt{aa + cc}$, qui valor substituendus est in his duabus indeterminatis secundi gradus *per Propos.* 1. *hujus* cum notis & observationibus *Sch.* 1. & 2.

$$1.^a \quad z^2 + yz + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 - yz + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p + \frac{q}{2y} = 0$$

Substituto valore ipsius y, cum valoribus p & q, erit

$$1.^a \; z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4} aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

$$2.^a \; z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4} aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$$

Multiplicando autem tam numeratorem, quam denominatorem fractionis $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ per $\sqrt{aa+cc}$, remanet idem valor, & prodit $\frac{a^3\sqrt{aa+cc} + acc\sqrt{aa+cc}}{2aa+2cc}$; & dividendo hanc per $aa+cc$; erit $\frac{a\sqrt{aa+cc}}{2}$, seu $\frac{1}{2} a\sqrt{aa+cc}$, quæ ponenda est in duabus illis secundi gradus loco ipsius $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$: adeoque fiunt

$$1.^a \; z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4} aa - \frac{1}{2} a\sqrt{aa+cc} = 0$$

$$2.^a \; z^2 + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4} aa + \frac{1}{2} a\sqrt{aa+cc} = 0$$

Ex

Ex utraque obtinetur duplex valor ipsius z per *Prop.* 1. *Cap.* 8. si disponantur termini, ut moris est, & addatur utrinque quadratum semicoefficientis secundi termini. Sic ex priori

$$z^2 - z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = -\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$$

Extracta radice secunda, habetur duplex valor, nempe

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Et quia positum fuit $x - \frac{1}{2}a = z$, adeoque $x = z + \frac{1}{2}a$, si valori invento ipsius z addatur $+\frac{1}{2}a$; habebitur valor ejusdem x, qui maxime quærebatur, nimirum

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Qui duo valores ipsius x dant longitudinem quæsitam *BF*; & sunt iidem, qui nobis a Cartesio (a) paucissimis verbis indicantur; sed tyronibus ob multiplicem Asymmetriam non ita facile occurrunt.

Schol. I. *Breviorem aliam præclari hujus problematis solutionem, quæ secundi gradus æquationem non excedit, trademus inferius, ubi de Geometrica æquationum Constructione* Cap. 12. *agetur.*

Schol. II. *Si loco quadrati detur rectangulum* ABCD, *ex cujus angulo* A *ducenda sit recta æqualis datæ* M, *ut supra; tunc problema esset solidum. Sit enim* AB = a, BC = b, EF = c, & BF = x; *erit* CF = b − x: *ob triangula* CFE, BFA *similia*, AF = $\frac{cx}{b-x}$, & $\overline{AF}^2$

(a) Geometr. lib. 3. pag. 83.

$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, hoc est $\frac{ccxx}{b^2 - 2bx + x^2} = aa + xx$: *unde prodit biquadratica priori similis, sed quæ nullo modo divisibilis est in duas secundi gradus, adeoque in problema solidum transit. Hinc* Pappus Alexandrinus (*a*) *hoc ipsum problema resolvit per hyperbolam intra Asymptotos, & Circulum.*

DEFINITIONES.

I. OMnis æquatio composita *Reducibilis* dicitur, quæ per æquationes inferioris gradus exacte dividi, & ad inferiorem gradum deprimi potest. Sic æquatio quinti gradus, quæ dividi potest exacte per duas æquationes inferiores, alteram secundi & alteram tertii gradus, dicitur *Reducibilis*.

2. Æquatio composita, quæ per nullam æquationem inferioris gradus est divisibilis, dicitur *Irreducibilis*. Ut æquatio sexti gradus, quæ nec per duas æquationes, unam secundi, alteram quarti gradus, nec item per duas tertii gradus dividi exacte potest, dicitur *Irreducibilis*.

SCHOL. *Reductio, de qua hic agimus, eo tendit, ut dignoscatur, an data æquatio deprimi possit ad gradum inferiorem; quod fiet, si illa sit exacte divisibilis in alias æquationes inferioris gradus. Sic ex. gr. æquatio quinti gradus deprimitur ad unam cubicam & alteram secundi gradus, si exacte valeat in illas duas dividi. Sine hac doctrina haud satis distingueretur natura æquationum & problematum, unde ipsæ æquationes oriuntur: Nam problemata inferioris gradus facile confunderentur cum iis, quæ sunt superioris ordinis, & horum instar resolverentur, quod est absurdum. Utimur autem methodo generali & pulcherrima; digna sane, cui tyrones satis diligenter incumbant.*

(*a*) Mathemat. Collect. lib. 4. Prop. 31.

PRO-

PROPOSITIO VI.

An æquatio biquadratica reducibilis sit, explorare.

Sit æquatio quarti gradus indeterminata, & generalis omnes alias repræsentans $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$: quæritur, an dividi possit exacte in duas alias secundi gradus, & quænam illæ sint?

Concipiatur illa orta ex duabus indeterminatis secundi gradus $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + i = 0$, quæ si invicem multiplicentur, oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gx^2 + ghx + ig = 0 \\ \quad\;\; + hx^3 + fhx^2 + ifx \\ \qquad\qquad + ix^2 \end{array}$$

Comparentur termini utriusque æquationis, & fiant æquationes particulares: erit

1.^{a} $f + h = p$; 2.^{a} $g + fh + i = q$; 3^a $gh + if = r$; 4.^{a} $ig = s$.

Sumatur ex prima valor h, erit $h = p - f$, & ex quarta valor $i = \frac{s}{g}$, qui duo valores substituantur in tertia æquatione loco h & i; fiet $pg - fg + \frac{fs}{g} = r$; & multiplicando per g, erit $pgg - fgg + fs = rg$, hoc est $fs - fgg = rg - pgg$; unde habetur $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$.

Cujus valor, ut plane innotescat, innotescere debet g. Est autem ex quarta æquatione $ig = s$; proinde g est unus ex divisoribus ultimi termini cogniti s, quo cum signo $+$ vel $-$ dividi potest exacte ultimus terminus s. Tentandi sunt igitur sub utroque signo $\pm$ singuli divisores, ut docuimus *Propos.* 1. *Cap.* 7. Sed exemplo res illustrabitur.

I. Sit

I. Sit æquatio data $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$; erit $p = -4$, $q = -10$, $r = -28$, $s = -8$. Ut inveniatur quantitas g, tentandi sunt omnes divisores ultimi termini -8 sub utroque signo, nempe ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Ponatur primo, esse $g = 1$; erit ex superiori formula $f = \frac{-28 + 4}{-8 - 1} = \frac{-24}{-9} = \frac{8}{3}$. Item $h = -4 - \frac{8}{3} = -\frac{20}{3}$, & $i = -8$. His autem valoribus positis in duabus indeterminatis $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + i = 0$, fiunt $x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$, & $x^2 - \frac{20}{3}x - 8 = 0$; per quas si dividatur æquatio data $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$, divisio exacte non succedit. Non est igitur $g = 1$, ut fuit suppositum.

Neque item divisio succedit, si ponatur $g = -1$, vel $g = +2$, vel $g = -2$; bene tamen si ponatur $g = 4$: tunc enim erit $f = 2$, $h = -6$, & $i = -2$. Quibus valoribus in duabus illis æquationibus secundi gradus substitutis, habentur $x^2 + 2x + 4 = 0$, & $x^2 - 6x - 2 = 0$, per quas æquatio data exacte dividitur, ejusque radices ex resolutione duarum illarum secundi gradus facile obtinentur *per Propos.* 2. *Cap.* 8. nempe $x = -1 \pm \sqrt{-3}$, & $x = 3 \pm \sqrt{11}$.

II. Sit æquatio $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, ea ipsa, quam Newtonus in Arithm. Univers. etiam per *Divisores surdos* resolvit. Concipiatur orta ex duabus illis indeterminatis secundi gradus $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + i = 0$. Inventum jam fuit supra $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$, $h = p - f$, $i = \frac{s}{g}$. Comparatis autem æquationis datæ terminis cum formula generali, habetur $p = -1$, $q = -5$, $r = 12$, $s = -6$; & ultimi termini (-6) divisores, ex quibus g (ob

$ig = s$) est unus, sunt 1, 2, 3, 6, qui ponantur singulatim in superiori formula loco g cum signo $\pm$. Et cum frustra adhibeantur ± 1, ± 2, pono ipsum $g = 3$; unde $f\left(= \frac{rg - pgg}{s - gg}\right) = \frac{36 + 9}{-6 - 9} = \frac{45}{-15} = -3$: item $h(= p - f) = -1 + 3 = 2$, & $i\left(= \frac{s}{g}\right) = \frac{-6}{3} = -2$. Per hos valores determinatis duabus secundi gradus æquationibus, habetur $x^2 - 3x + 3 = 0$, & $x^2 + 2x - 2 = 0$, quæ æquationem datam exacte dividunt, earumque radices $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$, & $x = -1 \pm \sqrt{3}$ quatuor æquationis datæ radices exhibent.

Coroll. *Substitutis ipsarum* f, g, h, & i *valoribus in duabus illis secundi gradus æquationibus, si æquatio data per neutram possit exacte dividi, signum est, eam esse irreducibilem. Tunc autem ejus solutio quærenda est* per Prop. 2. hujus, *cum ex natura sua biquadratica sit: quemadmodum cubicas, quæ deprimi nequeunt ad gradum inferiorem, per* Cardani *regulas solvimus.*

PROPOSITIO VII.

An æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes quinti gradus æquationes $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$: quæritur, an exacte dividi possit in alias duas inferioris gradus, alteram scilicet secundi, alteram tertii gradus, & quænam sint tales æquationes? Supponantur, illæ duæ æquationes esse $x^2 + fx + g = 0$, & $x^3 + hx^2 + ix + l = 0$, ex quarum facto habetur æquatio priori ex hypothesi æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^5 + fx^4 + ix^3 + lx^2 + flx + gl = 0 \\ \quad + hx^4 + gx^3 + ghx^2 + gix \\ \qquad + fhx^3 + fix^2 \end{array}$$

Comparatis terminis, habentur quinque æquationes: 1.ª $f + h = p$; 2.ª $i + g + fh = q$; 3.ª $l + gh + fi = r$; 4.ª $fl + gi = s$; & 5.ª $gl = t$.

Ex prima æquatione habetur $h = p - f$, & ex secunda $h = \frac{q - i - g}{f}$; erit ergo $p - f = \frac{q - i - g}{f}$, & multiplicando per f, oritur $pf - ff = q - i - g$. Ex hac æquatione sumatur valor i, erit $i = ff - pf + q - g$, & ex quarta valor alter ipsius i, nempe $i = \frac{s - fl}{g}$, & in hac substituto valore l, qui ex æquatione quinta desumitur (hoc est $l = \frac{t}{g}$); erit $i = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$: proinde oritur $ff - pf + q - g = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$, & ordinando æquationem respectu ad incognitam f, habetur æquatio secundi gradus

$$\begin{array}{l} ff - pf + q = 0 \\ \quad\;\; + \frac{tf}{gg} - g \\ \qquad\qquad - \frac{s}{g} \end{array}$$

Ex qua ut obtineatur valor ipsius f, determinari prius debet quantitas g, quæ habetur, ut cognita; cum sit unus ex divisoribus ultimi termini æquationis datæ; nam ex quinta æquatione $gl = t$. Ponatur ergo $g = 1$. Sed claritatis gratia ecce exemplum.

Sit data æquatio $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$; erit $p = -4$, $q = 6$, $r = -8$, $s = 5$, $t = -1$.

Po-

Positis valoribus p, q, s, t in illa æquatione secundi gradus cum valore g, fiet illa $ff + 3f = 0$, unde $f = -3$. Ponatur hi valores $f = -3$, & $g = 1$ in æquatione $x^2 + fx + g = 0$; oritur $x^2 - 3x + 1 = 0$, per quam dividi debet æquatio superior data $x^5 - 4x^4 + 6x^3$ &c. quæ divisio exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, quæ quidem amplius divisibilis non est. Habentur ergo duæ æquationes quæsitæ, & æquationem datam esse reducibilem, concluditur. Radices æquationis secundi gradus habentur *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8. Cubicæ vero *per Prop.* 8. *vel* 9. *Cap.* 9.

Coroll. I. *Manifestum est, æquationem* $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$, *quæ provenit ex divisione propositæ æquationis, habere pro coefficientibus valores indeterminatarum* h, i, l, *quæ suppositæ fuerunt, nempe* -1, $+2$, -1; *proinde æquationem datam per alterutram potuisse dividi. Quod & pro sequenti Propos. intelligitur.*

Coroll. II. *Substitutis singulis ultimi termini divisoribus* $+1$, -1 *in æquatione* $x^2 + fx + g = 0$, *si per hanc æquatio data exacte dividi minime potuisset, signum erat, illam esse irreducibilem, & solidum quinque dimensionum problema proprie constituere, cujus latera per curvas inveniri debent.*

PROPOSITIO VIII.

An æquatio sexti gradus sit reducibilis, examinare.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes alias sexti gradus æquationes $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$; quæritur, an divisibilis sit in alias duas inferioris gradus, & quænam illæ sint?

I. Supponatur, esse altera quarti gradus $x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$, altera secundi gradus $x^2 + mx + n$

$+n=0$. Ex quarum facto oritur æquatio prior æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^6+fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+imx+in=0 \\ \quad +mx^5+fmx^4+gmx^3+hmx^2+hnx \\ \qquad\quad +nx^4+fnx^3+gnx^2 \end{array}$$

Unde facta terminorum utriusque æquationis comparatione, habentur sex æquationes. 1.^{a} $f+m=p$; 2.^{a} $g+fm+n=q$; 3.^{a} $h+gm+fn=r$; 4.^{a} $i+hm+gn=s$; 5.^{a} $im+hn=t$; 6.^{a} $in=v$.

Sumatur ex prima valor f, nempe $f=p-m$, quo in secunda æquatione posito, oritur $g+pm-mm+n=q$; unde eruitur valor $g=q-pm+mm-n$. Cum autem habeatur in sexta $in=v$; erit $i=\frac{v}{n}$, quo valore posito in quinta æquatione, habetur $\frac{mv}{n}+hn=t$, ex qua eruitur valor h, nempe $h=\frac{t}{n}-\frac{mv}{nn}$. Jam valor ipsarum g, h, i ponatur in quarta æquatione; oritur $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}-\frac{m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$. Duæ fractiones $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}$ reducantur ad idem nomen cum alia $\frac{-m^2v}{nn}$; fiet æquatio $\frac{vn+tmn-m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$: & multiplicando omnes terminos per nn, ut fractio evanescat, fit $vn+tmn-m^2v+qn^3-pmn^3+m^2n^3-n^4=snn$, hoc est

$$m^2n^3-m^2v=pmn^3-tmn-vn-qn^3+n^4+sn^2.$$

Dividendo autem utrumque æquationis membrum per n^3-v, & ordinando æquationem secundi gradus in ordine ad incognitam m, habetur

$$\frac{\begin{array}{l} m^2 - pn^3m + vn = 0 \\ \quad + tmn + qn^3 \\ \qquad\quad - n^4 \\ \qquad\quad - sn^2 \end{array}}{n^3 - v}$$

Est autem quantitas n unus ex divisoribus ultimi termini æquationis; nam ex sexta æquatione habetur $in = v$. Itaque divisores singuli, quibus æquari potest n, cum signis $+$ & $-$ substituendi sunt successive in superiori æquatione una cum valoribus p, q, t, s, v ad obtinendum valorem ipsius m. Sed claritatis gratia

Sit æquatio data $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$; erit $p = -13$, $q = 45$, $r = -71$, $s = 57$, $t = -16$, $v = 2$. Ponatur $n = 2$. Æquatio superior secundi gradus fit $m^2 + 12m + 20 = 0$; unde *per Prop.* 1. *Cap.* 8. habetur valor ipsius $m = -2$ substituendus in æquatione assumpta $x^2 + mx + n = 0$ una cum valore n, quæ proinde fit $x^2 - 2x + 2 = 0$. Per hanc tentari debet divisio æquationis datæ $x^6 - 13x^5 + 45x^4$ &c. quæ quidem exacte dividitur, & in quoto habetur æquatio altera quarti gradus $x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 7x + 1 = 0$, quæ amplius divisibilis non est. Æquatio autem $x^2 - 2x + 2 = 0$ exhibet duas radices $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ *per Prop.* 1. *Cap.* 8. Reliquæ habentur *per Propos.* 2. *hujus*, aut per curvas, si biquadratica solutionem non admittat.

II. Quod si, his peractis, æquatio data sexti gradus dividi non potuisset per æquationem secundi gradus, ut supra, inventam; tunc videndum, an illa ex duabus tertii gradus fuerit composita: ideoque in duas tertii gradus sit divisibilis. Sit igitur una ex his $x^3 + fx^2 + gx + h = 0$, altera $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, ex quarum facto oritur

x^6

$$\begin{array}{lllllll} x^6 + fx^5 & + gx^4 & + hx^3 & + hmx^2 & + hnx & + hl & = 0 \\ & + mx^5 & + fmx^4 & + gmx^3 & + gnx^2 & + glx & \\ & & + nx^4 & + fnx^3 & + flx^2 & & \\ & & & + lx^3 & & & \end{array}$$

Quæ ex hypothesi est æqualis æquationi generali repræsentanti omnes sexti gradus æquationes, scilicet

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$$

Facta igitur terminorum comparatione, habentur sex æquationes: 1.ª $f + m = p$; 2.ª $g + fm + n = q$; 3.ª $h + gm + fn + l = r$; 4.ª $hm + gn + fl = s$; 5.ª $hn + gl = t$, 6.ª $hl = v$.

Cum ex prima deducatur $f = p - m$; multiplicando per m, erit $fm = pm - m^2$. Ponatur in secunda æquatione loco fm ejus valor, fiet $g + pm - m^2 + n = q$, hoc est $g = q - pm + m^2 - n$, seu $m^2 - pm - n + q = g$: quæ quidem æquatio si ducatur in l, erit $m^2l - pml - nl + ql = gl$; sed ex quinta $gl = t - hn$: erit ergo $m^2l - pml - nl + ql = t - hn$. Utraque ducatur in l; oritur $m^2ll - pmll - nll + qll = tl - hnl$. Cum autem ex sexta sit $hl = v$, substituto hoc valore, habetur $m^2ll - pmll - nll + qll = tl - vn$, seu $m^2ll - pmll + qll - tl = nll - vn$: unde eruitur valor $n = \dfrac{m^2ll - pmll + qll - tl}{ll - v}$.

Inveniri debet jam alter ipsius n valor hac ratione. Ducatur æquatio tertia $h + gm + fn + l = r$ in l; oritur $hl + gml + fnl + ll = rl$: cumque ex sexta habeatur $hl = v$; substituto hoc valore, erit $v + gml + fnl + ll = rl$, seu $gml = rl - v - fnl - ll$. Habetur autem ex secunda æquatione $g = q - fm - n$, quæ si multiplicetur per ml, oritur $gml = qml - fm^2l - mnl$; hinc $rl - v - fnl - ll = qml - fm^2l - mnl$. Ponatur loco f ejus valor ex prima æquatione desumptus; erit $rl - v - pnl + mnl - ll = qml - pm^2l + m^3l - mnl$, seu $2mnl - pnl = m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v$; atque hinc tandem obtinebitur $n = \frac{m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$.

