17505

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie.

von

M. Johann Tobias Mayer.

Zweyter Theil,
mit 6 Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlage der Wittwe Vandenhoek, 1779.

17505

Vorerrinnerung.

Daß ich den zweiten Theil meiner practischen Geometrie, mit den Untersuchungen über die Fehler beym Winkelmessen anfange, hierauf zur Prüfung der Werkzeuge fortgehe, und noch einige Vorrichtungen beschreibe, wodurch Werkzeuge zum Winkelmessen einen höhern Grad von Vollkommenheit erlangen können, dies hielt ich für nützlicher, als sogleich vom Winkelmessen zur Entwerfung der Figuren auf dem Felde fortzugehen; denn eben die richtige Ausübung des letztern hängt von diesen Kenntnissen ab, und ein Feldmesser, der anders so viel Theorie verstehet, als zum Verstande der erstern Kapitel dieses zweiten Theils erfordert werden, wird mir hierin sicher Beyfall geben. Aber solte sich nicht mancher Feldmesser, wegen einiger Buchstabenrechnungen die ihm in die Augen fallen werden, abschrecken lassen, sich den Inhalt davon bekant zu machen? Ich glaube nicht; er müste denn gar zu unwissend seyn, und nicht einmahl die vornehmsten Lehren der Elementargeometrie

und Trigonometrie verstehen. — Hat er aber die Lehre von den Kugelschnitten, und Lage der Ebenen gegeneinander, sich wohl bekant gemacht, so wird er gewiß wenig Schwürigkeit finden, den Inhalt des Xten und XIten Kapitels zu verstehen, weil ich in der Auseinandersetzung der darin vorkommenden sphärischen Dreyecke, so umständlich verfahren bin, als es mir für Anfänger nöthig schien, und wenn man die in den trigonometrischen Lehnsätzen beygebrachten Formeln für die Auflösung der sphärischen Dreyecke, auch ohne Beweis, nur als Vorschriften ansiehet, nach denen man rechnen kan, so bald man verstehet, was ihr Ausdruck in Buchstaben, für eine Bedeutung hat, so wird die Anwendung dieser Vorschriften keine Schwürigkeit verursachen; die Bedeutung der erwähnten Formeln läst sich aber gar leicht ins Deutsche übersetzen, wenn man nur weiß, daß z. E. Ausdrücke von der Art

$$\sin A + \sin B;\ \sin A - \sin B;\ \sin A \sin B;\ \frac{\sin A}{\sin B};$$

u. s. w. Summen, Unterschiede, Producte oder Quotienten von ein paar Sinussen bedeuten. Und daher überlasse ich es jedem

dem Anfänger, die Ausdrückungen durch Buchstaben, die in oberwähnten Formeln vorkommen, selbst in Worte zu übersetzen; eben diese Errinnerung gilt für das XVII Kapitel, dessen Inhalt einem Feldmesser doch gewiß sehr nöthig ist, aber ohne Ausdrückungen durch Buchstaben, unendlich weitläuftig und ermüdend seyn würde.

Solchergestalt wird, nach einer kleinen Uebung, die kurze Sprache der Mathematiker in die gewöhnliche überzutragen, mancher Feldmesser, der sonst gewohnt ist, Anwendungen der Buchstabenrechnung in der practischen Geometrie als Pedanterie anzusehen, eine vortheilhaftere Meinung von dieser Verkürzung des Vortrags erhalten, und von der Ungereimtheit seiner erstern Meinung überzeugt werden.

Wer aber demohnerachtet anders denket, der muß freylich einige Kapitel dieses Buches übergehen, und nur diejenigen lesen, die er zu verstehen glaubt. — Er wird dennoch Nutzen davon haben, weil ich das beste, was mir aus eigenen, und andern Erfahrungen bekant ist, gesamlet, und alle Handgriffe und Vorsichten dabey beschrieben habe.

Die Lehre von Ausmessung der Weiten und Höhen, im XV und XVI Kapitel, sind einfache geometrische Operationen, und enthalten die Gründe, zu der Entwerfung ganzer Figuren die ich im XIX Kapitel vorgetragen habe; man wird in diesem Kapitel nicht leicht eine Methode vermissen, der man sich demnächst unter diesen oder jenen Umständen, mit Vortheil beym würklichen Landmessen bedienen kan. Die Anwendung dieser Methoden, werde ich aber im folgenden Theile dieses Buches mit mehrerem aus einander setzen.

Das XVII Kapitel, und andere im Buche zerstreute Stellen, werden manchen Feldmesser, der den Gebrauch des Astrolabii verachtet, und sich wundert, daß man auf Akademien, Lehrlingen der praktischen Geometrie dieses Werkzeug empfiehlt, überzeugen, daß dieses Instrument doch so gar unbrauchbar nicht sey, ja schlechterdings erfordert werde, Arbeiten die ins Große gehen, mit Richtigkeit auszuführen. Freylich werden dazu Winkelmesser erfordert, die etwas anders aussehen, als gemeine Mechanici sie vor 50 und mehreren Jahren verfertigten, und ein Feldmesser

muß

muß in seiner Wissenschaft eben so weit zurücke seyn, der jetzt keine andern Winkelkelmesser kennt, als solche mit bloßen Dioptern und auf denen man höchstens vierthel Grade, oder durch Transversallinien allenfalls 10 Minuten erhalten kan.

Aber wird mancher denken, was helfen genauere Werkzeuge, da man doch die Winkel mit dem Transporteur nicht genauer zu Papiere bringen kan? diese Frage wird niemand thun, der andere Methoden z. E. die im 184 §. kennt, wodurch man in der Ausübung alle mögliche Schärfe erhalten kan.

Man muß beym Gebrauche unterschiedener geometrischen Werkzeuge, jedes nach der Absicht beurtheilen, in der es vorzüglich gebraucht werden kan. So bedient man sich z. B. zur Messung der Figuren aus ihrem Umkreise immer lieber des Meßtisches als des Astrolabii, weil bey dieser Operation selten sehr lange Linien vorkommen, und diese Arbeit meistens nur beym Detail einer Messung gebraucht wird, wobey übrigens viele Kleinigkeiten und Nebenumstände anzumerken sind, die beym Gebrauch des Astrolabii, ein zu weitläuf-

tiges und verworrnes Diarium verursachen würden. Wo aber beym Feldmessen sehr lange Linien vorkommen, wie zum B. in dem Falle, da man aus Standlinien das sogenannte Netze einer Landschaft entwerfen will, und wo doch alle nöthige Richtigkeit erhalten werden soll, da wird man sich keines Instruments als eines Astrolabii bedienen, vorzüglich wenn diese Messung auf ein ganzes Land erstreckt wird, dabey man viele einzelne Messungen zusammen hängen muß.

Ich hätte für die Auflösung verschiedener Aufgaben z. B. für die in §§. 141, 187, 199 VI. VIII, 236 (12) gegebenen Formeln, berechnete Tafeln liefern können, wenn ich nicht befürchtet hätte, gegenwärtiges Werk dadurch weitläuftiger zu machen, als nöthig ist, ohnedem, da sich oft nach den Formeln eben so geschwind rechnen läst, als nach Tafeln, die oft ein mühsames Suchen der Proportionaltheile erfordern.

Ich habe noch einige Druckfehler im ersten Theile bemerkt, und halte es für meine Pflicht, sie nebst denen im gegenwärtigen Theile gefundenen, am Ende dieses Theiles mit anzumerken.

Göttingen im März 1779.

Joh. Tob. Mayer.

Inhalt
der trigonometrischen Lehnsätze.

Formeln, um wie viel sich ein Sinus oder Cosinus ändere, wenn der zugehörige Bogen um etwas wächst oder abnimmt. XXVI. XXX.
Um wie viel sich ein Product ändere, wenn jeder Factor sich um etwas ändert. XXXII.
Eben diese Untersuchung vom Quotienten. XXXIII.
Um wie viel Tangente, Secante u. s. w. sich änderen wenn der Bogen um etwas wächst. XXXVII.
Um wie viel sich einer Zahl Logarithme ändert, wenn sie selbst um etwas wächst oder abnimmt. XXXIX-XLIV.
Wie sich die Logarithmen der trigonometrischen Linien ändern, wenn die zugehörigen Bogen, wachsen oder abnehmen. XLVII.
Formeln aus der sphärischen Trigonometrie, Einleitung dazu. XLIX.
Die Formeln für die Auflösung der sphärischen Dreyecke selbst. LI. u. f.
Erläuterung durch ein Beyspiel. LVIII.
Eine Zweydeutigkeit bey der Formel $\sin A \sin b = \sin B \sin a$. LVIII. Anmerk.

In-

Inhalt des zweiten Theils.

X. Kapitel.

Untersuchung, was für ein Fehler im Winkelmessen entstehet, wenn das Werkzeug mit einer Kippregel versehen ist, und nicht genau horizontal stehet. §. 140.
Daß solche Fehler, unter manchen Umständen ziemlich beträchtlich werden können, wenn das Werkzeug gleich nur eine geringe Neigung gegen den Horizont hat. §. 140. XXV.
Wenn das Werkzeug mit keiner Kippregel versehen ist, sondern ein Fernrohr hat, das dem Werkzeuge parallel ist, wo man also bey Winkeln, die nicht horizontal sind, das Werkzeug vorsetzlich neigen muß, zu finden, um wie viel der Horizontalwinkel kleiner oder grösser ist, als der auf dem Werkzeuge erhaltene schiefe Winkel. §. 141. II. V.
Ob man sich in der Ausübung lieber eines Werkzeugs mit einer Kippregel, oder mit einem parallelen Fernrohre bedienen solle. §. 141. VII.

XI. Kapitel.

Fehler beym Winkelmessen, wenn das Fernrohr, als Kippregel, nicht genau in einer Ebene auf und nieder beweglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, und was dazu erfordert werde, daß sich die Kippregel richtig drehet. §. 144.
Berechnung dieses Fehlers. §. 146.
Wie man die hiezu gehörige Neigung des Fernrohrs, über oder unter Horizontallinie finden könne. §. 146. XI.
Zu untersuchen, ob die Kippregel ihre gehörige Vollkommenheit habe. §. 147.
Die Neigung der Axe, um die sich die Kippregel drehet, zu finden. §. 148.
Korrektion der gemessenen Winkel. §. 149.
Eine Vorrichtung, der Kippregel die gehörige Vollkommenheit zu ertheilen. §. 150.

Inhalt.

XII. Kapitel.

Winkel in einer Verticalebene auszumessen, und eine hierzu erforderliche Libelle. §. 152.
Nöthige Eigenschaften einer guten Libelle. §. 153.
Die Libelle mit dem Fernrohre parallel zu machen. §. 154.
Verticalwinkel auszumessen §. 155. und was dabey für Vorsichten zu merken. §. 156.
Fehler die dabey vorfallen könnten. §. 157.
Gebrauch der Quadranten zur Messung der Verticalwinkel und Ersparung einer Libelle dabey. §. 158.

XIII. Kapitel.

Die Fehler der geometrischen Werkzeuge ausfindig zu machen, vermittelst des Stangenzirkels. §. 160.
Vermittelst meines Vaters Methode, Winkel zu messen. §. 161.
Vermittelst der 90 und 96 Theilung. §. 162.
Vermittelst der beyden äußersten Theilstriche des Vernier §. 163.
Gebrauch der Micrometerschraube, die Unterabtheilungen in Grade zu prüfen. §. 164.
Den Werth der Umdrehung einer Micrometerschraube zu finden. §. 165.
Prüfung des Randes vermittelst einer andern Methode. §. 166.
Vermittelst eines auf dem Felde abgesteckten Dreyecks. §. 165.
Prüfung ob die Indices der Verniere ihre Richtigkeit haben. §. 168.
Zu finden ob ein Winkelmesser excentrisch sey. §. 169.

XIV. Kapitel.

Noch einige Mittel sehr kleine Winkel auf dem Felde zu messen und hiezu gehörige dioptrische Lehnsätze. §. 171.
Anwendung dieser Sätze; Micrometer in Fernröhren. §. 172.
Bey dem Schraubenmicrometer im Fernrohre, den Werth einer Umdrehung zu finden §§. 173. 174. eine Tafel die man sich hiezu berechnen könte. §. 174. V. VI.
Micrometer auf Glas mit parallelen Strichen. §. 175; den Werth der Zwischenräume in Minuten und Secunden zu finden. §. 175. II. III.

Er-

Inhalt.

Erfindung dieser Micrometer, nebst der Art solche Micrometer in Fernröhre an Winkelmessern anzubringen. §. 176. II.
Nöthige Vollkommenheit der Glasmicrometer §. 176. IV.
Feinheit der Striche die Hr. Mechanicus Brander aufs Glas ziehet, und wie man auf eine sehr leichte Art dergleichen Linien auf das Glas ziehen könne. §. 176. VII.

XV. Kapitel.

Ausmessung unzugänglicher Weiten mit der Meßkette, in dem Falle, wenn man von einem Standpunkte nach beyden Enden hinkommen kan. §. 178.
Messung solcher Weiten wenn nur nach einem Endpunkte derselben ein freyer Zugang verstattet ist. §. 179.
Gebrauch einer Chordentafel zu dieser Absicht. §. 179. III. Zus.
Eine Weite zu messen zu deren keinem Endpunkte man hinkommen kan. §. 180.
Gebrauch entfernter Objekte hiezu. §. 180. IV. Aufl.
Die Aufgabe des 179 §. mit dem Meßtische aufzulösen. §. 182.
Die Aufg. des 176 §. mit dem Meßtische aufzulösen. §. 183.
Mit dem Astrolabio. §. 183. II. Aufl.
Wie man bey diesen Aufgaben verfahren müsse wenn Durchschnittpunkte ausserhalb des Meßtisches fallen. §. 183 Anm.
Wie man sich das Tragen des Meßtisches von einem Orte zum andern ersparen könne. §. 183. III. Aufl.
Die Aufgabe des 180 §. mit dem Meßtische aufzulösen. §. 184. I. Aufl.
Das Forttragen des Meßtisches dabey zu ersparen. §. 184. II. Aufl.
Auflösung dieser Aufg. mit dem Astrolabio, und Formeln dazu III. Aufl.
Regel, um die ganze Rechnung durch Logarithmen zu führen §. 184. III. Aufl. (15.) und durch ein Beyspiel (18) erläutert.
Vermittelst der an der Standlinie mit dem Astrolabio gemessenen Winkeln, die Weite, die dadurch gemessen werden soll, durch eine Zeichnung auf dem Papiere zu finden. §. 184. IV. Aufl. Dies kan geschehen entweder vermittelst des geradligten Tranporteurs, mit dem man die Winkel aufträgt IVte Aufl. (I) oder durch Berechnung der Seiten der Dreyecke an der Standlinie (II) oder durch Berechnung der Perpendicularlinien (III), die man demnächst gehörig an der Standlinie verzeichnet.