Ex duobus ejusdem n valoribus inventis deducitur $\frac{m^2ll - pmll + qll - tl}{ll - v} = \frac{m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$

Factaque invicem multiplicatione, & ordinata æquatione tertii gradus, ad quem ascendit indeterminata m, erit

$$m^3 - \frac{\begin{array}{llll} 2pl^3m^2 & - 2tl^2m & - pql^3 & = 0 \\ - vplm^2 & + p^2l^3m & + ptl^2 & \\ & + ql^3m & - l^4 & \\ & + vqlm & + rl^3 & \\ & & - vrl & \\ & & + vv & \end{array}}{l^3 + vl}$$

Quæritur modo valor ipsius m; sed prius determinari debet l, qui est unus ex divisoribus ultimi termini datæ æquationis. Nam $hl = v$ ex sexta æquatione. Utque id omne clarius intelligatur,

Sit æquatio $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$. Erit $p = -8$, $q = 13$, $r = -23$, $s = 10$, $t = -7$, $v = -12$, cujus divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 12 *per Prop. 9. Cap. 1.* Ponatur igitur $l = 1$, & singulis valoribus p, q, r, t, l in superiori æquatione substitutis, invenitur æquatio ipsa $m^3 + \frac{80m^2 + 65m - 4}{11} = 0$. Hæc, ut a fractione liberetur, *per Propos. 10. Cap. 6.* fiat $m = \frac{y}{11}$: oritur $y^3 + 80y^2 + 715y - 484 = 0$, quæ quidem si dividatur per binomium $y + 11$, hoc est per unum ex divisoribus ultimi termini inventum *per Prop. 1. vel 2. Cap. 7.* di-

divisio fit sine residuo; proinde innotescit $y = -11$ *per Schol.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6. atque hinc $m = \frac{y}{11} = \frac{-11}{11} = -1$. Hoc valore ipsius m una cum valoribus p, q, t, l positis in æquatione $n = \frac{m^2ll - pmll + ql - tl}{ll - v}$, fit $n = \frac{13}{13} = 1$. Determinatis ergo jam valoribus m, n, l, determinata quoque existit æquatio assumpta $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, quæ fit $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$, per quam fieri debet divisio æquationis datæ $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$, quæ quidem exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, quæ amplius non est divisibilis. Patet ergo, æquationem datam reducibilem esse in duas tertii gradus $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, & $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$. Quarum radices per Cardani regulas *ex Propos.* 8. *Cap.* 9. obtineri facile possunt.

COROLL. *Si æquationis divisio haud successisset, substituendi erant successive loco* l *singuli divisores ipsius* v $= -12$. *At si divisoribus his frustra tentatis, divisio fieri non possit, æquatio erit revera sexti gradus & irreducibilis.*

SCHOL. *Plerique de his reductionibus agunt, cum æquationum compositarum radices rationales inquirunt, ad quas proprie pertinent. At differre huc nobis placuit, quod tyrones sine prævia resolutione æquationum eas haud satis percipere valeant, ut ex reductionibus æquationum quinti & sexti gradus supra allatis evidens est.*

CAPUT XI.

De limitibus radicum, earumque approximatione.

PROPOSITIO I.

Radicum limites invenire.

INveniri debent per Analyſim duæ quantitates, inter quas radix æquationis continetur, quæ limites dicuntur, hoc pacto:

I. Sit æquatio $x^2 + px - q = 0$; erit $x^2 + px = q$, & ſublato ex uno membro x^2, remanet $px < q$; atque hinc $x < q : p$. Duo puncta (:) ſunt nota diviſionis.

Similiter quia $x^2 + px = q$, ſublato ex una parte px; erit $q > x^2$, & $\sqrt{q} > x$. Multiplicando autem per x, erit $x\sqrt{q} > x^2$, & addendo utrinque px, habetur $x\sqrt{q} + px > x^2 + px$; ſed $x^2 + px = q$: proinde erit quoque $x\sqrt{q} + px > q$; atque hinc habetur $x > \frac{q}{p + \sqrt{q}}$. Sunt ergo limites quæſiti $q : p$, & $q : (p + \sqrt{q})$; unde propoſitæ æquationis radix minor eſt $q : p$, & major $q : p + \sqrt{q}$.

Sit exemplum $x^2 + 4x - 12 = 0$; erit $p = 4$, $q = 12$: unde $q : p = 12 : 4 = 3$; & $q : (p + \sqrt{q}) = 12 : 4 + 3 = 12 : 7 = 1\frac{5}{7}$. Sunt ergo limites quæſiti 3, & $1\frac{5}{7}$; proinde radix nequit eſſe major, quam 3, nec minor, quam $1\frac{5}{7}$. Equidem ſi tentetur diviſio per $x + 2$, minime ſuccedit; bene tamen ſuccedit exacte per $x - 2$, & habetur in quoto altera æquationis radix $x + 6$. Unde vel hoc uno exemplo patet,

tet, beneficio limitum nos multo labore liberari, cum ex omnibus ultimi termini divisoribus duo tantum tentandi fuerint $x+2$, & $x-2$. *Vide Coroll.* 2. *hujus*.

II. Sit $x^2 - px + q = 0$; erit $x^2 + q = px$: proinde $x^2 < px$, & dividendo per x, $x < p$. Similiter quia $x^2 + q = px$; erit $q < px$, & $q:p < x$. Sunt ergo limites quæsiti p; & $q:p$, ita ut radix minor sit quantitate cognita p, sed major, quam $q:p$.

Sit exemplum $x^2 - 3x + 3 = 0$; erit $p = 3$, & $q = 3$, cujus limites sunt $p = 3$, & $q:p = 3:3 = 1$. Radix ergo non erit major, quam 3, nec minor unitate, nempe $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. *Vide Corroll.* 3. *hujus*.

III. Sit $x^2 - px - q = 0$; erit $x^2 = px + q$: proinde $x^2 > q$; ideoque $x > \sqrt{q}$, & multiplicando utrinque per $\sqrt{q}$, habetur $x\sqrt{q} > q$. Jam si in æquatione $x^2 = px + q$ loco ipsius q ponatur $x\sqrt{q}$; erit $x^2 < px + x\sqrt{q}$, & dividendo per x, erit $x < p + \sqrt{q}$.

Pariter quia $x^2 = px + q$; erit $x^2 > px$: & dividendo per x; erit $x > p$: & multiplicando utrinque per p; erit $px > pp$. Sed $xx = px + q$; ergo $x^2 > pp + q$: & extrahendo utrinque radicem secundam, habetur $x > \sqrt{pp + q}$. Sunt ergo limites quæsiti $p + \sqrt{q}$, & $\sqrt{p^2 + q}$, hoc est radix debet esse minor, quam $p + \sqrt{q}$; sed major, quam $\sqrt{pp + q}$.

IV. Sit æquatio cubica secundo termino carens $x^3 - qx + r = 0$; erit $x^3 = qx - r$: unde $x^3 < qx$, & dividendo per x, $x^2 < q$; ideoque $x < \sqrt{q}$. Similiter

liter cum sit ex hypothesi $x^3 - qx + r = 0$; erit $x^3 + r = qx$: atque hinc $qx > r$, & $x > r : q$. Sunt ergo limites quæsiti $\sqrt{q}$, & $r : q$; ita ut radix æquationis nequeat esse major $\sqrt{q}$, nec minor $r : q$.

Sit exemplum $x^3 - 19x + 30 = 0$; erit $q = 19$, $r = 30$; unde $\sqrt{q} = 4$, & $r : q = \frac{30}{19} = 1\frac{1}{2}$ circiter. Tentanda est ergo divisio per $x + 2$, vel $x - 2$, vel $x + 3$, aut $x - 3$: & quidem exacte succedit per $x - 2$, & habetur in quoto æquatio secundi gradus $x^2 + 2x - 15 = 0$, cujus una radix est $+ 3$, altera $- 5$ *per Propos.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8.

V. Sit æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$; erit $x^3 - px = q$: & dividendo per x primam partem, fit $x^2 - p < q$; adeoque $x^2 < p + q$, & $x < \sqrt{p + q}$. Similiter cum sit $x^3 - px = q$; auferendo ex prima parte px, erit $x^3 > q$: adeoque $x > \sqrt[3]{q}$.

Sit exemplum $x^3 - 12x - 12 = 0$; erit $p = 12$, & $q = 12$: adeoque $x < \sqrt{24} = 4$, item $x > \sqrt[3]{12} = 2$. Est ergo x minor, quam 4; sed major, quam 2: proinde radix inter 4 & 3 latet, ut inferius patebit.

VI. Demum sit æquatio cubica $x^3 + qx - r = 0$; erit $x^3 + qx = r$: & subtrahendo ex una tantum parte x^3, erit $qx < r$; dividendo autem per q, habetur $x < r : q$ pro primo limite.

Similiter quia $x^3 + qx = r$, sublato ex una tantum parte qx, erit $x^3 < r$, & $x < \sqrt[3]{r}$; & elevando ad secundam potentiam utrumque membrum, erit $xx < \sqrt[3]{r^2}$; & multiplicando per x, erit $x^3 < x \sqrt[3]{r^2}$.

$\sqrt[3]{r^2}$. Hoc autem valore in æquatione data ſubſtituto, habetur $qx + x\sqrt[3]{r^2} > r$; proinde $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$ dat alterum limitem quæſitum. Radix igitur minor eſt $r : q$, ſed major $\frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$.

VII. Sit æquatio quarti gradus $x^4 - px^2 - qx - r = 0$; erit $x^4 - px^2 = qx + r$: proinde $x^4 > px^2$; alias in hac ipſa æquatione $qx + r$ non eſſet quantitas poſitiva. Eſt ergo $x^2 > p$, & $x > \sqrt{p}$.

Similiter quia $x^4 - px^2 - qx = r$, ſi dividatur primum membrum per x; erit $x^3 - px - q < r$, pariterque $x^3 - px < r + q$. Dividatur primum membrum per x; erit multo magis $x^2 - p < r + q$, item $x^2 < r + q + p$: & extracta radice, habetur $x < \sqrt{r + q + p}$. Sunt ergo limites $\sqrt{p}$, & $\sqrt{r + q + p}$.

Sit exemplum $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$; erit $p = 8$, $q = 4$, $r = 3$: hinc $\sqrt{p} = 2$, & $\sqrt{r + q + p} = 1 + 2 + 2 = 5$. Eſt ergo radix inter limites 2 & 5.

COROLL. I. *Eadem ratione inveniri poſſunt limites pro iiſdem æquationibus, etiamſi nullo termino careant; tum etiam pro æquationibus altiorum graduum, quemadmodum egregie fecit* Florimundus de Beaune [a], *cui*

(a) Introduct. ad Geometricam Carteſii Amſtælodami an. 1683. pag. 121.

cui tam præclarum inventum, teste Erasmo Bartolino, *debemus acceptum.*

COROLL. II. *In limitibus dignoscendis numeri integri sufficiunt; ideoque fractiones tuto negligi possunt, præsertim in extractione radicum. Item ex radicalibus, quæ in formulis limitum apparent, satis est radicem extrahere proxima minorem, neglectis fractionibus, ut limes sit quantitas a fractionibus immunis & rationalis.*

COROLL. III. *Quanquam in æquatione generali quantitates* p, q, r *&c. denotent quantitates negativas; in speciali tamen æquatione quantitates omnes tanquam positivæ accipiuntur, ut exempla superiora satis docent.*

PROPOSITIO II.

Radicum limites pro quacunque æquatione methodo newtoniana indagare.

I. MUltiplicentur singuli datæ æquationis termini per numerum dimensionum, quas in illis habet incognita, hoc est per progressionem arithmeticam naturalem descendentem, ita ut ultimus terminus sit zero, & factum dividatur per radicem æquationis. Deinde æquatio, quæ oritur uno gradu inferior, multiplicetur per aliam similem progressionem arithmeticam, & hoc factum similiter dividatur per radicem æquationis: quod quidem toties fiet, donec occurrat æquatio simplex linearis.

Sit æquatio *A*	$x^3 - x^2$	$- 14x$	$+ 24$	$= 0$	
Progr.	3.	2.	1.	0.	
Div. per x	$3x^3 - 2x^2$	$- 14x$	$= 0$		

B $3x^2$

$$B \quad 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

$$\textit{Progr.} \quad 2. \quad 1. \quad 0.$$

$$6x^2 - 2x = 0$$

$$\textit{Div. per } x \quad 6x - 2 = 0$$

$$C \quad 3x = 1$$

Æquationes A, B, C dicuntur æquationes limitum. Jam vero ad indagandum limitem, intra quem continentur radices positivæ datæ æquationis, hæc est regula. In æquationibus A, B, C loco incognitæ x ponitur quilibet numerus 1, vel 2, vel 3 &c. incipiendo ab unitate: nam numerus, qui in singulis æquationibus summam positivam efficit, dat limitem quæsitum. Sic in superiori exemplo ponendo 1 loco x in æquatione C, $3x - 1 = 2$, prodit summa positiva; sed in æquatione B, $3x^2 - 2x - 14 = -13$, prodit negativa. Idem sequitur ponendo 2, & 3 loco x. Quare infertur, limitem his numeris fore majorem. Pono igitur 4, & prodeunt numeri omnes positivi scilicet

$$3x - 1 = 11$$

$$3x^2 - 2x - 14 = 26$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 16$$

Omnes hi numeri positivi indicant, numerum 4 esse limitem, quem nulla potest radicum positivarum transcendere. Et quidem dividendo superiorem æquationem per $x - 3$, divisio exacte & sine residuo succedit; adeoque habetur 3 una ex radicibus positivis ejusdem æquationis.

II. Pro inveniendo limite, quem maxima radicum negativarum non transcendit, examinandum est simili

mili ratione, quinam numerus negativus positus loco x in iisdem tribus æquationibus *A*, *B*, & *C* efficiat summam positivam in æquationibus illis, quæ habent dimensiones numero pares; summam vero negativam in æquationibus dimensionum numero imparium. In superiori exemplo frustra tentantur -1, -2, -3, -4: sed posito -5 loco x, prodit summa negativa in æquationibus numero imparium dimensionum, positiva vero in æquationibus dimensionum numero parium; proinde -5 est limes, quem radix negativa non transcendit, videlicet

$$3x - 1 = -16$$
$$3x^2 - 2x - 14 = +71$$
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = -56$$

Itaque si superior æquatio data $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ dividatur per $x + 4$, divisio exacte succedit; unde habetur radix negativa -4.

III. Pro obtinendo radicum negativarum limite adhiberi possunt etiam numeri affirmativi, modo mutentur signa terminorum parium in æquationibus limitum, quod in sequenti exemplo factum videbis: tunc enim radices falsæ fiunt veræ *per Prop. 3. Cap. 6.* ideoque assumi possunt numeri affirmativi.

Sit æquatio $x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$: facta eadem operatione, ut supra, habentur æquationes limitum, scilicet

$$5x - 1 = 0$$
$$10x^2 - 4x - 7 = 0$$
$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1 = 0$$
$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$$

In

In quibus si loco x substituantur 1, vel 2, vel 3, non ubique prodit summa positiva; substituendo autem 4, summa oritur in singulis positiva; proinde 4 est quantitas, quam radicum positivarum maxima non transgreditur.

Ad inveniendum limitem, quem radicum negativarum maxima non excedit, mutatis terminorum parium signis, adhibentur eodem modo numeri affirmativi. Itaque ponendo in singulis æquationibus loco x numerum 2, prodit ubique summa affirmativa. In æquatione tamen $x^5 + 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x + 4 = 0$, prodit zero, quod indicat, numerum 2 non modo esse limitem quæsitum, sed etiam unam ex radicibus ejusdem æquationis; quæ proinde facit, ut omnia producta se mutuo destruant *per num.* 5. *Prop.* 1. *Cap.* 6. En limitum æquationes cum signis mutatis.

$$5x + 1 = 11$$
$$10x^2 + 4x - 7 = 41$$
$$10x^3 + 6x^2 - 21x - 1 = 61$$
$$5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4 = 28$$
$$x^5 + 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 4x + 4 = 0$$

Habentur ergo limites 4, & -2, inter quos radices omnes æquationis datæ continentur.

Ratio methodi hujus est, quia in æquatione radicem positivam habente omnis numerus positivus loco incognitæ x substitutus vel est æqualis ipsi radici, & sic æquatio illa tota evanescit *per num.* 5. *Prop.* 1. *Cap.* 6., vel est major, & tunc efficit, omnia illa producta positiva esse; vel est ipsa radice minor, & in hoc casu aliquod ex illis productis negativum apparet. Sit brevitatis gratia æquatio secundi gradus *A* $x^2 + 3x - 10 = 0$, cujus radices sunt 2, & -5; ex superiori canone limitum æquatio

tio erit B $2x + 3 = 0$. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum positivum 3 radice ipsa positiva 2 majorem; erit A $9 + 9 - 10 = 8$, & B $6 + 3 = 9$: ideoque 3 est limes æquationis quæsitus. Quod si ponatur 1 eadem radice positiva 2 minor, erit A $1 + 3 - 10 = -6$, & B $2 + 3 = 5$: quod regulæ repugnat, ut patet, cum productum unum sit negativum. Proinde 1 nequit esse datæ æquationis limes.

Similiter in eadem æquatione radix negativa est -5. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum negativum -6 radice ipsa negativa majorem; quo quidem substituto, erit A $36 - 18 - 10 = 8$; at B $-12 + 3 = -9$, quod cum regula optime convenit. At si ponatur -4, numerus scilicet radice ipsa negativa minor; tunc facta substitutione in iisdem æquationibus A & B, prodit A $16 - 12 - 10 = -6$, at B $-8 + 3 = -5$ quod regulæ adversatur; cum æquatio A, quæ paris dimensionis est, producta positiva debeat efficere. Igitur ex hujusmodi productis affirmativis & negativis limites æquationum recte inferuntur.

Coroll. *Inventis limitibus, non solum minimo labore inveniuntur radices rationales, si quæ sunt, quas alioquin per ultimi termini divisores inquirere valde laboriosum est; sed etiam in cognitionem devenimus, an æquatio proposita radices surdas habeat. Nam si illa per nullum numerum intra limites constitutum exacte dividi possit, signum est, ipsam non alias, nisi surdas radices habere. Sic æquationis* $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, *quam Cl. Auctor affert in Arith. Univers. radices consistunt inter limites* 2, *&* -3; *unde tentandi sunt solummodo divisores* 1, -1, *&* -2, *qui inter eos limites continentur, ut dignoscatur, an talis*

æqua-

æquatio per eos dividi exacte possit, adeoque radices rationales habeat. At quantus labor, si ad hanc rem sub utroque signo $\pm$ omnes ultimi termini 120 divisores tentandi sint!

PROPOSITIO III.