An-

Inhalt.

Anmerkungen die Standlinie betreffend, und Mittel Standlinien von gehöriger Grösse auszufinden. §. 185.
Aus der gegebenen Lage dreyer Oerter auf dem Felde, zu finden, wie weit ein vierter Ort, von jedem dieser drey Oerter wegliegt §. 186. Geometrische Aufl. dieser Aufgabe. §. 186. VII.
Herrn Mech. Branders Aufl. dieser Aufgabe. §. 187.
Noch einige Anmerkungen. §. 188.
Nicht gar zu große Weiten aus einem einzigen Stande zu messen. §. 189. Das Paccecianische Pantometrum §. 189. 13; dessen Gebrauch (14) Entbehrlichkeit (15. 16).

XVI. Kapitel.

Eine Höhe zu messen, wenn man von einem angenommenen Stande, nach dieser Höhe horizontal hinmessen kan. §. 190.
Wenn man von einem angenommenen Stande nicht nach der auszumessenden Höhe hinkommen, aber eine horizontale Standlinie annehmen kan, die mit dieser Höhe in einer Ebene liegt, die Höhe zu finden. §. 191.
Auflösung der Fälle des 190 und 191 §, wenn man genöthigt ist die Standlinie schief, aber doch in einer Ebene mit der auszumessenden Höhe anzunehmen. §§. 192. 193.
Aus einer Standlinie die jede willkürliche Lage und Richtung hat, die Höhe zu messen. §. 195.
Höhen vermittelst des Barometers zu messen, nebst dem Gesetze wie die Dichtigkeit der Luft, und die Barometerhöhe, an jeder Stelle über der Erdfläche, von der Höhe dieses Orts, abhängt. §. 197.
Anwendung dieses Gesetzes auf Messung der Höhen §. 197. XI. nebst einer Regel, aus den Barometerhöhen an zwoen Stationen, zu finden, wie hoch eine über der andern liegt. §. 197. XIV.
Anmerkungen über dieses Verfahren und Verbesserung dieser Regel durch Hrn. de Luc §. 198. I. II. nebst andern Vorsichten, den Gebrauch der Barometer betreffend. III. IV. VI.
Was die Krümmung der Erde auf die Höhenmessungen vor Einfluß habe. §. 199. nebst Formeln das Gefälle zu berechnen. §. 199. IV.
Korrektion der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen der Brechung der Lichtstrahlen §. 200.
Die Refraction ist $\frac{1}{15}$ des Bogens von einem grösten Kreise, der zwischen der auszumessenden Höhe und dem Orte, wo der Elevationswinkel gemessen wird, enthalten ist. §. 200. IX. X.

Was

Inhalt.

Was der verschiedene Grad der Wärme hiebey ändert §. 200. XII.

XII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen. §. 201.
Grösse des unvermeidlichen Fehlers dem man in Messung der Winkel vermittelst des Astrolabii, und Meßtisches, u. s. w. ausgesetzt ist, und für den man nicht gut stehen kan. §. 202.
Gründe zur Berechnung der Folgen dieser Fehler. §. 203. 204.
Wie man diese Berechnung allenfalls durch gemeine Trigonometrie bewerkstelligen könne. §. 205.
Analytischer Vortrag dieser Rechnungsart. §. 206.
In einem Dreyecke die Folgen der in der Grundlinie und den Winkeln begangenen Fehler zu berechnen. §. 207. und wie groß die Folge eines Fehlers, in Absicht der Grösse selbst ist §. 207. XIV. Vortheil dieser algebraischen Methode in Absicht der gemeinen trigonometrischen. §. 207. XIX.
Einige Folgerungen aus dieser Aufgabe in Absicht auf die Auswahl der Standlinie, und unter welchen Umständen Entfernungen am richtigsten und vortheilhaftesten gefunden werden. §. 208. I. II. III.
Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur auf 1 Minute genau misset, so kan man auch bey der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, die Seiten eines Dreyecks nicht genauer als auf $\frac{1}{1000}$ ihrer Länge sicher finden. §. 208. IV. und man kan zufrieden seyn, mit einem solchen Werkzeuge, die Entfernungen nur auf $\frac{1}{100}$ ihre Länge sicher zu finden. (V)
Die Folgen der Fehler in einem Dreyecke zu finden, wenn die beyden Seiten und der eingeschlossene Winkel fehlerhaft gemessen worden. §. 209.
Die Folgen der Fehler zu berechnen, in einem Dreyecke, wo zween Winkel und eine Seite, die einem Winkel gegenüberstehet, fehlerhaft gemessen worden. §. 211.
Anwendungen auf zusammengesetztere Fälle und Schwürigkeiten in jedem Falle eine geschickte Standlinie auszufinden. §. 212.

XVIII. Kapitel.

Eine Figur auf dem Felde, mit der Meßkette zu Papiere zu bringen, indem man alle Seiten und Diagonalen misset, §. 215.

Wie

Inhalt.

Wie dieses auch auf eine andere Art geschehen könne. §. 219.
Wie dieses geschehen könne, indem man die Winkel mit der Meßkette nach der §. 216. gewiesenen Methode bestimmt. §. 217.
Eine krumlinigte Figur blos mit der Meßkette zu entwerfen. §. 218.
Anwendung dieser Methode auf Figuren die sehr viele Seiten haben. §. 219.
Vermittelst des Meßtisches eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn sich von einem Punkte innerhalb der Figur nach allen Ecken hinmessen läst. §. 220.
Vermittelst des Meßtisches eine Figur, die man ganz umgehen kan zu Papiere zu bringen. §. 222.
Proben ob man richtig gemessen hat. §. 223.
Die Station zu finden, wo ein Fehler vorgefallen ist. §. 224.
Die fehlerhafte Figur zu korrigiren. §. 225.
Einschränkung dieser Methode, wenn an mehreren Stationen gefehlet worden. §. 226.
Einige Vorsichten beym Verfahren, eine Figur aus der Peripherie zu messen. §. 227. Es ist vortheilhaft die Figur zu umgehen ehe man die Messung anfängt. (I). Fehler zu vermeiden wenn Theile einer Figur zu nahe an den Rand des Meßtisches kommen (II). Wie man sich hilft, wenn die Dioptern zu niedrig sind (III) u. s. w. Anmerkung krumme Linien betreffend.
Eine Figur die man aus einer Station ganz übersehen kan zu entwerfen. §. 228.
Eine Figur aus ihrer Peripherie zu messen, ohne alle Seiten ringsherum messen zu dürfen. §. 229.
Anmerkungen über dieses Verfahren. §. 230.
Eine Figur aus einer Standlinie zu entwerfen. §. 231.
Nutzen dieser Methode bey Messungen die ins Große gehen, und einige Bemerkungen die Richtigkeit des Verfahrens und die Standlinie betreffend. §. 232.
Wie der Meßtisch nach der Magnetnadel gestellet wird. §. 232. VIII.
Gebrauch der Magnetnadel eine jede Station wo man den Meßtisch hinstellt zu Papiere zu bringen, wenn man nur einige Objekte auf dem Felde, bereits auf den Meßtisch gebracht hat §. 233.
Vortheile dieser Messungsart §. 234.
Nöthige Erforderniß dabey, und Mittel die Magnetnadel zu entbehren. §. 235.

Fehler

Fehler die aus den parallel angenommenen Richtungen der Magnetnadel entstehen, und Mittel sie zu korrigiren, wenn es nöthig wäre. §. 236.
Eine Figur zu Papiere zu bringen, nach der Methode, die bey der Zollmannischen Scheibe gebräuchlich ist. §. 237.
Die Aufgabe des 231 §es mit dem Astrolabio aufzulösen nebst den dabey nöthigen Bemerkungen. §. 239.

XIX. Kapitel.

Durch einen gegebenen Punkt auf dem Felde, mit einer gegebenen Linie eine parallele zu ziehen. §. 240.
An eine Linie einen beliebigen Winkel zu setzen. §. 240. Zus. II. III.
Von einem Punkte nach einem andern, den man gar nicht sehen kan, eine Verticalebene oder gerade Linie abzustecken. §. 241.
Eine Figur abzustecken. §. 242.
Noch eine andere brauchbare Aufgabe. §. 243.

Fortsetzung der im Iten Theile dieses Buches beygebrachten trigonometrischen Lehnsätze.

Untersuchungen, um wie viel sich die trigonometrischen Linien ändern, wenn ihre zugehörigen Bogen oder Winkel, um etwas geringes wachsen, oder abnehmen.

XXV. Es ist schon aus der gemeinen Trigonometrie bekant, daß, wenn die Bogen oder Winkel wachsen, auch die Sinusse, Tangenten und Secanten zunehmen, die Cosinusse Cotangenten, Cosecanten aber abnehmen, vorausgesetzt, daß die Bogen unter 90° sind — Wenn dieselben über 90° gehen, so nehmen die Sinusse u. s. w. wieder ab, und die Cosinusse u. s. w. nehmen zu. Es ist klar daß die Veränderungen eines Bogens, und der zugehö-

gehörigen trigonometrischen Linie von einander abhängen — Und da diese Lehren in dem Falle, wo die Winkel oder Bogen sich nur um etwas weniges ändern, künftig bey Berechnung der Folgen der Fehler, wie auch bey andern Gelegenheiten grossen Nutzen haben, so werde ich itzt zeigen, wie man aus dem Wachsthum eines Bogens, die Zu oder Abnahme der zugehörigen trigonometrischen Linie auf eine leichte Art finden könne.

XXVI. Es bedeute also a einen gewissen Bogen, und $a+\alpha$ einen andern Bogen, welcher von dem ersten um den kleinen Bogen α unterschieden ist; Es frägt sich, um wie viel der Sinus von $a+\alpha$ von dem Sinus des Bogens a unterschieden ist.

Um dieses zu bestimmen, so überlege man daß

$$\sin(a+\alpha) = \sin a \cos\alpha + \cos a \sin\alpha$$

ist (Trig. S. XII. 1)

Weil nun α einen sehr kleinen Bogen bedeutet, so kan man ohne merklichen Fehler annehmen, daß der Sinus dieses kleinen Bogens, dem Bogen selbst, und der Cosinus desselben dem Sinus totus gleich sey. Da wir also den Sinus totus $= 1$ setzen, so ist ohne grossen Irrthum $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \alpha$. Substituirt man

also diese Werthe in obigen Ausdruk, so bekömt man

$$\sin(a+\alpha) = \sin a + \alpha \cos a \text{ Mithin}$$
$$\sin(a+\alpha) - \sin a = \alpha \cos a.$$

Wenn also der Bogen a um α wächst, mithin a sich in $a+\alpha$ verwandelt, so ist der Sinus des Bogens $a+\alpha$ um den Werth $\alpha \cos a$ gröſſer, als der Sinus des Bogens a, oder sin a wächst um $\alpha \cos a$, wenn a um α zunimt.

In dieser Formel ist nun zu bemerken, daß man statt α nicht den Werth dieses Bogens in Minuten oder Secunden setzen dürfe, sondern vielmehr, dessen Werth in Decimaltheilen des Sinus totus. Gesetzt nun der Bogen α sey in Secunden gegeben, so wird dessen Werth in Decimaltheilen des Sinus totus $= \frac{\alpha}{206264}$ (Trig. S. IV. VII) und diesen Ausdruk mus man eigentlich statt α brauchen. Daher ist

$$\sin(a+\alpha) - \sin a = \frac{\alpha}{206264} \cos a.$$

Ex. Um zu sehen, wie das bisherige mit der Wahrheit übereinstimmt, so wollen wir $a = 40°$ und $\alpha = 1' = 60''$ setzen, mithin untersuchen, um wie viel der Sinus von $40°1'$ von dem Sinus von $40°$ unterschieden ist.

Nach obiger Rechnung wäre also

$$\sin 40^\circ 1' - \sin 40^\circ = \frac{60''}{206264} \cos 40^\circ$$

welches man durch Logarithmen auf folgende Art berechnet.

log. 60 =	1,7781513
log cos 40° =	9,8842540—10
Summe =	1,6624053
abgez. log 206264 =	5,3144252
läst	3,3479801

Ich habe nemlich die Characteristic des Logarithmen 1,6624053 in Gedanken um 7 Einheiten vermehrt, damit der Abzug des Logarithmen 5,3144252 bewerkstelliget werden konte, und ein Logarithme übrig bliebe, den man unter der Characteristic 3 in den Tafeln aufsuchen kan. Man muß aber alsdann von der Zahl die dem Logarithmen 3,3479801 zukömt, wie bekant, wieder 7 Decimalstellen abschneiden. Nun gehört dem Logarithmen 3,3479801 die Zahl 2228 zu; Schneidet man also 7 Decimalstellen ab, so wird

$$\frac{60}{206264} \cos 40^\circ = 0,0002228.$$

D. h. der Sinus von 40° ist um 0,0002228 kleiner als der Sinus von 40° 1', oder wenn

der

der Bogen von 40° um 1′ wächst, so nimmt der Sinus dieses Bogens um 0,0002228 Theilgen des Halbmessers zu, wie man auch in der That findet, wenn man die Sinusse von 40° 1′ und von 40° aus den Tafeln nimmt, und sie von einander abziehet.

XXVII. Das Wachsthum, die Abnahme, oder überhaupt die Veränderung einer Grösse wollen wir künfftig mit dem Buchstaben d bezeichnen, welchen man vor diese Grösse setzet. Wenn wir also z. B. andeuten wollen, daß der Bogen a um α wächst, so wollen wir statt dessen vor a den Buchstaben d setzen, und also das Wachsthum des Bogens a durch d a anzeigen, wo also d a so viel bedeutet als das bisherige α.

Hier bedeutet also dieser Buchstabe d keinen Factor, sondern ist nur ein willkührliches Zeichen, so wie man statt der Logarithmen auch sonst den Buchstaben l zu setzen pflegt, und statt der Wurzelgrössen das Zeichen $\surd$.

XXVIII. So würde also dieser Bezeichnung gemäs das Wachsthum eines Sinus durch d sin a, eines Cosinus durch d cos a u. s. w. angedeutet, und es erhellet, daß diese Bezeichnungen eigentlich den Werth anzeigen, um den sich Sinus oder Cosinus eines Bogens a verändern, wenn der Bogen a um α oder d a zunimmt.

Daher wären folgende Ausdrükungen gleichgültig

$$\sin(a+\alpha) - \sin a = \alpha \cos a \text{ oder}$$
$$d \sin a = da \cos a$$

XXIX. Wenn der Winkel a stumpf ist, so wird cos a negativ, mithin auch da cos a oder d sin a negativ D. h. wenn der stumpfe Winkel a um da zunimmt, so nimmt der Sinus desselben um den Werth da cos a ab, weil d sin a oder das Wachsthum des Sinus verneint wird, und ein verneintes Wachsthum ein Abnehmen bedeutet; Eben dieser Satz ist aus der gemeinen Trigonometrie, und aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur klar, wo man bemerken wird, daß wenn ein Bogen über 90° wächst, der Sinus desselben wieder abnimmt.