Æquationum radices prope veras per approximationem extrahere.

I. Sit æquatio data $x^3 - 12x - 12 = 0$. Inveniantur limites *per Prop. 1. vel 2. hujus*, qui sunt 4 & 3; proinde radix, cum sit media inter 4 & 3, est incommensurabilis, quæ tamen inveniri poterit prope vera hac methodo.

Sumatur semidifferentia inter duos limites 4 & 3, nempe $\frac{1}{2}$, quæ addatur limiti minori, ita ut fiat $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; & dividatur æquatio data per $x - \frac{7}{2}$, residuum est cum signo $-$, hoc est $-11\frac{1}{8}$. Proinde sumatur iterum semidifferentia inter limitem majorem 4, & $\frac{7}{2}$, quæ est $\frac{1}{4}$, & addatur ad $\frac{7}{2}$; fiet $= \frac{15}{4}$. Dividatur æquatio data per $x - \frac{15}{4}$, residuum adhuc est negativum, nempe $-4\frac{17}{64}$. Itaque rursus sumatur semidifferentia inter limitem majorem 4, & $\frac{15}{4}$, nempe $\frac{1}{8}$, quæ addatur ad $\frac{15}{4}$; fit $= \frac{31}{8}$. Dividatur per $x - \frac{31}{8}$ æquatio data, residuum adhuc est negativum, nempe $-\frac{161}{512}$. Igitur semidifferentia inter majorem limitem 4, & $\frac{31}{8}$,

quæ

quæ eſt $\frac{1}{16}$, addenda eſt ad $\frac{31}{8}$, ut fiat $= \frac{63}{16}$; factaque diviſione æquationis datæ per $x - \frac{63}{16}$, habetur reſiduum poſitivum $+ 1 \frac{3263}{4096}$: proinde $\frac{63}{16}$ eſt limes, qui radicem jam tranſcendit, adeoque propinquiores quæſitæ radicis limites ſunt $\frac{63}{16}$, & $\frac{31}{8}$, hoc eſt $\frac{63}{16}$, & $\frac{62}{16}$; & radix ipſa media eſt inter $3 \frac{15}{16}$, & $3 \frac{14}{16}$; ideoque differentia non eſt, ſi $\frac{1}{16}$.

II. Si radix adhuc propinquior deſideretur, continuari poteſt eodem modo approximatio. Nam in ſuperiori exemplo cum ex additione ſemidifferentiæ $\frac{1}{16}$ facta ad $\frac{31}{8}$ innoteſcat provenire reſiduum poſitivum $+ 1 \frac{3263}{4096}$; addi poteſt ad $\frac{31}{8}$ dimidium tantum ejuſdem ſemidifferentiæ $\frac{1}{16}$, nempe $\frac{1}{32}$, ut fiat $= \frac{125}{32}$: factaque diviſione æquationis datæ per $x - \frac{125}{32}$, provenit reſiduum pariter poſitivum $+ \frac{23909}{32768}$. Habentur igitur duo limites quæſitæ radicis adhuc propinquiores, nempe $\frac{31}{8}$, & $\frac{125}{32}$, hoc eſt $\frac{124}{32}$, & $\frac{125}{32}$: proinde radix eſt inter $3 \frac{28}{32}$, & $3 \frac{29}{32}$, ita ut differentia tantum ſit $\frac{1}{32}$. Hac ratione continuari poteſt approximatio, quantum quis voluerit.

Co-

COROLL. *Radix ergo datæ æquationis prop: vera in notis decimalibus erit inter* $\overset{v}{3}\,.\,87500$ *&* $\overset{v}{3}\,.\,90625$, *& differentia* $\frac{3125}{100000}$, *quod quidem obtinetur addendo ad numeratores fractionum quinque zeros, & dividendo per* 32.

SCHOL. *Pro æquationibus quadraticis radicis approximatio habetur ex communi Arithmetica addendo ad residuum tot cyphrarum paria, quot libuerit; hinc* $\sqrt{13} = \overset{iv}{3}\,.\,6055$, *quater additis* 00. Orontius Finæus *id primus docuit.*

PROPOSITIO IV.

Aliæ approximandi rationes expediuntur.

Sit eadem æquatio $x^3 - 12x - 12 = 0$, cujus una radix sit minor 4, sed major 3, ut in præcedenti propositione dictum est. Ponatur esse $x = 3 + y$, & hoc valore in æquatione posito, oritur

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 27 + 27y + 9y^2 + y^3 \\ -12x & = & -36 - 12y \\ -12 & = & -12 \\ \hline & & -21 + 15y + 9y^2 + y^3 \end{array}$$

Quia vero y hoc loco denotat fractionem, quæ additur ad 3, ut fiat ad veram radicem approximatio, & fractionum potentiæ continuo decrescunt; hinc tuto negliguntur $+ 9y^2 + y^3$, quod etiam in sequentibus observabitur. Est igitur $15y = 21$, hoc est $y = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \overset{I}{1}\,.\,4$ (reducendo $\frac{7}{5}$ ad fractiones decimales facilioris calculi gratia) est ergo $y = \overset{I}{1}\,.\,4$. Ponatur jam $x = 3 + \overset{I}{1}\,.\,4 + y$, hoc est $x = 4.\overset{\text{I}}{4} + y$, & hoc valore in æquatione substituto, erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 85.184 + 58.08y \ldots \\ -12x & = & -52.800 - 12.00y \\ +12 & = & -12. \\ \hline & & +20.384 + 46.08y \ldots \end{array}$$

Hinc habetur $46.\overset{\text{II}}{08}\, y = -20.\overset{\text{III}}{384}$, hoc est $y = -\dfrac{20.\overset{\text{III}}{384}}{46.\underset{}{\overset{\text{II}}{08}}} = -\overset{\text{I}}{4}$. Sed si hujus residuo divisionis addantur duæ, aut tres cyphræ ob majorem approximationem; erit quotus $-\overset{\text{IV}}{4423}$ subtrahendus (ob signum $-$) ex $x = 4.\overset{\text{I}}{4}$; hoc est ex $4.\overset{\text{IV}}{4000}$, eritque residuum $3.\overset{\text{IV}}{9577}$ radix æquationis magis magisque approximans.

Quod si rursus ponatur $x = 3.9577 + y$, & pari ratione operatio eadem continuetur; multo major fiet ad veram radicem approximatio: sed hoc ad methodi intelligentiam satis.

COROLL. I. *Hinc facile eruuntur approximandi formulæ, quæ ad hanc rem afferri solent. Sit enim, ut supra, æquatio* $-21 + 15y = 0$. *Si fiat* $p = -21$, *&* $q = 15$; *erit* $qy = -p$: *proinde* $y = -p : q$, *hoc est* $y = \frac{21}{15} = \overset{\text{I}}{1.4}$ *omnino, ut superius.*

COROLL. II. *Vel cum* Hallejo (a) *sit eadem æquatio*

(a) In Trasanct. Anglican. n. 210.

tio $-21+15y+9y^2=0$, *& fiat* $p=-21$, $q=15$, *&* $r=9$; *erit* $ry^2+qy=-p$: *& dividendo per* $q+ry$; *habetur* $y=-p:(q+ry)$. *Sed* ex Coroll. 1. *est* $y=-p:q$: *ergo* $y=-p:(q-pr:q)$ *proinde* $y=21:(15+\frac{189}{15})=21:(15+\frac{63}{5})=21:(\frac{138}{5})$, *hoc est* $y=\frac{105}{138}$: *& dividendo per* 3, *erit* $y=\frac{35}{46}$; *quæ fractio si ad decimales reducatur per* Prop. 4. Append. *erit* $y=\overset{v}{76086}$. *Hic valor si addatur ad* 3 *limitem æquationis*, *ita ut fiat* $x=3+\overset{v}{76086}$, *& continuetur eodem modo operatio*, *invenitur ex eadem* Halleji *formula radix prope vera*, *vel quæ a vera minimum dissentiet*.

SCHOL. *Approximandi regulæ hactenus explicatæ sunt tantum pro æquationibus numericis*.

PROPOSITIO V.

Radices prope veras in æquationibus literalibus indagare.

SIt data æquatio secundi gradus $x^2-2nx-r^2=0$, cujus radix *per Prop.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8. erit $x=n+\sqrt{r^2+n^2}$, seu $x=n+\overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Difin.* 5. *Cap.* 3. Quæritur valor approximatus potentiæ imperfectæ $\overline{r^2+n^2}^{\frac{1}{2}}$, quod quidem duplici methodo obtineri potest.

I. Ex r^2+n^2 extrahatur radix secunda, habebitur *per Prop.* 11. *Cap.* 3. valor quæsitus per seriem infinitam terminorum, nempe $r + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^4}{8r^3} + \frac{n^6}{16r^5}$ &c. $= \overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r^2 + n^2}$; & si fiat $n = 1$, erit $r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

II. Supponatur $z = \overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}}$; erit $zz = r^2 + n^2$, & $zz - r^2 - n^2 = 0$.

Ponantur deinde z æqualis seriei infinitæ terminorum, quorum exponentes progressionem arithmeticam, ipsi vero geometricam servent, & multiplicati existant per literas a, b, c, d &c. quæ hoc loco tanquam indeterminatæ considerantur. Hi autem termini proportionales conflantur ex quantitate aliqua cognita datæ æquationis, ut n in hoc exemplo, nempe

Sit $z = an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6 +$ &c. (primus terminus $an^0 = a$, nam $n^0 = 1$, quod semper advertatur) elevetur ad secundam potentiam utrumque hujus æquationis membrum, & ponatur in superiori æquatione $zz - r^2 - n^2 = 0$ loco zz ejus valor, erit

$$\begin{array}{r|l} zz = & a^2 + 2abn^2 + bbn^4 + 2adn^6 \text{ \&c.} \\ & \qquad\qquad\quad + 2acn^4 + 2bcn^6 \text{ \&c.} \\ -n^2 & -n^2 \\ -r^2 & -r^2 \end{array}$$

Jam singuli termini æquentur zero, ut habeantur toti-

totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum a, b, c, d &c.

Erit 1.ª $a^2 = r^2$, atque hinc $a = r$.
2.ª $2ab = 1$, & posito r loco a; erit $2rb = 1$, seu $b = \frac{1}{2r}$.

3.ª $2ac = -bb$, & substitutis valoribus b & a, erit $2rc = -\frac{1}{4rr} = c = -\frac{1}{8r^3}$.

4.ª $2ad = -2bc$, hoc est $ad = -bc$: & positis valoribus a, b, c, habetur $d = \frac{1}{16r^5}$ &c.

Subrogentur hi valores in serie assumpta $an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6$ &c. erit $r + \frac{1}{2r} n^2 - \frac{1}{8r^3} n^4 + \frac{1}{16r^5} n^6$ &c.

Quod si ponatur $n = 1$; erit valor quæsitus ipsius $\overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}} = r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c. ut supra.

Est ergo radix propositæ æquationis $x = 1 + r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

SCHOL. *Poterat series efformari ex altera quantitate cognita* r, *ita ut fieret* z $=$ ar° $+$ br² $+$ cr⁴ &c. *si* r *si* r *minor fuisset, quam* n. *Nam series, ut ad verum valorem magis accedat, debet esse* convergens. *Quod ut fiat, necesse est, numerator fractionis denominatore sit minor* per Coroll. 2. Prop. 8. Cap. 2. *unde in hoc casu quantitas* n *fieret in seriei terminis denominator. Hoc semper erit in ejusmodi seriebus efformandis observandum.*

PROPOSITIO VI.

Idem problema alio modo resolvitur.

I. Sit eadem $x^2 - 2nx - r^2 = 0$, cujus radix per approximationem quæritur. Supponatur statim valor incognitæ x æqualis seriei indeterminatæ quorumcunque terminorum, nempe

Sit $x = an^0 + bn^1 + cn^2 + dn^3 + en^4$ &c. Quantitates a, b, c &c. sunt indeterminatæ, & $n^0 = 1$, unde $an^0 = a$. Elevetur series ad singulos gradus, quos habet x in data æquatione, ita ut æquatio transformetur in aliam indeterminatam, scilicet

$$\left.\begin{array}{r} x^2 \\ \\ -2nx \\ -r^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} = a^2 + 2abn + 2acn^2 + 2adn^3 + 2aen^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + bbn^2 + 2bcn^3 + 2bdn^4 \text{ \&c.} \\ \qquad - 2an - 2bn^2 - 2cn^3 + ccn^4 \text{ \&c.} \\ - r^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2dn^4 \text{ \&c.} \end{array}$$

Jam singuli termini æquentur zero, ut determinetur valor ipsarum a, b, c, d &c. ex æquationibus particularibus, quæ sequuntur.

1.ª $a^2 - r^2 = 0$, atque hinc $a^2 = r^2$, & $a = r$.

2.ª $2ab - 2a = 0$, & posito r loco a; erit $rb = r$, hoc est $b = 1$.

3.ª $2ac + bb - 2b = 0$, & $2ac + bb = 2b$, in

qua

qua positis valoribus a & b, habetur $2rc + 1 = 2$; atque hinc $c = \frac{1}{2r}$.

4.ª $2ad + 2bc - 2c = 0$, & $ad + bc = c$, in eaque substitutis valoribus ipsarum a, b, c, erit $d = 0$.

5.ª $2ae + 2bd + cc - 2d = 0$, & abjectis (ob $d = 0$) terminis $2bd - 2d$, remanet $2ae = -cc$, unde eruitur $e = -\frac{1}{8r^3}$.

His valoribus subrogatis in serie $a + bn^1 + cn^2 + dn^3$ &c. oritur series determinata $r + n^1 + \frac{1}{2r} n^2 - \frac{1}{8r^3} n^4 - \frac{1}{32r^5} n^6$ &c. ac posito $n = 1$; erit $x = r + 1 + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} - \frac{1}{32r^5}$ &c. Ex his paucissimis terminis patet, hanc seriem magis, quam duas superiores, esse convergentem.

II. Sit æquatio cubica $\left.\begin{matrix} x^3 + bbx - 2b^3 \\ + abx - a^3 \end{matrix}\right\} = 0$

Fiat series ex quantitate cognita omnium minima, quæ sit a, multiplicata per indeterminatas f, g, h, i &c. & eidem æqualis ponatur incognita x; erit $x = fa^0 + ga^1 + ha^2 + ia^3 + la^4$ &c. quæ series elevetur ad omnes gradus, quos habet x in æquatione data, erit

$$
\begin{array}{l|llllll}
x^3 = & f^3 & + 3ffga & + 3fgga^2 & + g^3a^3 & + 3fhha^4 \&c. \\
 & & & + 3ffha^2 & + 3ffia^3 & + 3ggha^4 \&c. \\
 & & & & + 6fgha^3 & + 3ffla^4 \&c. \\
 & & & & & + 6fgia^4 \&c. \\
+ bbx & + bbf & + bbga & + bbha^2 & + bbia^3 & + bbla^4 \&c. \\
+ abx & & + bfa & + bga^2 & + bha^3 & + bia^4 \&c. \\
- 2b^3 & - 2b^3 & & & & \\
- a^3 & & & & - a^3 &
\end{array}
$$

Fiant ſinguli termini zero æquales, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipſarum f, g, h, i &c.

1.ª $f^3 + fbb - 2b^3 = 0$, quæ ſi dividatur per $f - b$, diviſio exacte ſuccedit; proinde b eſt radix vera ejuſdem æquationis *per num.* 5. *Prop.* 1. *Cap.* 6. eritque $f = b$.

2.ª $3ffg + bbg + bf = 0$, & $3ffg + bbg = - bf$; & poſito b loco f, habetur $g = - \frac{1}{4}$. Nam $g = - \frac{bb}{4bb} = - \frac{1}{4}$.

3.ª $3ffh + bbh = - bg - 3fgg$; in qua poſito valore ipſarum f & g, invenitur $h = \frac{1}{64b}$.

4.ª $3ffi + bbi = - bh - g^3 - 6fgh + 1$, & ſubſtitutis valoribus jam inventis loco f, g, h, habetur $i = \frac{131}{512b^2}$.

5.ª $3ffl + bbl = - bi - 6fgi - 3ggh - 3fhh$; ex qua eodem modo eruitur valor $l = \frac{509}{16384b^3}$.

Por-

Porro his vaolribus substitutis in serie $fa^{0} + ga^{1} + ha^{2} + ia^{3}$ &c. habetur $x = b - \frac{1}{4} a + \frac{1}{64b} a^{2} + \frac{131}{512b^{2}} a^{3} + \frac{509}{16384b^{3}} a^{4}$&c. Et posito $a = 1$, erit $x = b - \frac{1}{4} + \frac{1}{64b} + \frac{131}{512b^{2}} + \frac{509}{16384b^{3}}$.

SCHOL. I. *Si æquatio data duas incognitas* x *&* y *contineat, ut sæpe in Geometria composita contingit, tunc termini seriem componentes desumuntur ex incognita, quæ minor est, ut series convergens fiat, quemadmodum in* Schol. Propos. præc. *dictum est. Ut si* x *major est, quam* y, *fiat series* $x = ay^{0} + by^{1} + cy^{2} + dy^{3} + ey^{4} + fy^{5}$ *&c. Cætera peraguntur, ut supra. At plrua his addere non est hujus loci.*

SCHOL. II. *Cum series infinitæ primo a* Mercatore Holsato per divisiones, *secundo* a Cl. Newtono per radicum extractiones *quæsitæ fuerint, ut in* Schol. 2. Propos. 11. Cap. 3. *innuimus; demum celeberrimus* Leibnitius (*a*) *ad eas pervenit* per suppositionem ipsius seriei quæsitæ tanquam inventæ; *ita ut coefficientes terminorum ejusdem seriei postea determinentur, ut series ipsa determinata fiat: quæ sane methodus commodior est longeque cæteris universalior, cum hæc non modo in calculo communi, sed etiam in Differentiali & Integrali usum habere possit plurimum. Nos facile & ad discentium intelligentiam aptum specimen in hac Propositione duntaxat exhibuimus.*

CA-

(*a*) Acta Erudit. Lipsiæ an. 1683.

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

Geometricam æquationum constructionem aggredimur. Intelligent hinc tyrones ingentem Analyseos in Geometria usum. Intelligent, qua ratione Euclides, Apollonius, magnus Archimedes, aliique veteres Geometræ, quæ per Analysin problemata subtiliter invenerant, ea deinde, suppresso calculo, composuerint, ac synthetice demonstraverint. Horum vestigiis insistentes *Simplices* tantum, & *Quadraticas Æquationes* in hoc capite construimus. Nam quæ altioris sunt gradus, curvarum doctrinam ad constructionem requirunt. Præmittimus autem his quantitates analyticas geometrice exprimendi rationem, cum id tyronibus soleat negotium facessere.

PORISMA I.

Fractiones in terminos proportionales resolvere.

Fractiones analyticæ, quibus incognita æqualis existit, in terminos proportionales resolvuntur variis quidem modis.