XXX. Wir wollen nun auf eine ähnliche Art, untersuchen, um wie viel sich ein Cosinus verändert, wenn der zugehörige Winkel um einen geringen Werth wächst. Zu dieser Absicht überlege man, daß wenn a sich in $a+\alpha$ verwandelt, sich cos a in $\cos(a+\alpha)$ oder in $\cos a \cos\alpha - \sin a \sin\alpha$ (Trig. S. XII. 2.) verwandele; weil nun aus eben dem Grunde wie in (XXVI) $\cos\alpha = 1$ und $\sin\alpha = \alpha = da$ (XXVII) gesetzt werden kan, so erhält man

$$\cos(a+da) = \cos a - da \sin a$$

Mit-

Mithin

$$\cos(a+da) - \cos a = -da \sin a$$ oder wie in (XXVII)

$$d\cos a = -da \sin a$$

D. h. der Kosinus des Bogens a nimmt um den Werth $da \sin a$ ab, wenn der Bogen a um da wächst, weil eben so wie in XXIX eine negative Zunahme wie $-da \sin a$ eine Abnahme bedeutet.

XXXI. Wenn x, y ein paar Grössen bedeuten, und man setzt x wachse um dx, y um dy, so ist klar daß die Summe $x+y$ um $dx+dy$ und der Unterschied $x-y$ um $dx-dy$ wachsen werde. Eine Grösse die man um nichts wachsen oder abnehmen läst, deren Wachsthum ist als Null anzusehen, und man nennt solche Grössen unveränderliche — Wenn daher b eine solche Zahl bedeutet die man als unveränderlich betrachtet, so ist $db = 0$.

XXXII. Wenn man annimmt in dem Producte xy verändere sich x in $x+dx$ und y in $y+dy$, so verwandelt sich das Product xy in $(x+dx)(y+dy)$ und wenn man von $(x+dx)(y+dy)$ abziehet xy, so findet sich um wie viel das ganze Product xy wächst, wenn jeder Factor desselben um etwas zunimmt. Nun ist, wenn man würklich multiplicirt

$$(x+dx)(y+dy) = xy+x\,dy+y\,dx+dy.dx$$

Ziehet man also davon ab xy, so findet man zum Ueberreste den Werth $xdy+ydx+dydx$, also um so viel ändert sich das Product yx, wenn jeder Factor sich um etwas ändert. Bezeichnet man also das Wachsthum oder die Veränderung des Products mit dem Buchstaben d, so wird

$$d(xy) = xdy+ydx+dydx.$$

XXXIII. Wenn man auf eben die Art die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$ sucht, unter der Voraussetzung daß x um dx, und y um dy wachse, so erhält man $\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$ für die Veränderung des Quotienten. Bringt man nun diese beyden Brüche unter einerley Benennung, und ziehet sie würklich von einander ab, so erhält man diesen Unterschied mithin das Wachsthum oder die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$; Folglich

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{(y+dy).y}$$

XXXIV. Diese beyden Formeln (XXXII u. XXXIII) gelten, die Werthe dx, dy mögen so groß seyn als sie wollen. Zu unserer Absicht in der Folge nehmen wir aber an, daß diese Grös-

Grössen dx, dy, in Vergleichung der zugehörigen x, y, sehr klein sind, und unter dieser Voraussetzung lassen sich die beyden Formeln noch etwas abkürzen. Wenn nähmlich in (XXXII) die Werthe dy, dx, sehr klein sind z. E. Brüche von sehr grossen Nennern, oder kleinen Zählern bedeuten, so kann man das Producht dy. dx in Vergleichung der Producte xdy, ydx als unendlich gering, und folglich als verschwindend ansehen. Gesetzt es wäre x = 100; y = 60; dx = 0,001; dy = 0,0002 so würde

ydx + xdy + dy. dx =
0,06 + 0,02 + 0,0000002

wo man offenbar den letzten Bruch, als den Werth von dy. dx, in Vergleichung der vorhergehenden Brüche weglassen kan.

Unter dieser Voraussetzung ist daher beynahe

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Und wenn x = y also dy = dx wäre, so hätte man

$$d(x^2) = xdx + xdx = 2.xdx$$

Da drückte also 2xdx aus, um wie viel sich das Quadrat x^2 einer gewissen Zahl verändert, wenn die Zahl x um dx zunimmt.

XXXV. Auf gleiche Weise kann man in der Formel XXXIII statt des Factors y + dy im Nenner ohne merklichen Fehler bloß y setzen, das gäbe demnach

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \qquad \text{XXXVI.}$$

XXXVI. Wenn x eine Grösse wäre, die man um nichts wachsen oder abnehmen liesse, für die also $dx = 0$ wäre, so erhielte man bloß $d(x.y) = x\,dy$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x\,dy}{y^2}$$

Im letztern Falle ist das Wachsthum des Quotienten negativ weil der Werth $-\frac{x\,dy}{y^2}$ negativ ist, wenn die Grössen x, dy, als Positiv angesehen werden. Dis zeigt also an, daß der Quotiente $\frac{x}{y}$ nicht wächst, sondern abnimmt, wenn der Zähler x unveränderlich bleibt, und der Nenner y um dy wächst. Eben dieses ist auch schon aus der gemeinen Lehre von Brüchen klar, wo bekanntermassen ein Bruch abnimmt, wenn der Zähler unveränderlich bleibt, und der Nenner grösser wird.

Wenn man die Werthe von dx, dy negativ nimmt, d. h. wenn man in dem Producte xy, oder Quotienten $\frac{x}{y}$, die Grössen x, y, um dx, dy abnehmen läst, so wird für diesen Fall

$$d(xy) = -x\,dy - y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$$

XXXVII.

XXXVII. Die bisherigen Betrachtungen, werden nun dazu dienen, auch für die Tangenten, Secanten u. s. w. solche Rechnungen anzustellen, wie in (XXIX. XXX) für den Sinus und Cosinus gewiesen worden.

Man kann nehmlich ebenfalls fragen, um wie viel die Tangente oder Secante eines Bogens a wachse, oder überhaupt sich verändere, wenn man den Bogen a um d a zu oder abnehmen läst. Um diese Untersuchung erstlich für die Tangente anzustellen so überlege man daß

$$\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a} \text{ mithin auch}$$

$$d\,\text{tang } a = d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ sey}$$

Weil nun $\frac{\sin a}{\cos a}$ einen Quotienten vorstellet, so läßt sich dessen Veränderung nach XXXV berechnen, wenn man das dortige x hier sin a, und das dortige y hier cos a bedeuten läst; Also hat man

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{\cos a\, d\sin a - \sin a\, d\cos a}{\cos a^2}$$

Nun ist aber aus (XXVIII. XXX)

$$d\sin a = da\cos a \;;\; d\cos a = -da\sin a$$

Substituirt man also diese Werthe so wird

sin

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{da\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\cos a^2}$$

Aber $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$ also

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ oder } d\,\text{tang}\,a = \frac{da}{\cos a^2}$$

Wo man also wenn da gegeben ist, den Werth von d tang a finden kan.

XXXVIII. Weil $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ folglich

$$d\cot a = d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

so sey jetzt das x in (XXXV) $= \cos a$, und $y = \sin a$ so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{\sin a.\,d\cos a - \cos a.\,d\sin a}{\sin a^2}$$

$$d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{-da\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\sin a^2} \text{ oder}$$

$$d\cot a = -\frac{da}{\sin a^2}$$

XXXIX. Weil $\sec a = \frac{1}{\cos a}$ so ist

$$d\sec a = d\left(\frac{1}{\cos a}\right)$$

Man

Man setze also in XXXV $x = 1$; $y = \cos a$; so ist weil sich die 1 nicht verändert $dx = 0$ folglich $d\left(\frac{1}{\cos a}\right) = -\frac{d\cos a}{\cos a^2} = \frac{da \sin a}{\cos a^2}$ $= da \sin a . \frac{1}{\cos a} \frac{1}{\cos a} = da \tang a \sec a$ also

$$d \sec a = da \tang a \sec a$$

XXXIX. Auf eine völlig ähnliche Art, wird wegen $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$

$$d \operatorname{cosec} a = -da \cot a \operatorname{cosec} a$$

XL. Diese Sätze sind von sehr grossen Nutzen, und in der Folge werden wir bey Untersuchung der Fehler in den Messungen, die Anwendung davon machen. Anfängern wird es dienlich seyn, nach Anleitung des Beyspiels XXVI sich auf eine ähnliche Art den Gebrauch der für $d \tang a$, $d \sec a$ u. s. w gefundenen Formeln zu erläutern, wobey dann zu merken ist, daß man unter da immer das Wachsthum des Bogens a in Decimaltheilen des Halbmessers verstehe, oder daß man statt da eigentlich $\frac{da}{206264}$ setzen müsse, wenn da in Secunden gegeben wäre.

XLI. Jetzt wollen wir auch die Untersuchung anstellen, um wie viel sich der Logarithme einer Zahl

Zahl ändert, wenn die Zahl selbst um etwas geringes zu oder abnimmt. Um dieses zu bestimmen, müssen wir aber vorher folgenden Satz beybringen.

XLII. Wenn c eine gegebene Zahl bedeutet die grösser ist als 1, und μ einen jedweden unendlich kleinen Bruch vorstellt, so wird der Ausdruck $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ einen unveränderlichen Werth haben, so lange man c nicht ändert, μ mag übrigens nach Gefallen verändert werden, wenn es nur immer sehr klein bleibt.

Bew. Es bedeute ϱ einen ganz andern kleinen Bruch als μ; Kan man nun beweisen daß

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$$

sey, so erhellet leicht, daß dadurch zugleich dargethan seyn wird, daß sich $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ nicht verändere, wenn man gleich statt μ den kleinen Bruch ϱ setzet.

Um also zu beweisen daß $\frac{\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}}{\varrho} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$ sey, so überlege man folgendes.

Weil

Weil aus der Buchstabenrechenkunst klar ist daß $c^0 = 1$ sey, so erhellet, daß wenn μ oder ϱ ein paar sehr kleine Brüche sind, die Ausdrükungen c^{μ} ; c^{ϱ} nur etwas sehr geringes grösser als 1 seyn können: Man setze also $c^{\mu} = 1+m, c^{\varrho} = 1+r$, so werden auch m, r, ein paar sehr kleine Brüche seyn.

Nun will ich annehmen der kleine Bruch μ sey grösser als ϱ, und also setzen daß μ ein vielfaches von ϱ, also $\mu = \alpha.\varrho$, und α eine ganze Zahl sey. Wäre z. E. $\mu = 3\varrho$ folglich $\alpha = 3$ so zeigte dis an, daß der erstere kleine Bruch dreymahl grösser als der zweite sey u. s. w.

Folglich wäre $c^{\mu} = c^{\alpha.\varrho} = (c^{\varrho})^{\alpha} = (1+r)^{\alpha}$

Man setze nun z. E. es wäre $\alpha = 2$, so wäre $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^2 = 1+2r+r^2$; weil aber r einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so kan man ohne merklichen Irrthum das Quadrat des kleinen Bruchs r, als unbeträchtlich in Absicht der beyden vorhergehenden Glieder, weglassen und daher bloß setzen $(1+r)^2 = 1+2r$.

für α 3, so wäre $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^3 = (1+r)(1+r)^2 = (1+r)(1+2r) = 1+3r$

wei

weil man in dem Produkte $(1+r)(1+2r)$ gleichfalls die höhern Potenzen des kleinen Bruchs r weglassen kan.

Für $\alpha = 4$ hätte man $(1+r)^{\alpha} = (1+r)^4 = (1+r)(1+r)^3 = (1+r)(1+3r) = 1+4r$ aus eben dem Grunde.

Wenn man auf solche Art diese Schlüsse weiter fortsetzt, so siehet man leicht daß allgemein

$$(1+r)^{\alpha} = 1+\alpha.r$$

seyn müsse, vorausgesetzt, daß αr auch noch immer sehr klein bleibt.

Da nun $c^{\mu} = (1+r)^{\alpha}$ so wird auch $c^{\mu} = 1+\alpha.r$ seyn. Aber es ist auch $c^{\mu} = 1+m$ gesetzt worden, folglich hat man $1+m = 1+\alpha.r$ oder $m = \alpha.r$.

Es wird also μ

$$\frac{c-1}{\mu} = \frac{1+m-1}{\alpha.\varrho} =$$

$$= \frac{1+\alpha r-1}{\alpha\varrho} = \frac{r}{\varrho}$$

Ferner auch $\frac{c^{\varrho}-1}{\varrho} = \frac{1+r-1}{\varrho} = \frac{r}{\varrho}$

Also

Also $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$

Man siehet also, daß die Grösse $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ mit $\frac{c^{\varrho} - 1}{\varrho}$ einerley Werth hat, obgleich μ einen ganz andern kleinen Bruch als ϱ bedeutet, und es erhellet daher, daß die Grösse $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$, für ein gegebenes c einen unveränderlichen Werth habe, man mag statt μ für einen kleinen Bruch setzen, was man für einen will. Setzt man also $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = A$ so ist A eine beständige Grösse, welche blos von c, aber keinesweges von μ abhängt.

Aus $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = A$; folgt auch $c^{\mu} = 1 + A\mu$.

Die bisherigen Schlüsse gründen sich darauf, daß μ einen sehr kleinen Bruch bedeute; je klei-

ner nun derselbe ist, desto richtiger wird auch die daraus hergeleitete Folge seyn.

Weil $c^{\mu} = 1+m$ gesetzt worden, so ist $\mu \log c = \log(1+m)$ also $\mu = \frac{\log(1+m)}{\log c}$

mithin $\frac{c^{\mu}-1}{\mu}$ oder $A = \frac{m}{\mu} = \frac{m \log c}{\log(1+m)}$

Dieser Ausdruk dienet also die Grösse A zu finden, wenn man m, als einen sehr kleinen Bruch, willkürlich annimmt.

XLIII. Gesetzt es sey $c=10$; $m = 0{,}00000001$ so wird $A = \frac{0{,}00000001}{\log 1{,}00000001}$ Aber aus Gardiners grossen Logarithmen Tafeln finde ich

$\log 1{,}00000001 = 0{,}000000043429$

dis gäbe demnach

$$A = \frac{0{,}00000001}{0{,}000000043429} = \frac{100000}{43429}$$

oder $A = 2{,}30258$; Daher wäre allgemein für $c = 10$ der Werth $\frac{10^{\mu}-1}{\mu} = 2{,}30258$.