I. Sit $x = \frac{ab}{c}$; erit $c.a::b.x$: nimirum est x quarta proportionalis *per Prop.* 12. *l.* 6. *Eucl.*

II. Sit $x = \frac{aa - bb}{c - d}$: quia $a + b \times a - b = aa - bb$; erit $c - d.a + b::a - b.x$ *per Propos. cit.*

III. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n}$. Inveniatur $\frac{ab}{c} = n$, & $\frac{adc}{n} = m$ *per Propos. cit.*; erit $x = n + m$.

IV. Sit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$: quia nulla litera in nu-

me-

meratore bis habetur; fiat $a . d :: c$ ad quartam proportionalem $= r$: erit $ar = cd$ *per Prop.* 16. *l.* 6. *Eucl.* proinde æquatio mutatur in hanc $\frac{ab + ar}{m + n}$, in qua reperitur bis a; adeoque sic resolvitur $m+n . b+r :: a . x$.

V. Sit $x = \frac{aabc}{ddf}$: fiat primo $d . a :: a$ ad quartam proportionalem $= m$, erit $aa = dm$; proinde ponendo dm loco aa, erit $x = \frac{dmbc}{ddf}$, seu $x = \frac{mbc}{df}$. Secundo fiat $d . m :: b$ ad quartam proportionalem $= n$; erit $dn = mb$: unde subrogando dn loco ipsius mb; erit $x = \frac{dnc}{df}$, seu $x = \frac{nc}{f}$: itaque habetur $f . n :: c . x$, ut supra *num.* 1. aut si fiat $f . n :: c . l$, erit $x = l$, cum sit $\frac{nc}{f} = l$, ut patet.

COROLL. *Hinc facile invenitur recta æqualis pluribus fractionibus datis. Nam sit* $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n} + \frac{cn}{f}$ *&c. Si reperiatur, ut superius factum est*, per Prop. 12. l. 6. $\frac{ab}{c} = n$, $\frac{adc}{n} = m$, & $\frac{cn}{f} = l$; *erit* $x = n + m + l$, *nempe* x = *rectæ lineæ compositæ ex rectis* n, m, l *&c.*

PORISMA II.

Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones geometrice exprimere. Fig. 10.

.I SIt triangulum ABC rectangulum in B, cujus hypothenusa sit $AC = a$, unum latus $AB = b$, & alterum $BC = c$; quia $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ *per* 47. *l.* 1.

l. 1. *Eucl.* erit $aa = bb + cc$, & $AC\ (a) = \sqrt{bb+cc}$.
Similiter quia $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$; erit $bb = aa - cc$, & $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$. Item $cc = aa - bb$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

II. Quod si demittatur perpendiculum BD, ita ut basis segmentum sit $DC = x$; erit $AD = a - x$: & ob angulum rectum in D, erit $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = cc - xx$; unde $BD = \sqrt{cc - xx}$. Similiter quia $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = bb - aa + 2ax - xx$, erit $BD = \sqrt{bb - aa + 2ax - xx}$.

III. Similiter (*Fig.* 11.) si in semicirculo ABC ducantur duæ quælibet chordæ AB & BC; erit angulus ABC rectus *per* 20 *l.* 3. *Eucl.* Hinc posita diametro $AC = a$, $AB = b$, & $BC = c$, habentur eædem omnino quantitates, quæ supra. Erit enim $AC\ (a) = \sqrt{bb+cc}$. Item $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

IV. Demisso autem ex quovis circuli puncto perpendiculo $BD = y$, sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & *per Coroll. Propos.* 17. *l.* 6. *Eucl.* ex *Tacquet* $\overline{BD}^2 = AD \times DC$, hoc est $yy = ax - xx$: unde $BD\ (y) = \sqrt{ax - xx}$. Vel sit $ED = x$, $DB = y$, & CE, vel $BE = a$, erit $\overline{BD}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{ED}^2$, hoc est $yy = aa - xx$, & $BD\ (y) = \sqrt{aa - xx}$.

COROLL. I. *Ex his patet, quomodo exprimi possit geometrice hæc, aut alia similis quantitas analytica* $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc}$.

Nam-

Nam inveniatur, ut supra, $a = \sqrt{bb+cc}$, *fiet* $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc} = \frac{ar}{n}$, *quæ quantitas si* per Poris. 1. *in analogiam resolvatur, haberi potest* $\frac{ar}{n} = l$; *unde* $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc} = l$.

COROLL. II. *Patet, quo pacto media proportionalis per quantitatem radicalem designata, geometrice sit exprimenda. Nam* (Fig. 11.) *si fiat* AD = a *&* DC = b, *&* *ducatur* BD *perpendicularis ad diametrum* AC; *erit* BD = $\sqrt{ab}$ *per* Cor. Prop. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

COROLL. III. *Patet demum, qua ratione dato plano* = ab, *reperiatur quadratum illi æquale* cc. *Nam sit, ut prius,* AD = a, DC = b, *&* *ducatur in circulo ad diametrum* AC *perpendicularis* DB = c, *erit* $\overline{DB}^2 =$ AD X DC *per* Cor. cit. *hoc est* cc = ab. *Contra vero dato quadrato* cc, *&* *alterutro plani* bd *latere, facile est invenire ipsum planum.*

PORISMA III.

Æquationes secundi gradus geometrice construere.

Quatuor formulis comprehendi solent omnes secundi gradus æquationes, earumque radices ob duplicem valorem affirmativum, & negativum duplici signo afficiuntur $\pm$, ut sæpe diximus, scilicet *Formulæ*. *Radices*.

1. $x^2 = ax + bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
2. $x^2 = -ax + bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
3. $x^2 = ax - bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$
4. $x^2 = -ax - bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$

I. Pro-

I. Pro prima formula construenda (*Fig.* 12.) fiat triangulum ABC rectangulum in B, cujus latus $BC = b$, & $AB = \frac{1}{2}a$; erit *per Porif.* 2. basis $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Centro igitur A & intervallo AB fiat circulus ABE, & producatur AC in D; erit recta $CD = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, ut patet.

Vel sic (*Fig.* 13.) fiat $AB = \frac{1}{2}a$, & perpendicularis $CB = b$; tum centro A cum intervallo basis AC fiat semicirculus DCE, in quo producatur AB hinc inde ad peripheriam; erit $DB = x$.

Nam $DB = AB + AD$, vel AC; sed $AB = \frac{1}{2}a$, & $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ergo $DB = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

II. Pro secunda formula constructio est eadem: nam in *Fig.* 12. (non producta AC in D) erit $CE = x$. Nam $CE = CA - AE$, seu AB: sed $AB = \frac{1}{2}a$, & $CA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ergo $CE = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

Vel in (*Fig.* 13.) $EB = AE$, (vel AC) $- AB$; proinde $EB = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

III. Pro tertia formula construenda (*Fig.* 14.) quæ quidem duas habet radices positivas, ut signorum dispositio docet *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. fit in semicirculo AEB diameter $AB = a$; erit semidiameter AC, vel CB, vel $CE = \frac{1}{2}a$. Elevetur ex punto B perpendicularis $BF = b$, & ducatur diametro AB parellela EF, quæ secabit circulum in E. Tum ex puncto E ducta ED ad diametrum perpendiculari, erit $AD = x$.

Nam $AD = AC + CD$; sed $AC = \frac{1}{2}a$, & $CD =$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$; ergo $AD = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$. Erit autem DB altera radix positiva. Nam $DB = BC - CD$; proinde $DB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

IV. Formula autem quarta, cujus constructio est omnino eadem, ambas radices habet negativas, ut ex signorum dispositione dignoscitur *per num.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. quarum prima erit $-AD = -AC - CD$, hoc est $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$. Altera vero $-DB = -CB + CD$, hoc est $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$.

SCHOL. I. *Cæterum ad absolutam problematis resolutionem una radix, & quidem positiva sufficit. Proinde Cartesius de radicibus negativis construendis solicitus nunquam fuit. Recentiores tamen singulas construunt, ut & nos in tertia & quarta formula. Pro prima autem formula radix negativa* (Fig. 13.) *erit* EB. *Nam* EB $= -$ AE (*seu* $-$ AC) $+$ AB; *proinde* EB $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. *Pro secunda formula radix negativa erit* $-$ DB. *Nam* $-$DB $= -$ BA $-$ AD (*seu* $-$AC) *idest* $= -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$. *Hinc apparet, constructionem esse eamdem, sed radices negativas ad partem oppositam esse desumendas; hoc est si radix positiva* DB *desumpta fuit ex* B *versus* D; *e contrario radix negativa* BE *desumi debet ex* B *versus* E. *Quæ regula in Geometricis Constructionibus semper observatur.*

SCHOL. II. *Si in tertia vel quarta formula* BF ($=$b) *major sit, quam* CB ($= \frac{1}{2}$a) *fieri non poterit, ut parallela* EF *circulum secet, & in hoc casu problema erit* im-

impossibile. Ratio est, quia ubi $b > \frac{1}{2}a$, *erit quoque* $bb > \frac{1}{4}aa$; *ideoque* $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ *sit quantitas imaginaria, & problema contradictionem involvere signum est. Quod si* $BF = CB$, *hoc est* $b = \frac{1}{2}a$, *tunc parallela* EF *non secat circulum, sed illum tangit in puncto; ex quo si ducatur perpendicularis* ED, *hæc in centro consistit, & recta* CD *evanescit; proinde* $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bb} = 0$. *Hæc ex ipsa constructione patent.*

SCHOL. III. *Ut obtineantur æquationes supra allatæ, vel aliæ similes, proposito problemate, delineatur figura, in qua problema ipsum quasi solutum ponitur, ducendo in ea lineas perpendiculares, parallelas, angulos æquales, circulos, triangula similia, vel rectangula, aliasque figuras, quarum notæ relationes & proprietates algebraicas æquationes nobis exhibent. Quæ quidem plenius docent problemata, quæ sequuntur, fere omnia ab Euclide, Archimede, aliisque summis Geometricis de industria accepta: cum in his primo versari ex usu discentium esse, putaverim.*

PROBL. I.

Datam rectam AB *sectam utcunque in* C *ita producere in* E, *ut rectangulum* AEB *sit æquale quadrato* CE.

FActum jam sit (*Fig.* 15.) & esto data $AB = a$, $CB = b$, quæsita $BE = x$; erit tota $AE = a + x$, & ex conditione problematis $AE \times EB = \overline{CE}^2$, hoc est

$$ax + xx = b^2 + 2bx + xx$$
$$ax = b^2 + 2bx$$
$$ax - 2bx = b^2$$

Div. per $a - 2b$ $$x = \frac{b^2}{a - 2b}$$

Qua æquatione in terminos proportionales resoluta *per Poris.* 1. habetur $a - 2b . b :: b . x$. Est ergo $BE = x$ tertia proportionalis; unde oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio (*Fig.* 16.) Sumatur in AB pars $CD = CB$, erit $DB = 2b$, & $AD = a - 2b$. Fiat AD $(a - 2b)$. $DC (b) :: DC$, vel $CB (b)$. $BE (x)$ tertiam proportionalem quæsitam.

Demonstr. Cum ex construct. sit $AD . DC$, vel $CB :: CB . BE$, erit componendo *per Propos.* 18. *l.* 5. $AC . DC$, vel $CB :: CE . BE$. Est autem ut AC antecedens ad CB consequentem, ita CE antecedens ad BE consequentem, ergo AE summa antecedentium erit ad CE summam consequentium, ut CE una antecedentium ad BE unam consequentium *per Prop.* 12. *l.* 5. ergo rectangulum sub extremis $AE \times BE$, nempe AF, erit æquale quadrato sub mediis $CE \times CE$, idest CH *per Prop.* 17. *l.* 6. Quod erat &c.

SCHOL. *Hinc apparet methodus, aut alia huic affinis, quam* Euclides, Archimedes, Apollonius, *aliique veteres in suis problematibus investigandis, construendis, ac demonstrandis tenuerunt.*

PROBL. II.

In dato triangulo ABC *quadratum inscribere.* Fig. 17.

Esto factum, & quadratum inscriptum sit $EDFG$. Ducatur perpendicularis AH, quæ ob triangulum datum erit pariter data. Sit $BC = a$, $AH = b$,

& HL seu $FG = x$; erit $AL = b - x$. Jam ob triangula similia BAC & FAG erit AH (b). BC (a) :: AL ($b - x$). FG (x): proinde

$$bx = ab - ax$$

$$bx + ax = ab$$

Divid. per $a + b$ $$x = \frac{ab}{a+b}$$

Resoluta æquatione in terminos proportionales, habetur $a + b . a :: b . x$ *per Poris.* 1. unde patet, quæsitam $LH = x$ esse quartam proportionalem. Hinc oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio. Producta BC indefinite, fiat $HM = BC$, & $MN = AH$; erit $HM + MN = a + b$. Jungatur AN, cui ex puncto M parallela ducatur LM, quæ secabit AH in puncto quæsito L.

Demonstr. Ob parallelas AN & LM triangula AHN, & LHM sunt similia, proinde MN, seu $AH . AL ::$ HM, seu $BC . LH$. Item ob triangula similia BAC & FAG est $AH . AL :: BC . FG$; ergo $AH . AL :: BC . LH$: ideoque BC ad duas FG & LH eamdem rationem habet, quæ idcirco sunt æquales *per Propos.* 9. *lib.* 5. Est ergo $EDFG$ quadratum. Quod &c.

COROLL. *Tam ex hoc, quam ex præc. problemate apparet, fractiones, quibus quantitas incognita in æquatione finali æquatur, in terminos proportionales esse resolvendas, ut in* Poris. 1. *docuimus.*

PROBL. III.

In quadrilatero ABDE *circulo inscripto rectanguli, quod fit ex diagonalibus* AD X EB *ad rectangula, quæ fiunt ex lateribus oppositis* AE X BD, *&* AB X DE, *rationem invenire*. Fig. 18.

DUcatur DF faciens angulum EDF æqualem angulo ADB, erunt triangula ADB & EDF simimilia, cum etiam anguli DAB & BED sint æquales, utpote eidem arcui BD insistentes; proinde $AD.DE :: AB.EF$: & si ponatur $AD = a$, $DE = b$, $AB = c$, & $EF = x$; erit $a . b :: c . x$, adeoque $ax = bc$.

Similiter triangula ADE & BDF sunt æquiangula & similia. Nam si æqualibus ex constructione angulis EDF, & ADB addatur communis ADF, erit $ADE = BDF$. Item $DAE = DBF$, cum eidem arcui DE insistant, & hinc $BF . AE :: BD . AD$. Jam si ponatur tota $BE = f$, erit $BF = f - x$. Sit $AE = d$, & $BD = e$, erit $f - x . d :: e . a$; ideoque $af - ax = ed$. Addatur huic æquationi altera $ax = bc$, erit $af = ed + bc$; unde patet, rectangulum, quod fit ex diagonalibus $AD \times BE = af$, æquari duobus rectangulis, quæ fiunt ex lateribus oppositis $AE \times BD = ed$, & $AB \times DE = bc$ simul sumptis.

Demonstr. Ob triangula similia ADB & EDF est $AD.DE :: AB.EF$: ergo *per* 16. *l.* 6. $AD \times EF = DE \times AB$. Item ob triangula similia ADE & BDF est $BF . AE :: BD . AD$; ergo *per Prop. cit.* $AD \times BF = AE \times BD$. Sed $AD \times BF$ & $AD \times EF = AD \times EB$ totam *per* 1. *l.* 2.; ergo $AD \times EB = DE \times AB + AE \times BD$. Quod erat &c.

SCHOL. *Præclarum hinc oritur* Ptolomæi (*a*) *theorema*: In quadrilatero inscripto in circulo rectangulum sub diagonalibus æquale est rectangulis, quæ a lateribus oppositis fiunt. *Quod quidem magnum habet in Trigonometria usum.*

(*a*) Almagesti lib. 1. Cap. 9.

P R O B L. IV.

Datam rectam AB media & extrema ratione secare. Fig. 19.

Secta sit AB in puncto C, ut imperatur; & sit ipsa $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis cum tota AB debeat esse ad majus segmentum AC, ut AC ad segmentum minus CB; erit $a . x :: x . a - x$: hinc

$$xx = aa - ax$$
$$xx + ax = aa$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\quad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extra. rad. $\quad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Construct. A rectæ AB puncto B elevetur perpendicularis $BD = \frac{1}{2}a$; ductaque AD, secetur $ED = DB$ ($= \frac{1}{2}a$). Facto deinde centro in A cum intervalla AE, secetur $AC = AE$; erit C punctum quæsitum.

Demonstr. Triangulum ABD est rectangulum in B, ergo $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}a^2$; unde $AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Est autem $DE = DB = \frac{1}{2}a$; ergo $AE = AD - DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = AC$.

Insuper $CB = a - x$ erit $= \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Sunt au-

autem $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $CB = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ tales inter se, ut rectangulum sub extremis $AB \times CB$ sit æquale quadrato mediæ AC, hoc est $\frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; hinc AB, AC, & CB sunt continue proportionales *per* 17. *l.* 6. proinde AB secta est in C media & extrema ratione.

COROLL. I. *Hinc facile eruitur synthetica demonstratio. Nam si data* AB *secetur in* C, *ita ut rectangulum* AB X CB *sit æquale quadrato* AC, *ut docet* Prop. 11. l. 2. *erit* AB.AC :: AC.CB per 17. lib. 6. *ergo* AB *secta est in* C *secundum mediam & extremam rationem* per Defin. 3. lib. 6.

SCHOL. *Certum est, quadratum* $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$ *posse oriri tam ex radice positiva* $x + \frac{1}{2}a$, *quam ex negativa* $-x - \frac{1}{2}a$. *In primo casu habetur radix positiva, quam supra construximus* $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; *in secundo radix negativa & æqualis nihilo* $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *quæ tamen construi potest hac ratione.*

Supposita superiori constructione, producatur BA *versus* F, *& fiat* $AF = DB = \frac{1}{2}a$, *&* $FG = AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; *erit tota* $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -x$, *&* GB ($= a - x$) $= \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Sunt porro tres continue proportionales* $BA = a$, $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *&* GB $= \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Nam* $BA \times GB = \overline{AG}^2$, *cum utrinque oriatur* $\frac{3}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

COROLL. II. *In constructione radicum negativarum quam-*

quantitates cognitæ signo — affectæ desumi debent ad partem oppositam radicum positivarum; *quod* in Schol. 1. Poris. 3. *fuit prænotatum*, & *ex hac constructione apparet*.

PROBL. V.

Datam rectam AB *inæqualiter ita secare in* C, *ut quadrata totius* AB, & *minoris segmenti* BC *sint tripla quadrati*, *quod fit a segmento majori* AC. Fig. eadem.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis

$$a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2$$
$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$
$$x^2 + ax = a^2$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\qquad \frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extr. rad. $\qquad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Quæ quidem æquatio cum sit eadem, ac superioris problematis, indicio est, rectam AB secandam esse media & extrema ratione, ut duo quadrata $\overline{AB}^2$ & $\overline{BC}^2$ sint tripla quadrati $\overline{AC}^2$. Facta igitur eadem constructione, sectaque AB in C media & extrema ratione, erunt tres continue proportionales $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $BC = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; atque hinc quadrata $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3\overline{AC}^2$, hoc est $\frac{9}{2}a^2 - 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Co-

COROLL. *Hinc oritur Theorema 4. l. 13. Euclidis*: Si recta linea media & extrema ratione secta fuerit, totius & minoris portionis utraque simul quadrata tripla sunt quadrati ejus, quod a majori fit portione. *Cujus demonstratio ex superiori æquatione & constructione sponte sua sequitur.*

PROBL. VI.

A dato puncto E *rectam ducere, quæ datum circulum tangat*. Fig. 20.

PUnctum *E* positione datur, circulus vero *ABGD* positione & magnitudine; proinde ducta *AE*, dantur *AD* & *DE*. Sit ergo $AD = a$, $DE = b$ & $EG = x$; producta autem *AD* in *B*, erit tota $BE = 2a + b$, & $BE \times ED = \overline{EG}^2$ *per* 36. *l.* 3. *Eucl.* hinc habetur æquatio

$$2ab + b^2 = x^2$$
$$x = \sqrt{b^2 + 2ab}$$

Constr. Centrum circuli *A*, & punctum datum connectantur recta *AE*, super qua describatur semicirculus *AEG*, in quo ducantur chordæ *AG* & *EG*.

Demonstr. Angulus *AGE* in semicirculo rectus est *per Prop.* 31. *l.* 3. ergo $\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2$ *per* 47. *l.* 1. hoc est $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + x^2$, seu $x^2 = 2ab + b^2$; proinde $x = \sqrt{2ab + b^2} = EG$.

Verum demonstratio synthetica unico verbo potest absolvi. Nam angulus *AGE* in semicirculo est rectus; ergo *EG* circulum tangit in *G per* 16. *l.* 3. Quod erat &c.

PROBL. VII.

Dato circulo invenire latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscribendi. Fig. 21.

SIt $AB = x$ latus trianguli quæsiti, & ducatur chorda BC æqualis semidiametro $CD = a$, quæ erit latus haxagoni *per* 15. *l.* 4. *Eucl.* eritque $AC = 2a$. Ob angulum ABC in semicirculo rectum $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, hoc est

$$xx + a^2 = 4a^2$$
$$xx = 3a^2$$
$$x = \sqrt{3a^2}$$

Est ergo latus trianguli æquilateri medium proportionale inter circuli, cui inscribitur, radium, ejusque triplum, nempe inter a & $3a$. Hinc si ponatur $a = 1$, erit trianguli æquilateri latus ad radium, ut $\sqrt{3}$ ad 1.

Constructio tamen facilior est, quæ vulgo traditur. (*Fig.* 22.) Super diametro AB describatur triangulum æquilaterum ABC, & ducatur CD; erit CD latus quæsitum. Nam in triangulo rectangulo CDB erit $CB = 2a$, $DB = a$, & $CD = x$; unde $x = \sqrt{3aa}$.

COROLL. *Hinc infertur, non omnes concinniores constructiones geometricas ex calculo analytico derivari, nec proinde eidem semper esse inhærendum, cum in solutione problematum geometricorum elegantiora quandoque media operantis ingenium, quam talis determinata æquatio suppeditet, quæ quidem respicit problema illud solitarie sumptum, & ab omnibus aliis independens, ut* Cl. Wolfius *observat, & ex hoc ipso problemate intelligi* *potest: quod quidem multis aliis modis eleganter & a superiori æquatione independenter construitur.*

SCHOL. *Ex penultima æquatione habetur egregium theorema, quod est Propos. 12. lib. 13. Euclidis:* Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, quadratum ex trianguli latere triplum est ejus, quod fit ex circuli semidiametro. *Nam si ponatur* BC $=$ a, & AC $=$ 2*a*, *erit* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$; *proinde* $\overline{AB}^2 = 3a^2$, & $\overline{AB}^2 . \overline{BC}^2 :: 3a^2 . a^2 :: 3 . 1$. *adeoque* BC, *seu* CD $= \sqrt{\frac{1}{3}}$. Fig. 21.

PROBL. VIII.

Rationem invenire, quam pentagoni latus habet ad hexagoni & decagoni simul sumpta latera in eodem circulo inscriptorum. Fig. 23.

SIt *AC* latus pentagoni, divisoque bifariam arcu *AC* in *B*, chorda *AB*, seu *BC* erit latus decagoni; & circuli radius *AF*, vel *FC* latus hexagoni, ut patet. Ducatur *FD* perpendiculariter super *AB*, quam bifariam secabit in *D per* 3. *l.* 3. & ducatur *EB*. Duo triangula *ACF*, *ECF* sunt æquiangula & similia; nam præter angulum communem C, angulus *CFE* $=$ *FAC*: est enim arcus *BC* gr. 36. & *BD* gr. 18. ergo totus *DC*, nempe angulus *CFE* gr. 54. Similiter cum in trigono isoscele *AFC* angulus ad centrum sit gr. 72, erunt singuli ad basim gr. 54. proinde *FAC* $=$ *CFE*.

Sit *AF* $= a$, *AC* $= b$, *EC* $= x$; erit *AE* $= b - x$, *AB* $= c$. Ratione triangulorum similium *ACF*, *ECF* est *AC*.*AF* :: *AF*.*EC*, hoc est $b . a :: a . x$, hinc $bx = aa$. Deinde triangulum isoscele *AEB* simile est ttiangulo isosceli *ABC*. Habent enim angulum *A* communem, proinde omnes alios æquales, ut patet. Sunt ergo

pro-

proportionales $AE . AB :: AB . AC$, hoc est $b - x . c :: c . b$; unde $bb - bx = cc$. Addatur huic altera æquatio, habetur $bb = aa + cc$, hoc est latus pentagoni regularis post latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum, ut in *Prop.* 10. *lib.* 13. proposuit Euclides.

PROBL. IX.

Dato quadrato ABCD, *ex angulo* A *ducere rectam* AE, *ut pars* FE *a latere* DC *continuato intercepta sit æqualis datæ rectæ* M. Fig. 24.

Ex puncto E demittatur EG perpendicularis ad AE, quæ lateri producto AB occurrat in G. Ducta perpendiculari EH, facile erit ostendere, EG æqualem esse AF, cum triangula EHG & ABF sint rectangula, similia *per Prop.* 8. *lib.* 6. & etiam æqualia; & $EH = CB = AB$; proinde EG & AF latera homologa & æqualia.

Sit ergo AB, vel $BC = a$, $FE = M = b$, $AF = EG = y$, & $BG = x$; erit $AE = y + b$, & $AG = a + x$. Tum ob triangula similia ABF & AEG, erit $AB . AF :: AE . AG$, hoc est $a . y :: y + b . a + x$; unde habetur $aa + ax = yy + by$. Deinde ob triangulum AEG rectangulum in E, $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$, hoc est $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + bb$. In hac secunda æquatione ponatur pro $y^2 + by$ ejus valor ex prima inventus $aa + ax$, habebitur $aa + 2ax + x^2 = 2a^2 + 2ax + b^2$, quæ reducitur ad simplicissimam secundi gradus $xx = aa + bb$, atque $x = \sqrt{aa + bb}$, $= BG$.

Construct. (*Fig.* 25.) Producatur quadrati latus AD in O, ita ut AO sit æqualis rectæ datæ M: erit $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2$ (ob triangulum rectangulum OAB) $= aa + bb$,

$+ bb$, & $BO = \sqrt{aa + bb} = x$. Producatur ergo latus AB in G, ita ut BG ſit æqualis BO, & ſuper AG diametro deſcribatur ſemicirculus AEG, qui ſecabit quadrati latus DC productum in E, & conjungatur AE; erit EF recta quæſita.

SCHOL. *Hæc conſtructio eadem eſt, quæ a Pappo fuit allata, & a Carteſio indicatur, tum ad uſum reductionis æquationum oſtendendum, tum ad docendum nos, plurimum intereſſe unam vel aliam quantitatem incognitam aſſumere. Sive enim pro incognita aſſumatur* BF, *ſive* FC, *vel* AF, *aut* CE: *ſemper oritur æquatio biquadratica. Sumpta autem* BG, *prodit æquatio ſimpliciſſima ſecundi gradus, ut vidimus. Jure igitur in hoc ipſo problemate ſolvendo poſt Carteſium recentiores Analyſtæ fere omnes ingenium ſuum exercuerunt, apud quos illud paſſim invenias.*

P R O B L. X.

Circulum invenire datæ ſuperficiei conicæ æqualem. Fig. 26.

SIt circuli quæſiti radius $= x$, & ratio radii ad peripheriam ſit $r.p$. Si fiat $r.p :: x . \frac{px}{r}$, erit $\frac{px}{r}$ peripheria circuli; & inde innoteſcit area circuli $= \frac{px^2}{2r}$ *per Coroll.* 1. *Propoſ.* 5. *Archim. ex Tacquet.*

Sit coni dati latus $= a$, peripheria circuli baſis ejuſdem $= p$; erit ſuperficies conica $= \frac{1}{2}ap$ per Co-

roll. 1. *Prop.* 13. *ex Archim. cit.* Erit ergo ex hypothesi $\frac{px^2}{2r} = \frac{1}{2} ap$, & multiplicando per $2r$

$$px^2 = arp$$
$$x^2 = ar$$
$$x = \sqrt{ar}$$

COROLL. *Hinc oritur Archimedis theorema* : Circulus, cujus radius est medius proportionalis inter coni recti latus, & radium basis conicæ, æqualis est superficiei conicæ. *Est ejusdem Propos.* 13. *de Sphæ. & Cylin.*

Demonstr. (*Fig.* 26. *&* 27.) Sit conus rectus datus *R*. Fiat circulus *MLN*, cujus radius *OL* sit medius proportionalis inter coni latus *AB*, & conicæ basis radium *BC*: hoc est ponatur radius *OL* medius proportionalis inter *AB* & *BC* ; erit *per Propos.* 7. *Archim. cit.* peripheria *BED* ad peripheriam *MLN*, ut *BC* ad *OL*, sive ut *OL* ad *AB*: proinde rectangulum sub prima, nempe peripheria *BED*, & quarta *AB*, sive ejus dimidium (nempe triangulum, cujus basis est peripheria *BED*, & quarta *AB* altitudo) æquatur rectangulo sub secunda, seu peripheria *MLN*, & tertia *OL*, seu triangulo sub eadem secunda *MLN* & tertia *OL*, quod est ejusdem rectanguli dimidium. Sed triangulum, cujus basis est peripheria *BED*, & altitudo *AB*, æquatur dati coni superficiei *per Coroll.* 1. *Prop.* 13. *ex Archim. cit.* & triangulum sub peripheria *MLN*, & tertia *OL* æquatur circulo *OLM per Prop.* 5. *ex Archim. cit.* ergo habetur circulus æqualis conicæ superficiei quæsitus. Quod &c.

PRO-

PROBL. XI.

Dato cono recto ABC, *circulum invenire æqualem superficiei conicæ* BDCE *planis parallelis* BC *&* DE *interceptæ*. Fig. 28.

SEctus sit conus per axem triangulo *ABC*, erunt rectæ *BC* & *DE* parallelæ *per Propos.* 16. *lib.* 11. *Eucl.* cum sint sectiones communes ejusdem trianguli cum planis parallelis *BHC* & *DEL*. Sit coni latus *AB* = l, *AD* = m; erit *BD* = $l - m$: item esto *BF* radius circuli basis = r, *DG* radius circuli paralleli = s, & circuli quæsiti radius = x. Ob triangula similia *ABC* & *ADE* est *AB*. *BF*: : *AD*. *DG*, hoc est $l. m :: r. s$; atque hinc $ls = mr$, & $ls - mr = 0$.

Superficies autem conica *ABC* æquatur circulo (*per Theor. præc.*) cujus radius = $\sqrt{lr}$, seu cujus radii quadratum = lr: item superficies conica *ADE* æquatur circulo, cujus radius = $\sqrt{ms}$, seu cujus radii quadratum = ms; erit ergo radius circuli quæsiti, sive ejus quadratum

$$x^2 = lr - ms$$

$$x = \sqrt{lr - ms}$$

COROLL. *Si superior æquatio* $x^2 = lr - ms$ *in proportionem resolvatur; erit* $l - m . x :: x . r + s$.

Nam $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr + ls - mr - ms$.

Inventum autem fuit supra $ls - mr = 0$; *proinde* $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr - ms$; *atque hinc oritur theorema Archimedis, quod est Propos.* 15. *de Sphær. & Cylin.* Circulus habens radium proportione medium inter interceptam parallelis planis *BC* & *DE* partem lateris

ris DB ($= l - m$) & summam radiorum $BF +$ DG ($= r + s$) circulorum, qui sunt in planis parallelis, æquatur superficiei conicæ $BDCE$ parallelis planis interceptæ.

P R O B L. XII.

Dato cylindro sphæram æqualem invenire.
Fig. 29. & 30.

Supponatur factum, & sphæra M sit æqualis cylindro $ABCD$. Concipiatur sphæræ M circumscriptus cylindrus $EFGH$ habens tam latus FH, quam diametrum basis HG, utrumque æquale diametro spæræ LN; erit cylindrus $EFGH$ sphæræ circumscriptus ejusdem sesquialter; hoc est $= \frac{3}{2}$ sphæræ *per Propos.* 32. *Archim. ex Tacquet.* Proinde si fiat $PC = \frac{3}{2}$ DC, erit cylindrus $BP = \frac{3}{2}$ cylindri BD *per Prop.* 14. *l.* 12. & æqualis cylindro circumscripto $EFGH$; cum sphæra & cylindrus BD ex hypothesi sint æquales.

Sit jam cylindri dati diameter $BC = a$, altitudo $DC = b$; erit altitudo $PC = \frac{3}{2} b$. Sit autem sphæræ diameter LN, vel $FH = x$.

In cylindris æqualibus BP & FG erit basis BCK ad basim CHZ (vel quadrata diametrorum earumdem $\overline{BC}^2$, $\overline{GH}^2$ *per Prop.* 2. *l.* 12.) ut reciproce altitudo FH ad altitudinem PC, hoc est

$$a^2 . x^2 :: x . \frac{3}{2} b$$

$$x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} a^2 b}$$

Ex quo patet, problema esse solidum, & ad ejus solutionem duas medias proportionales esse inveniendas inter a & $\frac{3}{2} b$; nempe $\div\!\!\div\, a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$. Nam ex quadratis diametrorum a^2 & x^2 habentur tres continue proportionales $\div\!\!\div\, a, x, \frac{x^2}{a}$ *per Propos.* 20. *l.* 6. *Eucl.*, ex superiori autem æquatione $x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$ eruitur $\frac{x^3}{a^2} = \frac{3}{2} b$ dividendo per a^2; proinde $\div\!\!\div\, a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{3}{2} b$.

SCHOL. *Egregium hoc Archimedis problema, quod ipse statim initio* lib. 2. de Sphæ. & Cyl. *analytico fere modo proposuit, illud deinde componit per duas medias proportionales, & nos eodem modo, sed aliquanto brevius absolvemus.*

Demonstr. Sit $CD = \frac{2}{3} CP$; erit cylindrus $BD = \frac{2}{3} BP$ cylindri. Tum inter BC & CP inveniantur duæ mediæ proportionales LN & R per modum aliquem mechanicum ex allatis a P. Tacquet ad *Propos.* 13. *lib.* 6. *Eucl.* Dico, LN esse diametrum sphæ-

sphæræ æqualis cylindro dato BD. Nam sphęręM concipiatur circumscriptus cylindrus $EFGH$, cujus basis diameter, & altitudo sint æquales diametro sphæræ LN, vel EG; erit eadem sphæra $= \frac{2}{3}$ cylindri circumscripti $EFGH$ *per Prop.* 32. *Archim. ex Tacquet*. Idem autem cylindrus circumscriptus æquatur cylindro BP. Nam cum sint quatuor continue proportionales BC, LN, R, CP, erit vicissim $BC . R :: LN . CP$ *per* 16. *l.* 5. *Eucl.* Sed $BC . LN :: \overline{BC}^2 . \overline{LN}^2$ *per* 2. *l.* 12. *Eucl.* ergo erit BC ad LN, basis ad basim, ut LN, vel EG altitudo cylindri GF ad CP altitudinem cylindri BP; ergo hi duo cylindri æquantur *per* 15. *l.* 12 *Eucl.* proinde etiam sphæra M, & cylindrus BD æquabuntur, cum ambo sint $= \frac{2}{3}$ æqualium cylindrorum BP, GF. Quod &c.

APPENDIX

De constructione problematum solidorum.

Cum toties in hoc tractatu de resolutione problematum solidorum per curvas obtinenda mentio facta sit, abs re non erit hoc loco de illa breve aliquod specimen exhibere. Cum autem nulla sit methodus, quantum ego opinor, Cartesiana brevior, aut facilior, quæ nimirum circulum duntaxat, & parabolam adhibet; hanc ipsam ex Cl. Halleji (*a*) annotatis explicare conabimur, præmissis, quæ ad rei intelligentiam viam sternunt. Hæc autem methodus secundum terminum ex æquatione sublatum petit.

DE-

(*a*) In Transact. Anglicanis n. 183. p. 335.

DEFINITIONES.

I. CUrva *Algebraica* illa dicitur, quæ per æquationem Algebraicam definiri poteſt; vel illa, in qua per lineas rectas explicari poteſt ratio, quam ſingula curvæ puncta ad axem, vel diametros dicunt. Sic in circulo AMB (*Fig.* 31.) ex quovis diametri puncto P ducta perpendiculari PM, ponatur $AB = a$ & $AP = x$; erit $BP = a - x$: ſit $PM = y$; erit $\overline{MP}^2 = AP \times PB$ *per Prop.* 35. *lib.* 3. *Eucl.*, hoc eſt $yy = ax - xx$, & cum talis æquatio, ſeu circuli proprietas ſemper eadem reperiatur ex quocumque diametri puncto ducatur perpendicularis PM, dicitur *æquatio circuli*, & ipſe circulus *curva algebraica*, licet ob ſummam in ejus deſcriptione facilitatem tanquam figura plana conſideretur. Perpendicularis PM dicitur *ſemiordinata*, ſeu *applicata* ad axem, vel ad diametrum AB; portio vero diametri AP dicitur *abſciſſa*. Utraque quantitas dicitur *variabilis*, quia utraque creſcit & decreſcit; adeoque exprimi ſolent per x & y. *Semidiameter* vero circuli, & in Parabola aliiſque curvis *latus rectum*, ſeu *parameter* dicuntur quantitates *conſtantes*: nam aliis creſcentibus, vel decreſcentibus, ipſæ eædem manent.

II. *Parabola* eſt curva algebraica (*Fig.* 32.) in qua ſemiordinatæ quadratum æquatur facto ex abſciſſa in parametrum. Sit Parabola BAC, cujus vertex punctum A, recta AD indefinite producta *axis*, AL *latus rectum*, ſeu *parameter*: perpendiculares ad axem PM, pm dicuntur *ſemiordinatæ*; AM, vel Am *abſciſſæ*. Quælibet vero recta ON, vel PQ axi AD parallela dicitur *Parabolæ diameter*.