XLIV. Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun die Frage in (XLI) auf folgende Art auflösen.

Gesetzt es sey $\log x = y$, und die Basis des Logarithmischen Systems $= c$, so ist bekant, daß

daß $c = x^y$ sey. Man nehme nun an, daß y um dy wachse, wenn x um dx zunimmt, und die Werthe von dy, dx, seyen in Absicht der Grössen y, x sehr klein, so verwandelt sich die Gleichung

$$\log x = y \text{ in}$$
$$\log (x+dx) = y+dy = \log x + dy;$$

Also $l(x+dx) - \log x = dy$ oder welches einerley ist $\log \left(\frac{x+dx}{x}\right) = dy$ folglich wegen

$\frac{x+dx}{x} = 1+\frac{dx}{x}$ wird,

$$\log\left(1+\frac{dx}{x}\right) = dy$$

Wenn aber c die Basis des logarithmischen Systems ist, so verwandelt sich diese Gleichung ferner in $c^{dy} = 1+\frac{dx}{x}$

Da nun $\frac{dx}{x}$ eine sehr geringe Grösse ist, so wird auch dy einen sehr geringen Werth haben; läst man daher das μ in (XLII) hier dy bedeuten, so hat man ohne beträchtlichen Fehler

$c^{dy} = 1+Ady$ wo A eine unveränderliche Grösse ist, die von der Basi des log.

Systems abhängt (XLII); Es wird demnach

$$1 + A\,dy = 1 + \frac{dx}{x} \text{ also}$$

$$dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder}$$

$$d\log x = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}$$

Woraus also erhellet, daß das Wachsthum des Logarithmen der Zahl x herauskömt, wenn man das Wachsthum der Zahl x, mit der Zahl x selbst dividiret, und den Quotienten mit der unveränderlichen Grösse $\frac{1}{A}$ multiplicirt.

XLV. Für die Briggischen Logarithmen ist $c = 10$ und $A = 2{,}30258$ (XLIII) oder $\frac{1}{A} = 0{,}43429$ mithin, wenn $d\log x$ das Wachsthum des Briggischen Logarithmen der Zahl x bedeutet, so ist

$$d\log x = 0{,}43429 \cdot \frac{dx}{x}$$

Er. Um die Wahrheit dieses Satzes mit einem Beyspiel zu erläutern, so will ich setzen $x = 8900$; und $dx = 1$, also untersuchen, um wie viel der Logarithme von 8901 von dem Logarithmen

men von 8900 unterschieden ist. In diesem Falle wäre also dieser Unterschied oder der Werth von

$$d \log x = 0,43429 \cdot \frac{1}{8900} = 0,0000488,$$

welches man auch in der That so findet, wenn man in den Tafeln die beyden Logarithmen der Zahlen 8901, 8900 von einander abziehet.

XLVI; Da die unveränderliche Grösse $\frac{1}{A}$ von der Basi des logarithmischen Systems abhängt, so läst sich leicht ein gewisses logarithmisches System gedenken, wo $\frac{1}{A} = 1$ wird; dieses logarithmische System nennt man das natürliche, und was es mit demselben für eine Bewandnis habe, das gehört in die höhere Mathematic, und es würde wider unsere Absicht seyn, davon weitläuftig zu handeln, da man ohnedem in der practischen Geometrie die natürlichen Logarithmen selten gebraucht. Man sehe indessen hievon Hrn. H Kästners An. des Un. 213 f u. f. Wir wollen künftig den Werth $\frac{1}{A}$ der Kürze halber mit dem Buchstaben B bezeichnen, und damit hätte man $d \log x = B. \frac{dx}{x}$.

XLVII.

XLVII. Wir können nun vermittelst des gefundenen Ausdrufs, auch das Wachsthum der Logarithmen der Trigonometrischen Linien berechnen, wenn man annimt daß die zugehörigen Bogen, um einen sehr geringen Werth wachsen. Man setze zu dieser Absicht statt x, die Werthe sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a so ergeben sich daraus folgende Formeln;

1) $d \log \sin a = B \cdot \frac{d \sin a}{\sin a}$; aber $d \sin a =$ $d a \cos a$ also

$$d \log \sin a = \frac{B d a \cos a}{\sin a} = B d a \cot a$$

2) $d \log \cos a = \frac{B d \cos a}{\cos a} = - \frac{B d a \sin a}{\cos a}$

oder

$$d \log \cos a = - B d a \tang a$$

3) $d \log \tang a = \frac{B d \tang a}{\tang a}$ aber

$$d \tang a = \frac{d a}{\cos a^2}$$ (XXXVII) daher

$$d \log \tang a = \frac{B d a}{\cos a^2 \tang a} = \frac{B d a}{\cos a \sin a}$$

$$= \frac{2 B d a}{\sin 2a}$$

4)

4) und eben so

$$d \log \cot a = -\frac{2B\,da}{\sin 2a}$$

5) $d \log \sec a = \frac{B\,d \sec a}{\sec a}$ aber $d \sec a = da \tang a \sec a$ daher

$$d \log \sec a = B\,da \tang a$$

6) Und eben so

$$d \log \operatorname{cosec} a = -B\,da \cot a$$

Welche Formeln durchgehends von sehr grosser Brauchbarkeit sind, und dazu dienen werden, in der Folge die Berechnung die Fehler in den Messungen sehr abzukürzen.

XLVIII. Man pflegt die bisher vorgetragenen Formeln sonst auch in der Differentialrechnung abzuhandeln, und leitet sie aus der Lehre von den Gränzen der Verhältnisse her. Da ich diese Lehre hier nicht vortragen durfte, ohne zu befürchten, daß manche Leser darin mehr Geheimnisse suchen mögten, als würklich darinnen enthalten sind, da es ferner auch zu meiner Absicht nicht nothwendig war, das bisherige den eigentlichen Begriffen der Differentialrechnung gemäß vorzutragen, so habe ich einen Weg erwählet, der Anfängern nicht so geheimnisvoll scheinen wird, als die Lehre von den Gränzen der Verhältnisse verschwindender oder unendlich

kleiner Grössen, wenn sie sonst nur mit einiger Aufmerksamkeit, die Sätze ansehen und nachrechnen, wie auch sonst übrigens in Trigonometrie und der Lehre von Logarithmen die erforderlichen Kenntnisse haben.

Formeln aus der sphärischen Trigonometrie.

XLIX. Da es in der practischen Geometrie sehr oft vorkömt, daß man die Lage gewisser Ebenen gegeneinander betrachten muß, und die dahin gehörigen Rechnungen zur sphärischen Trigonometrie gehören, so habe ich für nöthig erachtet, hier wenigstens das allgemeine davon, und die Formeln, nach denen dergleichen Rechnungen anzustellen sind, kürzlich beyzubringen.

1. Man stelle sich also (Fig I) vor, RSEF, STFD seyen ein paar Ebenen, die unter einem gewissen Winkel gegeneinander geneigt sind. SF sey derselben gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

2. Man nehme auf SF einen willkührlichen Punkt F an, und stelle sich vor, durch denselben werde eine dritte Ebene IK, gelegt, welche die beyden erstern durchschnitte.

Die Durchschnittslinien FE, FD der Ebene IK mit den Ebenen RSEF, STFD, werden nun

nun gemeinschaftlich durch den Punkt F gehen, weil die schneidende Ebene IK durch diesen Punkt gelegt ist. Man wird also vermöge der drey Durchschnittslinien, SF, FE, FD um den Punkt F herum drey ebene Winkel SFE, SFD, EFD erhalten, welche bey F eine sogenannte körperliche Ecke begränzen werden.