X Po-

Ponatur semiordinata $PM = x$, & abscissa $AM = y$, parameter $AL = a$: cum *ex Propos. 11. lib. 1. Conic. Apollonii* sit $\overline{MP}^2 = AM \times AL$, erit $xx = ay$: quæ quidem est proprietas & natura Parabolæ, quæ per talem æquationem algebraicam designatur.

Coroll. *Est ergo* $x = \sqrt{ay}$, *hoc est semiordinata* MP *est media proportionalis inter parametrum* AL, *&* *abscissam* AM. *Nam* $a . x :: x . y$: *unde* $x = \sqrt{ay}$.

PORISMA I.

Parabolam in plano describere. Fig. 33.

Sint in eodem plano duæ rectæ AZ & BX indefinite productæ, & ad angulos rectos sibi invicem occurrentes in A. Sumatur in AZ parametri longitudo AD, & in BX axis AB. Tum ex puncto D ducatur DE axi AB parallela. Postea sumantur aliæ duę rectæ AR & CT, quarum prior AR circa punctum fixum A revolvatur, altera vero CT, servato semper ad axem AB, vel ad diametrum DE situ parallelo, progrediatur in rectam AZ; quæ rectæ tamen sic moveantur, ut jugiter sit $DF = AC$. Nam si notentur puncta intersectionum duarum illarum rectarum AR & CT; prodibit curva quæsita, quam dico esse Parabolam.

Demonstr. Ex aliquo curvæ puncto M ducatur recta MP parallela rectæ AD, & ad axem AB ordinata; erit $MP = AC$, & $CM = AP$ *per Prop. 44. lib. 1. Eucl.* Jam vero ob triangula similia FAD & MAC est $AD . DF$ (seu AC ex constructione) :: $AC . CM$, seu AP. Habetur ergo AC, seu PM ($= x$) media proportionalis inter AD parametrum ($= a$), & abscissam AP ($= y$); proinde $x^2 = ay$: ideoque curva AFL est Parabola *ex Defin. 2. hujus.*

SCHOL. *Ad praxim loco rectarum* AR *&* CT, *quas modo expplicato moveri concipimus, apponi solent duæ regulæ mobiles, quarum prima circa clavum in* A *fixum revolvatur, altera in situ ad axem parallelo progrediatur; ex quarum mutua interfectione habentur puncta pro descriptione Parabolæ, ut Fig.* 34. *satis ostendit.*

PORISMA II.

Parabolam in plano alia ratione describere.

Fig. 35.

PArabolæ parameter *AL* producatur indefinite in *N*, & ex puncto *A*, quod erit Parabolæ vertex, elevetur perpendicularis indefinita *AO*. Deinde sumptis in *NL* centris quotcunque pro arbitrio (circino tamen usque ad *L* aperto) fiant arcus rectam *AO* intersecantes in punctis *M*, *M*, *M*, tum etiam rectam *AN* in punctis *P*, *P*, *P*. Patet, quamlibet ex his *AM* esse mediam proportionalem inter datam parametrum *AL*, & abscissas *AP*, *AP*, *AP* *per Coroll. Prop.* 13. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet*. Igitur positis pro parametro *AL*, & *AQ* pro axe Parabolæ describendæ, si abscissæ *AP*, *AP*, *AP* transferantur in axem *AQ* in punctis 1, 2, 3 &c. & ex iisdem punctis ducantur ad axem *AQ* normales 1*N*, 2*N*, 3*N* &c. quæ æquales sint ipsi *AM*, *AM*, *AM* &c. curva per extrema harum perpendicularium transiens erit Parabola *BAC*. Quæ quidem Parabolæ descriptio cæteris longe tutior esse censetur, cum mechanicis instrumentis, quæ plerumque vitio laborant, minus sit obnoxia. Innititur autem *Coroll. post defin.* 2. ut patet.

PROPOSITIO I.

Explicatur Constructionis Cartesianæ methodus. Fig. 36.

1. Describatur Parabola OAN *per Poris.* 1. *aut* 2. cujus vertex A, & axis AQ, parameter autem AL ponatur $a = 1$, & transferatur parametri dimidium $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ ex vertice A in C.

2. Ex puncto C secetur $CD = \frac{1}{2}p$ in ipso axe deorsum; si in æquatione habeatur $-p$: vel sursum retrogrediendo versus A; si fuerit $+p$, & producendo (si opus sit) axem ad partes ipsius A. Quod si punctum $p = 0$, hoc est si æquatio tertio termino careat; tunc CD non ducitur.

3. Ex puncto D (vel ex C, si desit CD) erigatur ad axem perpendicularis $ED = \frac{1}{2}q$ dextrorsum quidem, si fuerit in æquatione $-q$ (ut in hac figura); at sinistrorsum, si fuerit $+q$; erit EA radius circuli describendi.

4. Centro E cum intervallo AE describatur circulus, qui Parabolam secat in punctis O, B, N, ex quibus ducta ad axem perpendicula OP, BC, & FN dant radices æquationis quæsitas; hoc est, quæ sunt ad axis dexteram; ut FN, semper sunt veræ, quæ vero ad sinistram, ut BC, & OP, sunt falsæ. Hæ simul sumptæ radicem veram FN æquare debent, cum æquatio cubica secundo termino careat, ut supponitur. At quæ sequuntur exempla, rem clare ostendunt.

Schol. *Ratio hujus methodi a locorum geometricorum doctrina pendet, quæ docet modum combinandi circulum cum Parabola, cæterisque sectionibus conicis, sublatis*

blatis incognitarum secundis terminis. Sed Cartesius *rem dissimulavit sola praxi contentus. Nos digitum ad fontem tantummodo intendimus, ne propositæ appendicis limites transgrediamur.*

PROPOSITIO II.

Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur. Fig. 37.

I. Construenda sit æquatio $x^3 - px - q = 0$. Describatur Parabola *per Poris.* 1. *vel* 2. *OAN*, cujus parameter *AL* sit $a = 1$, vertex *A*, & axis *AQ*. Sumatur $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$, & $CD = \frac{1}{2} p$. Deinde elevetur ex puncto *D* perpendicularis $DE = \frac{1}{2} q$ dextrorsus quidem ob $- q$; & centro *E* cum intervallo *EA* describatur circulus *OAN*, qui secabit Parabolam in punctis *O*, *B*, & *N*, ex quibus ducta perpendicula *OP*, *BC*, *FN* dant propositæ æquationis radices, duas quidem falsas *OP* & *BC* ad sinistram axis, & tertiam *NF* veram ad dexteram, quæ duabus prioribus æquatur.

Demonstr. Sit $FN = x$, ut supponitur; abscissa $AF = y$, & parameter $AL = 1$, erit ex natura Parabolæ $\overline{FN}^2 = AF \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$ *per Defin.* 2. unde $AF = x^2$, & FD (seu EM) $= AF - AC - CD = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p$. Item $MN = FN - FM$ (seu DE) $= x - \frac{1}{2} q$; adeoque in triangulo rectangulo *EMN* erit $\overline{EN}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MN}^2 = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$.

Similiter in triangulo rectangulo ADE erit $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$. Ex radiorum autem AE, EN æqualitate habetur æquatio; proinde deletis utrinque terminis ſimilibus, remanet.

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$

Quod ſi ſumatur aliqua ex radicibus falſis v. g. $OP = -x$, eadem manet demonſtratio. Nam ſit abſciſſa $AP = y$, ſemiordinata $OP = -x$, parameter $AL = 1$; erit ex natura Parabolæ *per Defin.* 2. $\overline{OP}^2 = AP \times AL$, hoc eſt $x^2 = 1y$: unde $AP = x^2$. Eſt autem $PT = DE$ ($= \frac{1}{2}q$); unde OT ($= OP + PT$) $= -x + \frac{1}{2}q$, & $AD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$: proinde DP ($= DA - AP$) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - x^2$. Jam in triangulo rectangulo ETO eſt $\overline{EO}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{ET}^2$, ſeu $\overline{DP}^2 = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$. Item in triangulo rectangulo EDA eſt $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$; adeoque ob radiorum EO & AE æqualitatem habetur æquatio; deletis proinde utrinque terminis ſimilibus, remanet

$x^4 -$

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$

II. Sit æquatio conſtruenda $x^3 + px - q = 0$, ſeu $x^3 + 3x - 6 = 0$. Deſcripta Parabola (*Fig.* 38.) NAM, cujus axis AO, vertex A. Aſſumpta parametro $= 1$, ſecetur $AC = \frac{1}{2}$, & ſumatur CD $(= \frac{1}{2} p) = \frac{3}{2}$ ſupra punctum A, cum adſit in æquatione $+ p$. Elevata deinde perpendiculari ad axem ED $(= \frac{1}{2} q) = 3$, dextrorſum ob $- q$, fiat centrum in E, & intervallo EA deſcribatur circulus EAM, qui Parabolam ſecat in unico puncto M, ex quo ducta normalis PM ad axem dat radicem veram PM.

Demonſtr. Producta PM in F, cui occurrat perpendicularis EF demiſſa ex puncto E, quæ parallela, & æqualis erit ipſi DP, ut patet; ſit $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2} p$, $ED = PF = \frac{1}{2} q$, $PM = x$, $AP = y$, & parameter $= 1$. Erit FM $(= PF - PM) = \frac{1}{2} q - x$, & DA $(= DC - AC) = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$.

Jam ex natura Parabolæ $\overline{PM}^2 = 1 \times AP$, hoc eſt $xx = 1y$; unde $AP = xx$, & PD $(= PA + AD) = xx + \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$. Ob duo triangula rectangula EDA, EFM eſt $\overline{AE}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} pp - \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. Similiter $\overline{EM}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{MF}^2$

 $= x^4$

$= x^4 + px^2 - qx + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} pp - \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. Sed EA & EM sunt æquales; ergo & eorum quadrata: proinde habetur æquatio, & deletis terminis similibus utrinque, remanet

$$x^4 + px^2 - qx = 0$$
$$x^3 + px - q = 0$$

Subrogatis autem valoribus p, q, erit $x^3 + 3x - 6 = 0$.

COROLL. *Ubi circulus Parabolam non secat (ut in hoc casu) nisi in unico puncto, signum, est alias duas æquationis datæ radices esse imaginarias. Quod optime convenit cum iis, quæ diximus in* Propos. 4. Cap. 9. *nimirum duas radices imaginarias haberi, si in æquatione fuerit* $+ p$.

III. Construenda sit æquatio $x^3 + px + q = 0$, seu $x^3 + 1x + 1 = 0$. Describatur Parabola (*Fig.* 39.) cujus parameter $= 1$, vertex A, axis AR. Secetur $AC = \frac{1}{2}$, & a puncto C versus A sumatur $CD = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2}$. Punctum D cadit præcise in A, & ex puncto A, vel D ducatur perpendicularis $AE = \frac{1}{2} q = \frac{1}{2}$ sinistrorsus ob $+ q$, factoque centro in E cum intervallo EA, fiat circulus EAF secans Parabolam in F, ex qua intersectione ducta ad axem normali FM, habetur radix falsa FC (cum sit ad axis sinistram), & aliæ duæ imaginariæ *ex super. Coroll.*

Demonstr. Sit parameter $AL = 1$, abscissa $AC = y$, & applicata FC ex hypothesi $= - x$; erit ex natura Parabolæ $\overline{FC}^2 = AC \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde

unde AC, seu EN (quæ ex centro E ducitur ad FC perpendicularis) $= x^2$, & ED, seu $NC = \frac{1}{2}$; ideoque $FN = (FC - CN) = -x - \frac{1}{2}$. Jam igitur in triangulo rectangulo ENF est $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{FN}^2$, hoc est

$$\frac{1}{4} = x^4 + x^2 + 1x + \frac{1}{4}$$
$$x^4 + x^2 + 1x = 0$$
$$x^3 + x + 1 = 0$$

SCHOL. *Si circulus Parabolam tangit, duæ intersectiones coincidunt, perinde ac illam in duobus punctis perexiguo ac fere nullo intervallo distantibus secaret, & sectiones illæ in puncto contactus coirent; adeoque tunc æquatio duas habet radices æquales. Quod si eam neç tangit, nec secat, radices omnes sunt impossibiles.*

PROPOSITIO III.

Æquationes biquadraticas construere. Fig. 40.

DEscripta Parabola cum parametro, vertice, & axe omnino ut *in præc. Prop.* factum est, debet insuper pro æquatione biquadratica construenda augeri, vel minui circuli describendi radius AE; hoc est si in æquatione fuerit $-r$, additur; si fuerit $+r$, subtrahitur ex quadrato radii AE rectangulum ar factum ex parametro a, & ex data quantitate r. Nam circuli hujus intersectiones cum Parabola dant quæsitas æquationis radices, veras quidem semper ad axis dexteram, falsas ad sinistram. Res fiet exemplis clarissima.

I. Construenda sit equatio $x^3 - qx - r = 0$, quæ præter secundum etiam tertio termino caret. Descripta Parabola FAG, cujus latus rectum $AL = a = 1$, vertex A, axis AN, ex puncto C dextrorsum (ob $-q$) elevetur normalis $CE = \frac{1}{2}q$. Circuli describendi radius AE augeri debet ob $-r$ rectangulo ar. Igitur producatur AE hinc inde indefinite, & AB secetur æqualis parametro $AL = a$, $AS = r$. Tum descripto super BS semicirculo BDS, & ex puncto A elevata perpendiculari AD ad diametrum BS; erit $\overline{AD}^2 = BA \times AS = ar$, ductaque ED, erit $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$. Habetur ergo DE circuli describendi radius quæsitus auctus rectangulo ar; factoque centro E cum intervallo ED, fiat circulus DRG, qui Parabolam secabit in punctis R & G, ex quibus ducta ad axem perpendicula RM & NG dant radices æquationis propositæ, NG veram, utpote ad axis dexteram, & MR falsam ad sinistram. Ducatur ex puncto E perpendicularis EQ.

Demonstr. Sit $NG = x$, & abscissa $AN = y$. $\overline{AD}^2 = AB \times AS = ar$; unde $AD = \sqrt{ar}$. $QG = CE - NG = \frac{1}{2}q - x$; & ex natura Parabolæ $\overline{NG}^2 = NA \times a$, nempe $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{xx}{a} = AN$. Similiter $EQ\ (= AN - AC) = \frac{xx}{a} - \frac{1}{2}a$.

Jam in triangulo rectangulo ECA est $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. Item in triangulo rectangulo EQG est $\overline{EG}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{x^4}{a^2} - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$.

aa. Tandem in triangulo EAD est $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$ $= \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$. Igitur ob æqualitatem radiorum ED & EG, erit

$$ar = \frac{x^4}{a^2} - qx$$

$$x^4 - a^2qx = a^3r$$

$$(\text{ ob } a = 1) \quad x^4 - qx = r$$

$$x^4 - qx - r = 0$$

Idem demonstrari potest assumpta radice negativa $RM = -x$.

II. Sit (*Fig.* 41.) construenda æquatio $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, seu $x^4 - px^2 + qx + r = 0$. Describatur Parabola, cujus latus rectum $a = 1$, vertex A, & axis AD, in quo secetur $AC = \frac{1}{2}$, & $CD = \frac{1}{2}p$. Tum sinistrorsum ob $+q$ elevetur perpendicularis ad axem $DE = \frac{1}{2}q$. Liquet ex dictis, minuendum esse ob $+r$ circuli describendi radium rectangulo ar. Proinde producta utrinque AE indefinite, secetur $AB = a$, & $AH = r$: tum super diametro BH describatur semicirculus HMB, & ex puncto A elevetur perpendicularis AM. Similiter super AE describatur semicirculus ANE, in quo ducatur chorda $= AM$; seu (quod idem est) secetur arcus AN, posito circino in A cum intervallo AM. Igitur intervallum EN erit radius quæsitus circuli centro E describendi. Nam $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$ in triangulo rectangulo ENA, & $\overline{AN}^2 (= \overline{AM}^2) = BA \times AH = ar$. Itaque descripto sic circulo, Parabola intersecatur in punctis G, F, P, & Q, ex quibus demissæ ad axem

axem normales Gc, FR, OP, & CQ, habentur quatuor æquationis datæ radices, duæ quidem ad axis dexteram veræ, & duæ falsæ ad sinistram.

Demonstr. Sumatur quælibet radix v. g. $OP = x$, & sit abscissa $AO = y$: erit ex natura Parabolæ $\overline{OP}^2 = AO \times a$, hoc est $x^2 = ay$; atque hinc $y = \frac{x^2}{a} = AO$. Deinde $\overline{AM}^2$, seu $\overline{AN}^2 = BA \times AH = ar$, unde $AN = \sqrt{ar}$, & in triangulo rectangulo ENA (ductis rectis EN & AN) erit $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - ar$.

Similiter quia $PK = x + \frac{1}{2}q$, & OD, seu $EK = AO - AC - CD = \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; in triangulo rectangulo EKP erit $\overline{EP}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx + \frac{1}{4}q^2$. Igitur propter radiorum EP & EN æqualitatem habetur æquatio

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = - ar$$

$$x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$$

Hinc posito $a = 1$, & subrogatis valoribus p, q, & r; erit $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, qualis proposita fuit.

Coroll. *Constructiones æquationum tertii & quarti gradus fere omnino conveniunt. In hoc tamen differunt, quod in cubicis circulus transit per Parabolæ verticem, non autem in biquadraticis.*

Schol. I. *Præclara hæc* Cartesii *methodus id incommo-*

modi nonnullis habere visa est, quod secundum æquationis terminum, si adsit, tolli jubeat. Huic molestiæ Thomas Bakerus (*a*) Anglus *occurri posse animadvertit, si loco axis Parabolæ, uti* Cartesius *fecit, adhiberetur aliqua Parabolæ ipsius diameter, ad quam ducerentur ex intersectionibus Parabolæ & circuli ea perpendicula, quæ ut vidimus, dant radices quæsitas. Hac regula, quam a ratione tradita circuli centrum determinandi,* Centralem *vocat, æquationes omnes cubicas & biquadraticas quomodolibet affectas & completas sine ulla prævia reductione construere docet. At vero tot illa nodis intricata est, & tot cautionibus de signis* + *&* — *obnoxia, ut remoto libro, vix possit quis omnes memoria retinere, ut* Cl. Hallejus (*b*) *testatur, qui multis annotationibus ei plurimum lucis attulit; quemadmodum deinde* Christophorus Sturmius (*c*) *&* Wolfius (*d*) *fecerunt, apud quos videant, qui volunt.*

SCHOL. II. *Sicuti Parabolam & circulum mutuo intersecari vidimus, & inde obtineri datarum tertii & quarti gradus æquationum radices, ita circulus cum ellipsi, vel hyperbole, aut duæ quælibet ex iisdem conicis sectionibus pari ratione combinari possunt ad problemata cujuscunque gradus construenda, quemadmodum* Dn. de la Hire (*e*) *&* Marchio (*f*) Hospitalis *egregie fecerunt. Nos duas medias continue proportionales ex duarum Parabolarum intersectione mox inveniemus.* Menechmus *id primus docuit.*

PRO-

(*a*) Clavis Geometrica Cathol. Londini 1684. (*b*) Transf. Anglic. *n.* 188. p. 335. an. 1687. (*c*) Mathes. enucl. p. 349. (*d*) Constructt. æquat. probl. 254. (*e*) Sectiones Coniques liv. 9. & 10. (*f*) Construct. des æquat. Analyt.

P R O B L. I.

Inter datas a & q *duas medias proportionales invenire.* Fig. 42.

I. SIt prior quæsita $= x$, erunt quatuor continue proportionales $a . x . \frac{x^2}{a} . \frac{x^3}{a^2}$; proinde $\frac{x^3}{a^2} = q$, & $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$.

Vel sic: sit prior quæsita $= x$, altera $= y$. Quoniam ex hypothesi $\div a . x . y . q$ sunt continue proportionales; erit $a^2 . x^2 :: x . q$ *per Coroll. Prop.* 20. *l.* 6. *Eucl.* adeoque $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut prius.

Pro constructione descripta Parabola *FAP*, cujus parameter $a = 1$, vertex *A*, & axis *AQ*, secetur $AC = \frac{1}{2}$, & ex puncto *C* elevetur normalis $CE = \frac{1}{2} q$ dextrorsum quidem ob $-q$. Tum centro *E* cum intervallo *AE* describatur circulus *EAP*, Parabolam secans in puncto *P*; erit applicata *PM* radix quæsita $= x$.

Demonstratio a cæteris non differt, ductis recta *EP*, & perpendiculo *EN*. Nam sit parameter $= a$, $AC = \frac{1}{2} a$, $EC = \frac{1}{2} q$, $AM = y$, & $MP = x$; erit $PN \; (= PM - MN) = x - \frac{1}{2} q$. Cum autem ex natura Parabolæ sit $AM \times a = \overline{PM}^2$, hoc est $ay = xx$, erit $y = \frac{xx}{a}$; adeoque $AM = \frac{xx}{a}$, & MC, seu $EN \; (= AM - AC) = \frac{xx}{a} - \frac{1}{2} a$. Jam in triangulo rectangulo ENP est $\overline{EP}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{PN}^2 = \frac{x^4}{aa} - qx + \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4}$

qq;

qq; eademque ratione in triangulo rectangulo ACE est $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, quæ duæ æquationes sunt æquales ob æqualitatem radiorum ejusdem circuli EP & AE; proinde æqualibus utrinque detractis, remanet

$$\frac{x^4}{aa} - qx = 0$$
$$x^4 - aaqx = 0$$
$$x^3 - aaq = 0$$

COROLL. *Hinc habetur modus inveniendi inter duas datas tot medias proportionales, quot volueris. Sint datæ a & q, & quæsitarum prima* $= x$. *Continuetur progressio geometrica* $\because a . x . \frac{x^2}{a} . \frac{x^3}{a^2} . \frac{x^4}{a^3} . \frac{x^5}{a^4} . \frac{x^6}{a^5}$ *&c. & numerus terminorum, qui binario superat quæsitarum proportionalium numerum, fiat æqualis alteri quantitati datæ* q. *Sic ut habeantur tres mediæ proportionales, fiat* $\frac{x^4}{a^3} = q$, *unde erit* $x^4 = a^3q$. *Item si quærantur quatuor proportione mediæ, fiat* $\frac{x^5}{a^4} = q$; *erit* $x^5 = a^4q$ *& sic de cæteris.*

II. Sint, ut prius, datæ a & q, inter quas inveniendæ sint duæ mediæ proportionales x & y; erit $a . x :: x . y$, unde $ay = x^2$. Similiter $x . y :: y . q$, adeoque $qx = y^2$, quæ duæ æquationes Parabolæ naturam exprimunt *ex Defin.* 2. *hujus*. Ex prima habetur $y = \frac{x^2}{a}$; quo valore posito in secunda, oritur $qx = \frac{x^4}{a^2}$, atque hinc $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut superius.

Pro

Pro construct. (*Fig.* 43.) secent se ad angulos rectos in A duæ rectæ DB & EC. Secetur $AB = a$ datarum priori, & $AC = q$ alteri datæ. Tum super axe AD cum paramento AB describatur Parabola AMP. Item super axe AE cum paramentro CA describatur Parabola AMN; & ex punctis intersectionum ducantur ad suos axes semiordinatæ MP & MN; erunt AN & AP duæ mediæ proportionales quæsitæ, hoc est $AB . AN :: AN . AP :: AP . AC$.

Demonst. Sit $AN (= PM) = x$, & $AP (= MN) = y$, æquatio ad Parabolam AMP est $\overline{PM}^2 = AP \times AB$, hoc est $x^2 = ay$. Eadem ratione æquatio ad Parabolam MAN est $\overline{MN}^2 = AN \times AC$, hoc est $y^2 = qx$. Cum igitur ex priori habeatur $a . x :: x . y$, ex altera vero $x . y :: y . q$, evidens est, in continua esse ratione $a . x . y . q$, nempe $AB . AN . AP . AC$. Quod &c.

Coroll. *Ex inventione duarum proportione mediarum sequitur celebratissima cubi duplicatio, quæ tandiu veterum Geometrarum mentem exercuit. Sint enim in continua proportione* a . x . y . q, *seu (positis* a = 1 *&* q = 2) 1 . x . y . 2. *habebit prima* 1 *ad quartam* 2 *rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundam* x per Defin. 10. lib. 5. Eucl. *Sed cubus ex prima* 1 *ad cubum ex secunda* x *habet pariter rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundam* x, *hoc est, quam habet* 1 *ad* 2 per Propos. 33. lib. 11. Eucl. *ergo cubus ex secunda* x *duplus est cubi dati* 1.

Schol. D. Guido Grandus (*a*) *celeberrimus in Academia Pisana Matheseos Professor Mesolabium expeditissimum pro inventione duarum mediarum inter duas datas publicavit Florentiæ anno* 1728. *cujus ope non modo*

(*a*) Flores Geometrici in Appendice.

do duplicatio cubi, ſed anguli quoque triſectio, diviſio ſphæræ in partes datæ rationis, & omne prorſus problema ſolidum poteſt facillime ſolvi.

PROBL. II.

Datum angulum AED, *vel arcum* ABCD *in tres æquales partes dividere*. Fig. 44.

SUpponatur diviſio jam facta in punctis *B* & *C*; erit chorda *AB* = *BC* = *CD*. Ducantur radii *EA*, *EB*, *EC* & *ED*, tum chorda *AD*; at *BN* ſit parallela radio *CE*.

Triangula *AEB*, *BEC*, *CED* ſunt æqualia, iſoſcelia & ſimilia, quod evidens eſt. Item triangula *EAB* & *BAR* ſimilia ſunt: nam præter angulum *ABR* communem, angulo quoque ad centrum *AEB* æquatur angulus *BAD* ad circumferentiam *per Prop. 20. lib. 3. Eucl.* cum ſubtendat arcum duplum: unde *EB*, ſeu *EA*. *AB* :: *AB*. *BR*: & cum triangulum *AEB* ſit iſoſcele; erit quoque *BAR* iſoſcele; proinde *AB* = *AR*. Idem omnino demonſtrari poteſt de triangulo *DEC* reſpectu trianguli *CMD*, quod pariter eſt iſoſcele: unde *CD* = *MD*.

Jam in iſoſcele *BAR* anguli *ABR* & *ARB* ad baſim æquantur, itaque angulus *CBE* (= *ABR*) = *BRA*, ſeu *MRE* ad verticem, ideoque *BC* & *RM* ſunt parallelæ. At vero triangula *ABR* & *BRN* ſunt æquiangula: nam præter angulum communem *BRN* angulus quoque *NBR* = (ob parallelas *BN*, *CM*) *CEB* = *BEA* = *BAR*, & tertius *ABR* = *BNR* tertio. Cum autem triangulum *ABR* ſit iſoſcele; erit quoque *NBR* iſoſcele; hinc *BN* = *BR*, & ob triangulorum ſimilitudinem *AR*, ſeu *AB*. *BR* :: *BR*. *RN*. Erat autem *EA*. *AB* :: *AB*. *BR*; ſunt ergo in continua ratione *EA*. *AB*. *BR*. *RN*.

Sit jam radius $EA = 1$, chorda $AB = x$, erunt quatuor termini continuo proportionales $1 . x . x^2 . x^3$. At quia in isoscele BAR est $AB = AR$, item in isoscele CDM est $CD = MD$, in parallelogrammo autem NC est $BC = NM$; sequitur, chordam AD (quam voco q), addita NR, æqualem esse tribus rectis AB, BC & CD; hoc est $AD + NR = AB + BC + CD$; proinde $q + x^3 = 3x$. Habetur ergo æquatio $x^3 - 3x + q = 0$.

Constr. Describatur Parabola (*Fig.* 45.) MAN, cujus parameter AL sit $a = 1$, vertex A, & axis AQ, in quo secentur $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$, & $CD (= \frac{1}{2} p)$ $= \frac{3}{2}$. Tum ex puncto D elevetur normalis ad axem $DE = \frac{1}{2} q$ ad sinistrum axis latus ob $+ q$. Factoque centro E cum intervallo EA fiat circulus $EANM$ secans Parabolam in punctis P, N & M; ex quibus ad axem applicata PT est æqualis chordæ quæsitæ $AB = BC = CD$. At RN est radix æqualis chordæ AF, quæ tripartito dividit alterum arcum AFD. Tertia MQ est radix falsa duabus PT & RN veris æqualis.

Demonstr. Sit abscissa $AT = y$, & semiordinata $TP = x$, parameter $AL = 1$; erit ex natura Parabolæ $\overline{TP}^2 = AT \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$: unde $AT = x^2$. Est autem $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$; & in triangulo rectangulo AED est $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 = 4 + \frac{1}{4} qq$.

Deinde DT ($= EG$) $= DA - AT = 2 - x^2$, & $GP = GT$ (seu ED) $+ TP = \frac{1}{2}q + x$; proinde

inde in triangulo rectangulo EGP est $\overline{EP}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GP}^2$ $= 4 - 4x^2 + x^4 + x^2 + qx + \frac{1}{4}qq$; adeoque ob radiorum EP & AE æqualitatem oritur æquatio

$$4 + \frac{1}{4}qq = x^4 - 3x^2 + qx + 4 + \frac{1}{4}qq$$
$$x^4 - 3x^2 + qx = 0$$
$$x^3 - 3x + q = 0$$

COROLL. *Hinc liquet, oleum & operam perdere Geometriæ tyrones, dum anguli trisectioni per lineam rectam & circulum inveniendæ insudant, cum sit problema solidum.*

PROBL. III.

In Æquationibus cubicis usus præc. problematis peculiaris ostenditur.

Sit æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$, in qua cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major sit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$; tunc erunt tres radices reales & inæquales *per Propos.* 1. *num.* 2. *Cap.* 9., quæ quidem per Algebram obtineri non possunt, & occurrit casus ille *Irreducibilis* de quo diximus *in Schol.* 3. *Prop.* 9. *Cap.* 9. Adhibitis enim Cardani formulis, æquationis radix, quæ realis esse debet, per quantitates imaginarias exprimitur, quod est absurdum. At vero per subtensas arcuum, seu per anguli trisectionem æquationis ejusdem radices opportune designantur modo nunc explicando *Fig.* 44.

Radio $AE = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, qui sit proportione medius inter quantitatis cognitæ p trientem & unitatem

Vide Schol. Probl. 7. *Cap.* 12.) describatur circulus ADF, in quo ducatur chorda $AD = \frac{3q}{p}$, quæ nempe sit ad datam quantitatem q, ut 1 ad $\frac{1}{3}p$, adeoque obtinebitur, si fiat ut $\frac{1}{3}p . 1 :: q . \frac{3q}{p}$. Deinde supponatur divisus arcus $ABCD$ in tres æquales partes AB, BC, CD *per Probl. præc.* ita ut AB, vel BC, aut CD sit $= -x$: patet enim ex signis, in data æquatione haberi duas radices falsas, & unam veram. Cum triangula AEB, BAR & RBN similia sint, erit $AE\ (\sqrt{\frac{1}{3}p}) . AB(-x) :: AB(-x)$. $BR\left(\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}\right) :: BR\left(\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}\right) . RN\left(\frac{x^4}{-\frac{1}{3}px}\right) = -\frac{x^3}{\frac{1}{3}p}$. Est autem recta $AD + NR = AB + BC + CD$, ut *in præc. Probl.* vidimus; proinde $\frac{3q}{p} - \frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = -3x$, atque hinc $\frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = 3x + \frac{3q}{p}$, hoc est $x^3 = px + q$, seu $x^3 - px - q = 0$.

Descripta igitur Parabola OAN (*Fig.* 37.) *per Poris.* 1. *aut* 2. tum etiam circulo ENO, qui eam secat in punctis O, B, N, si ex his applicentur ad axem rectæ BC, OP & FN, prodibunt radices æquationis datæ, nimirum BC æqualis chordæ $AB = -x$, OP æqualis chordæ $AF = -x$, & $FN = x$; quæ quidem est vera, & duabus prioribus (ad sinistram positis) falsis æqualis. Itaque casus in Albebra *Irreducibilis* ex Geometria per anguli trisectionem facile solvitur.

SCHOL.

SCHOL. Albertus Girardus (*a*) *hanc methodum*, *cujus est auctor*, *fuse demonstrat*, *quam* Nic. de Martino (*b*) *in Neapolitano Lyceo Regius Mathematum Professor egregie contraxit*.

PROBL. IV.

Quæstionem Pappi resolvere.

PAppus Alexandrinus initio *lib. 7. Collect. Mathemat.* mentionem facit de problemate quodam perplexo, ac difficili, cujus solutionem neque Euclides, neque Apollonius invenerant. Hanc vero Cartesius (*c*) novo Analyseos præsidio post quinque, aut sex hebdomadas extricavit, ibique Geometriæ suæ initia auspicatus est, ubi veteres terminnm sibi statuerant. Infinitos autem casus quæstio illa complectitur: ex quibus nos unum vel alterum ex facilioribus, quique per circulum & parabolam construi possint, expendemus, ne tyrones tam famosæ quæstionis notitia diutius lateat. En igitur, qualis a Cartesio (*d*) luculenter exponitur, quæ a Pappo tantum fuerat verbis subobscuris indicata.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis, quæritur primo punctum, a quo totidem aliæ rectæ lineæ singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum datarum, si sint quatuor; aut si quinque sint, ut parallelepide-

 dum

(*a*) Invention Nouvelle en l' Algebre an. 1629. Vid. Fr. a Schooten in Append. de Cubic. æquat. resolut. (*b*) Nova Algeb. Elem. lib. 2. Cap. 7. num. VI. (*c*) Epist. 71. Tom. 2.
(*d*) Geometr. lib. 1. pag. m. 10.

dum, quod ſub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepidedum, quod ſub duabus reliquis comprehenditur, & alia quadam data. Aut ſi ſex ſint, ut parallelepipedum ſub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum ſub tribus reliquis comprehenſum &c. Atque ita porro quæſtionem hanc ad omnem alium linearum numerum extendere licet.

I. Datæ ſint (*Fig.* 46.) quinque rectæ inter ſe parallelæ Aa, Bb, Dd, Ee, Ff, quæritur punctum C, ex quo ſi ad quinque rectas datas ducantur CA, CB, CD, CE, CF, quæ cum prioribus faciant angulum datum gr. 80., parallelepipedum ſub $CA \times CD \times CE$ ſit ad parallelepipedum ſub $CB \times CF$, & recta data $2a$, ut 2 ad 1.

Eſto factum: & quia datis parallelis datur quoque earum diſtantia, ſeu rectæ AB, BD, DE; ſint hæ ſingulæ $= a$, $EF = \frac{1}{2}a$, & $CB = x$: erit $CA = x + a$, $CD = x - a$, $CE = x - 2a$, $CF = x - \frac{5}{2}a$. Atque hinc erit ex conditione problematis

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 \,.\, 2ax^2 - 5a^2x :: 2 \,.\, 1$$
$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = 4ax^2 - 10a^2x$$
$$x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 2a^3 = 0$$

Hæc autem æquatio cum per nullum binomium dividi poſſit, tolli debet ſecundus terminus, ut per parabolam & circulum conſtrui poſſit. Fiat igitur $x - 2a = y$; erit $x = y + 2a$, factaque terminorum ſubſtitutione, oritur æquatio ſecundo termino carens *per Prop.* 5. *Cap.* 6.

$$y^3 * - 3a^2y + 4a^3 = 0$$

Hinc ex formula generali $y^3 - px + q = 0$, erit $-3a^2 = -p$, $4a^3 = q$, deſcriptaque parabola cum pararametro $a = 1$, tum etiam circulo omnino, ut *in Propos.* 1. *hujus* factum est, invenietur y, cui si addantur $2a$, innotescet punctum x ($= y + 2a$) $= BC$. Ducta jam Cc cæteris Aa, Bb &c. parallela, ex quovis puncto ejusdem ducantur rectæ datas parallelas in angulo dato secantes, solvitur quæstio.

II. Datæ sint (*Fig.* 47.) positione septem parallelæ, quarum sit æqualis distantia $= a$, quæ faciant quemcunque angulum cum recta AG : quæritur punctum M, ita ut solidum $MC \times MA \times ME \times MG = MD \times MB \times MF \times 4a$. Sit $MD = x$; erit $MC = x + a$, $MB = x + 2a$, $MA = x + 3a$, $ME = MD - DE = x - a$, $MF = FE + ED - DM = 2a - x$, $MG = GD - DM = 3a - x$. Atque hinc oritur æquatio

$$-x^4 + 10a^2x^2 - 9a^4 = 16a^3x - 4ax^3$$

$$x^4 - 4ax^3 - 10a^2x^2 + 16a^3x + 9a^4 = 0$$

Quæ quidem cum per nullum binomium dividi possit, auferri debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construatur. Itaque sumatur $x - a = y$; erit $x = y + a$, & *per Prop.* 5. *Cap.* 6. oritur æquatio secundo termino carens

$$y^4 \ * - 16a^2y^2 - 12a^3y + 12a^4 = 0$$

Et comparatis hujus terminis cum formula generali, erit $-16a^2 = -p$, $-12a^3 = -q$, $+12a^4 = r$. Proinde facile construitur *per Prop.* 3. *hujus*, & invenitur y, cui si addatur $+a$, innotescet punctum quæsitum $x = y + a$, a quo ducta Mm cæteris Aa, Bb, Cc &c. parallela, ex quocunque illius puncto ducatur recta parallelas Aa, Bb, Cc &c. secans in angulo dato; erit problema solutum.

F I N I S.

INDEX

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

Prop.

APPENDIX

De Fractionibus Decimalibus.

C A P U T III.

De Calculo Exponentiali.

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

CAPUT V.

De Æquationibus simplicibus.

Prop.

CAPUT VI.

De Æquationibus Compositis.

C A-

CAPUT VII.

De Resolutione Æquationum Compositarum, quæ Radices Rationales habent.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis, & aliis altiorum graduum.

CAPUT XI.

De Limitibus Radicum, earumque Approximatione.

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

APPENDIX

De Constructione Problematum Solidorum.

FINIS.

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

AVendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del *P. F. Filippo Rosa Lanzi* Inquisitore Generale del Santo Officio di Venezia nel Libro intitolato: *Institutiones Analyticæ earumque usus in Geometria, cum appendice de Constructione Problematum Solidorum auctore Paulino a S. Josepho Lucensi*, non v'esser cosa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi; concediamo Licenza a *Simone Occhi Stampatore di Venezia*, che possi esser stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 28. Giugno 1763.

(*Sebastian Zustinan Ref.*

(*Polo Renier Ref.*

(*Alvise Vallaresso Ref.*

Registrato in Libro a Carte 171. al N. 916.

Davidde Marchesini Seg.

Pag. 14. lin. 30 lege 150.

22. lin. 6. lege $-\frac{ac}{b}$

56. lin. 3. lege $2x+b$

59. lin. 11. lege quadrato quadrata

62. lin. 14. lege $-\frac{3}{2}$

87. lin. ult. lege $=\sqrt{AA-BB}$

88. lin. 20. lege $\frac{10}{2}=5$

99. lin. 5. lege x^3-ax^2

103. lin. 8. lege $4d^2x^2$

104. lin. 10. lege $a-x=b+c$

129. lin. ult. lege $5=9$

133. lin. 18. lege x^3-3x^2

147. lin. 21. lege $+abbc^3$

153. lin. 21. lege $-2p^2q^2x^2$, & lin. 22. lege $-2p^2x^8$

159. lin. 25. lege $-4ax^3$, & lin. pen. lege $20a^3x$

166. lin. 14. lege $+24$

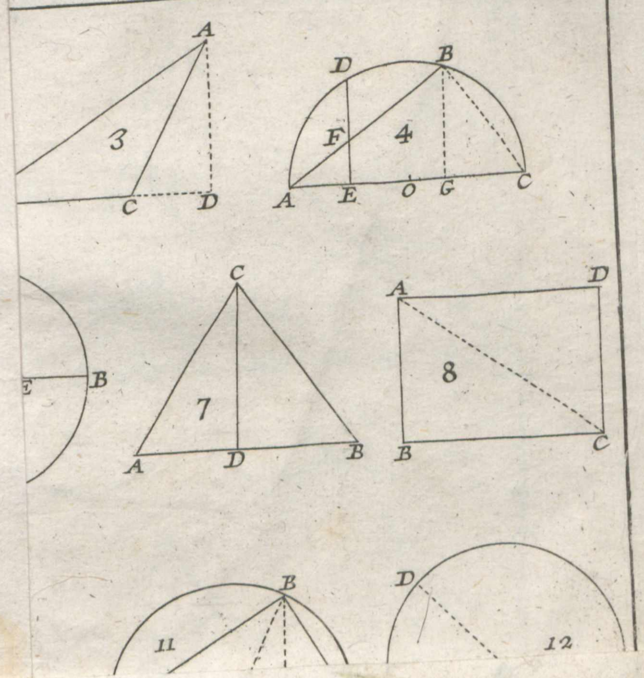
183. lin. 7. lege & x^2, & lin. 8. lege $x+y$

218. lin. 12. lege $\frac{gg-ff}{g+f}=\sqrt[3]{}$

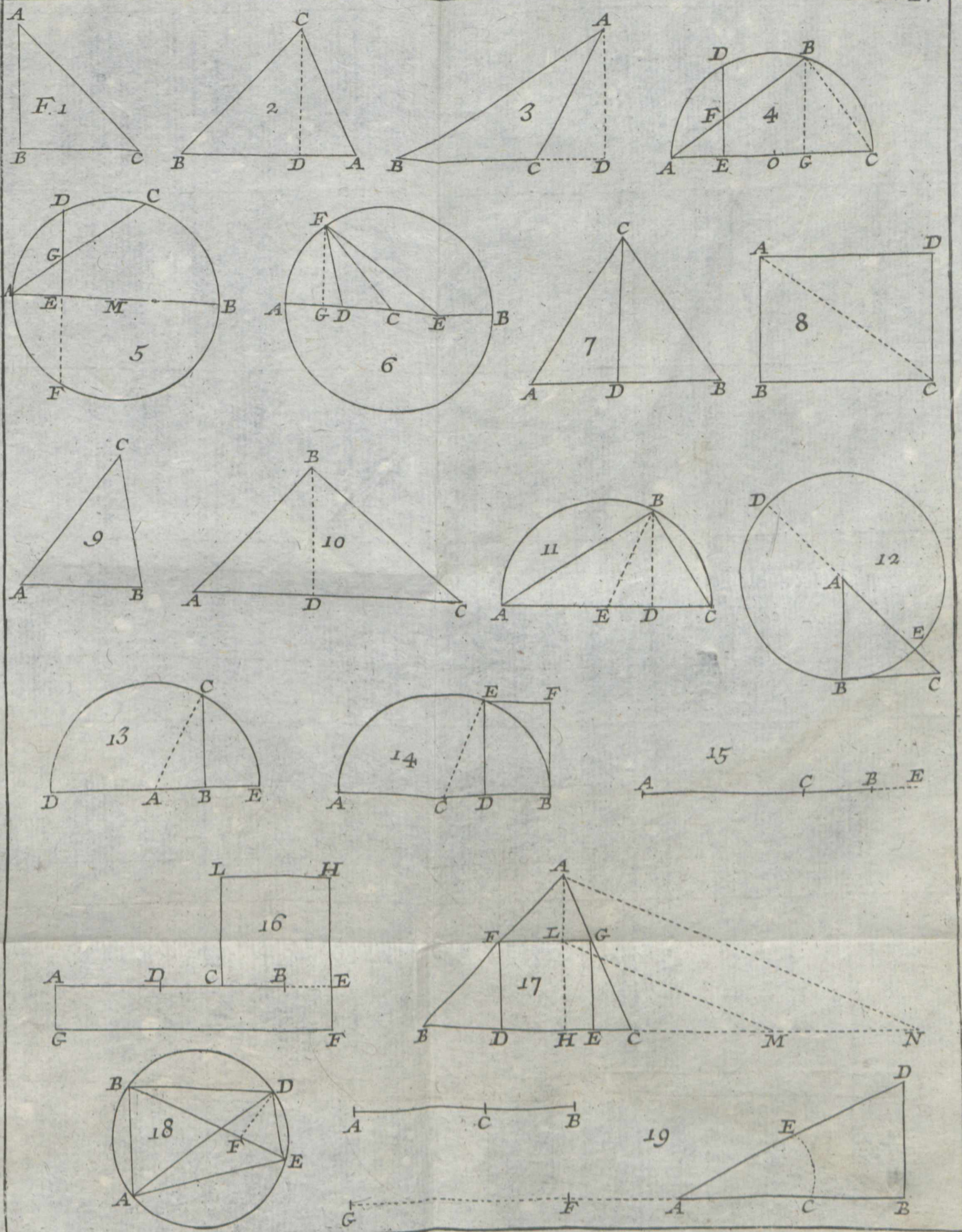
260. lin. 17. lege $=a$

329. lin. pen. lege x^4

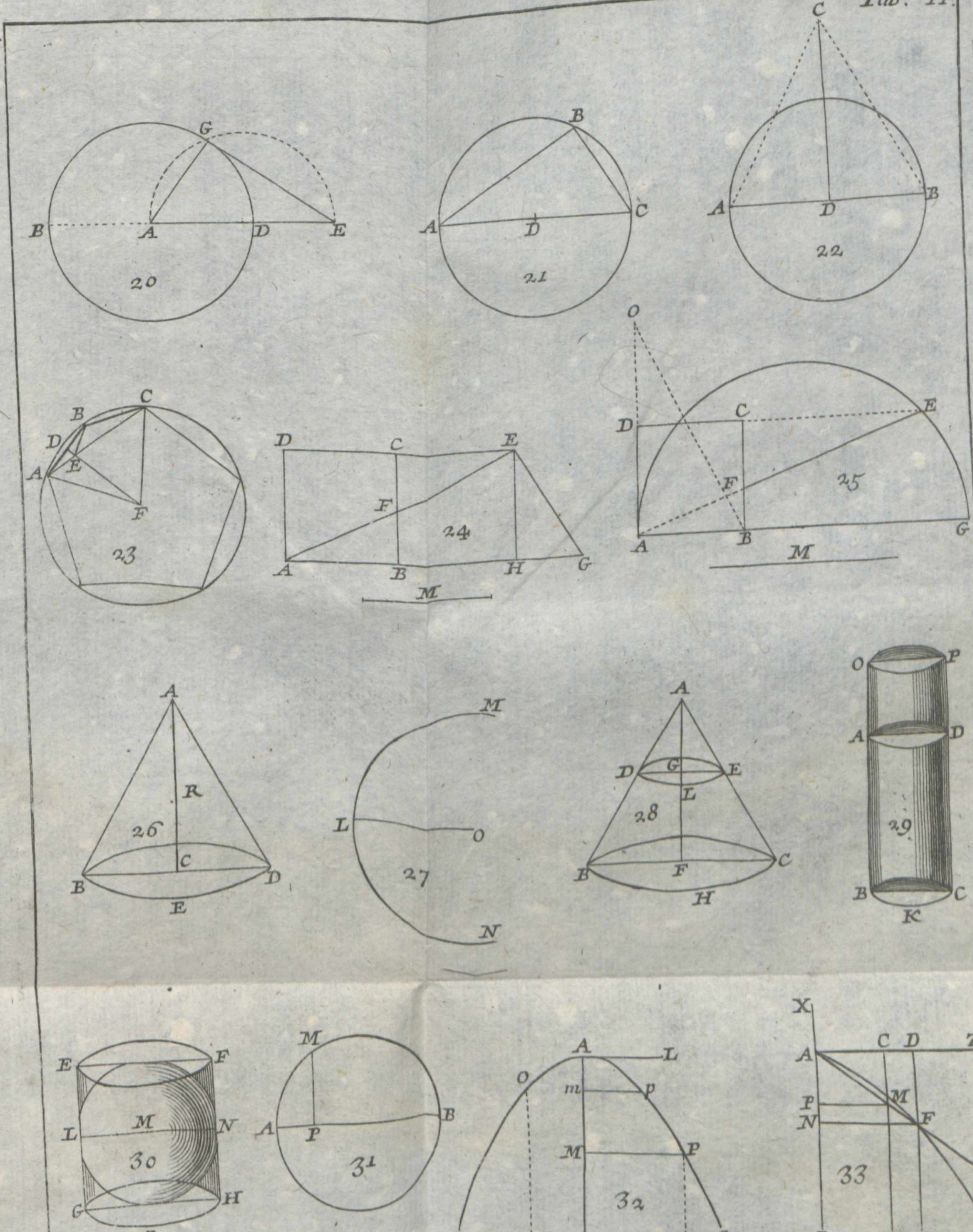
Tab. I.



Tab. I.

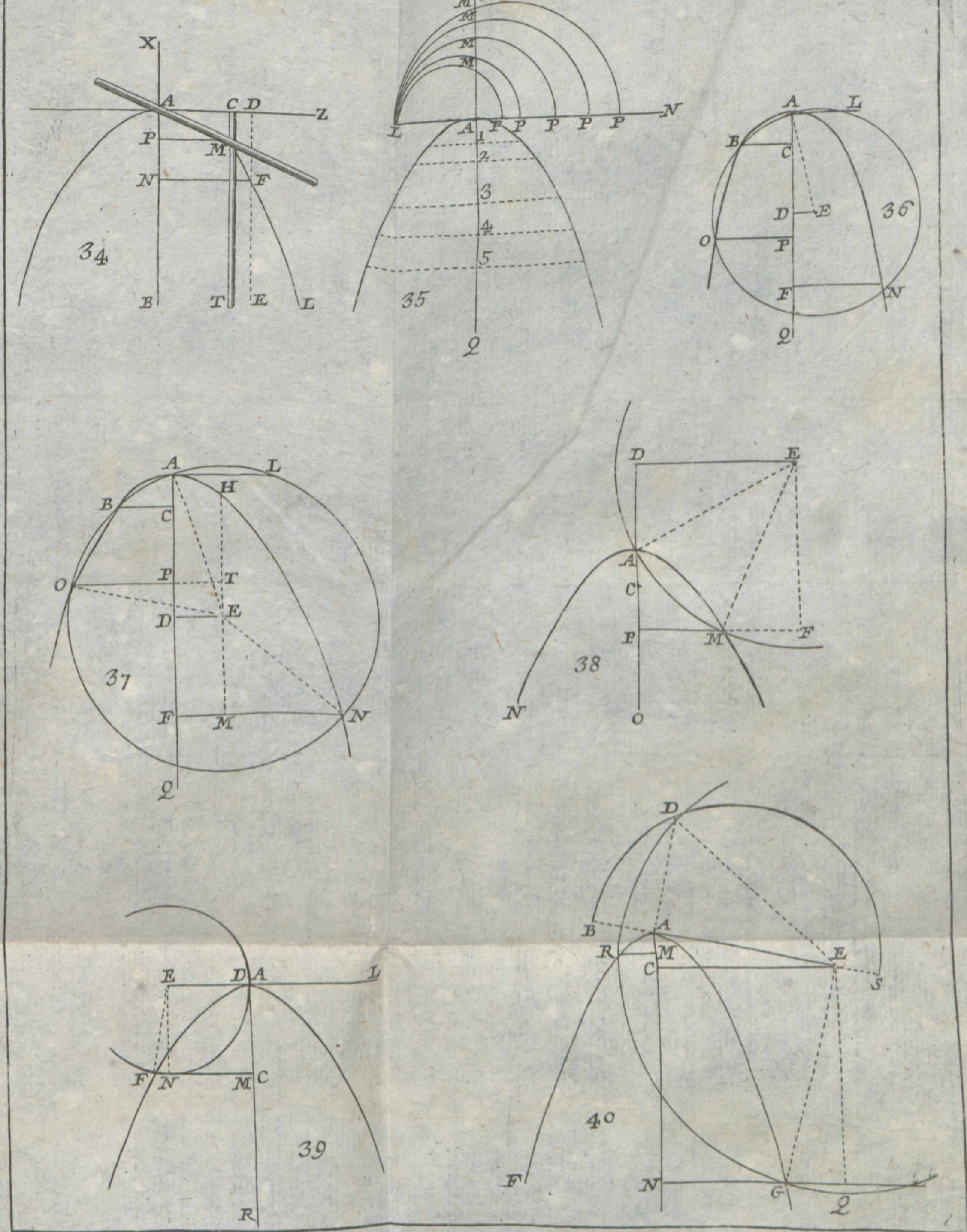


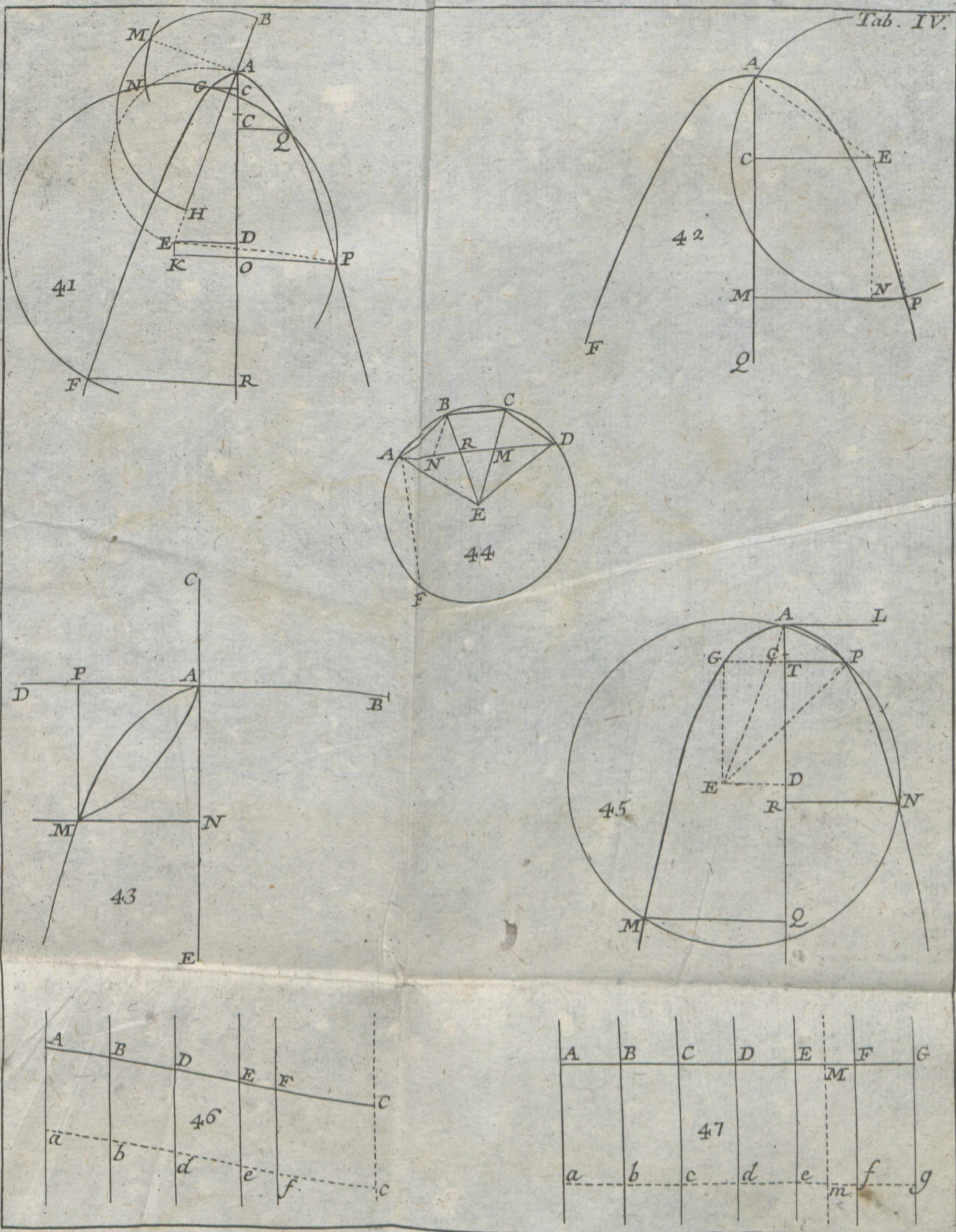
Tab. II.



20
B A D E G
21
A D C B
22
C A D B
23
B C D A E F
24
D C E F A B H G M
25
O D C E F A B G M
26
A R C B D E
27
M L O N
28
A D G E L B F C H
29
O P A D B C K
30
E F L M N G H Z
31
M A P B
32
A L O m p M P B N D Q C
33
X C D Z A P M N F R B T E L

Tab. III.




Tab. IV.
41
42
43
44
45
46
47

12

11. 1.
400
2
2|390.
199

117
100 2
1270.

199
1
200.