3. Ausser diesen drey ebenen Winkeln, welche hier die Ecke bilden, kommen nun noch drey andere Winkel in Betrachtung die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander, oder die sogenanten **Flächen Winkel** oder auch **sphärische Winkel.**

4. Um dieselben zu bestimmen, so seyen in der II Figur die Linien SF, FE, FD eben dieselben, welche sich durch die Durchschnitte der Ebenen in der ersten Figur ergeben haben, dergestalt, daß also in der II Figur die drey ebenen Winkel, SFE, SFD, EFD, bey F die Ecke der Iten Figur bilden.

5. Man nehme nun, um den Neigungswinkel der beyden Ebenen, SFE, SFD zu bestimmen, in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie SF, einen willkührlichen Punkt k an, und errichte durch ihn auf SF, ein paar Perpendicularlinien ki, kl, davon kl in der Ebene SFD, und ki in der SFE liege, so ist bekantermasen

der Winkel, ikl, den diese beyden Linien ki, kl, mit einander machen: der Neigungswinkel, der beyden Ebenen SFE, SFD gegeneinander. Auf eben die Art würden die beyden Perpendicularlinien mn, no, davon mn in der Ebene SFE, und no in der Eb. EFD läge, den Neigungswinkel dieser beyden Ebenen, und der Winkel qrp, den die beyden durch r auf FD senkrecht gezogene Linien qr, rp, mit einander machen, den Neigungswinkel der beyden Ebenen SFD, EFD bestimmen.

6. Es kommen also solchergestalt bey einer Ecke, die durch drey Ebenen gebildet wird, sechs Stüke in Betrachtung nemlich, 1) die drey ebenen Winkel SFE, SFD, EFD die die Ecke bilden, und 2) die drey Neigungswinkel mno, ikl, prq, unter welchen die Ebenen gegeneinander geneigt sind, in denen sich die Winkel SFE, SFD, EFD befinden.

7. Man nehme einen willkührlichen Halbmesser an, und beschreibe aus der Ecke F, mit demselben, in den Ebenen SFE, SFD, EFD, die drey Kreisbogen AB, BC, AC, so sind die Bogen AB, AC, BC, der drey Winkel SFE, SFD, EFD, Maasse. Wenn man sich mit dem Halbmesser FA eine Kugel um den Mittelpunkt F beschrieben vorstellet, so würden die nur erwähnten Bogen AB, AC, BC, Bogen von gröſten Kreisen auf der Kugelfläche seyn, und würden gleichsam auf der Kugelflä-

che,

che, ein Dreyek ABC; das von drey Bogen gröſter Kreiſe eingeſchloſſen wäre, abbilden. Dieſes Dreyek gehörte alſo am Mittelpunkte F, der Körperlichen Ecke F zu, und wird ein ſphäriſches Dreyek genannt. Die Bogen AB, AC, BC, als Maaſſe derjenigen Winkel, welche die dem Dreyecke zugehörige Ecke bilden, heiſſen Seiten des ſphäriſchen Dreyecks.

8 Man ſtelle ſich bey A, ein paar Tangenten Aμ, Aλ vor, davon Aμ, den Bogen AB im Punkte A, und Aλ den Bogen AD im Punkte A berühret, ſo ſtehen dieſe beyden Tangenten, auf dem gemeinſchaftlichen Halbmeſſer AF ſenkrecht; da nun auch ik, kl auf AF ſenkrecht ſtehen, ſo iſt ik parallel mit Aμ und kl parallel mit Aλ, daher der Winkel μAλ = ikl (Käſtn. Geom. 46 S. 2 Zuſ.) Alſo der Winkel beyder Tangenten, dem Neigungswinkel der beyden Ebenen gleich, in denen dieſe Tangenten oder die Bogen AB, AC, oder die zugehörigen Winkel AFB, AFC, liegen. Da nun die Tangenten Aμ, Aλ, die Richtungen ihrer Bogen bey A vorſtellen (Käſtn. Geom. 41 S. 6 Z.) ſo ſagt man, die Kreiſe AB, AC, machen bey A, einen Winkel BAC, oder μAλ, welcher dem Neigungswinkel ikl, der beyden Ebenen AFB, AFC gleich iſt.

Eigentlich muß man ſich bey A ein paar Elemente oder unendlich kleine Stükgen der beyden

den Kreise AB, AC vorstellen. Der Winkel dieser beyden Elemente, ist mit den Winkel der Tangenten, oder mit $\mu A \lambda$ einerley, weil die verlängerten Richtungen dieser Elemente, mit den Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ zusammenfallen.

Auf gleiche Weise, und in eben der Bedeutung stellen also auch die Winkel, welche die Kreisbogen AC, BC bey C, und AB, BC, bey B mit einander machen, die beyden Neigungswinkel prq, mno, vor.

9. Das sphärische Dreyeck hängt also mit der Körperlichen Ecke bey F, so zusammen, daß die Seiten desselben die Maasse der ebenen Winkel sind, die die körperliche Ecke bilden, und die sphärischen Winkel BAC, ACB, ABC, den Neigungswinkeln der Ebenen gleich sind, welche die körperliche Ecke einschliessen.

10. Es ist also klar, daß wenn man die Seiten oder Winkel des sphärischen Dreyecks weiß, auch die Grösse der ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke bilden, und die Neigungswinkel der drey Ebenen der körperlichen Ecke, bekant seyn werden.

11. So wie nun in der ebenen Trigonometrie gewiesen wird, daß drey Stücke eines Dreyecks die übrigen drey bestimmen, so läst sich

gleich-

gleichfalls in der sphärischen Trigonometrie darthun, daß aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks, und folglich auch einer körperlichen Ecke, die übrigen drey durch Rechnung gefunden werden können.

12. Was in der ebenen Trigonometrie die Seiten eines Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Tr. die Bogen AB, AC, BC, welche das sphärische Dreyeck bilden, oder vielmehr die ebenen Winkl, AFB, AFC, BFC, welche die körperliche Ecke einschliesen; und was in der ebenen Trigonometrie die Winkel des Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Tr. die Winkel BAC, ACB, ABC des sphärischen Dreyecks, oder die Neigungswinkel, der Ebenen gegeneinander, die die körperliche Ecke begränzen.

13. Nur muß man bey dem sphärischen Dreyecke bemerken, daß die Seiten desselben, oder die Bogen AB, AC, BC, nicht wie in der ebenen Trigonometrie durch Fußmaaße gegeben werden, sondern daß man ihre Grösse durch Grade und Minuten u. s. w. angiebt, und daher ist klar, daß, wenn man den Sinus, die Tangente, oder sonst eine Trigonometrische Linie für die Seiten des sph. Dreyecks durch Rechnung gefunden hat, man aus den Sinustafeln auch sogleich die Grösse dieser Seite in Graden, Minuten u. s. w. finden wird.

14.

14. Es würde nun viel zu weitläuftig seyn, hier die Regeln ausfindig zu machen, wie man in einem sphärischen Dreyecke, aus drey Stüken desselben, die übrigen durch Rechnung bestimmen könne — Ich verweise daher meine Leser auf Hrn. H. Kästners Astron. Abh. I Saml II Abh. oder auf andere Schriften z. E. Karstens Mathematic I Theil u. s. w. woselbst sie weitläuftig die Beweise der Vorschriften antreffen werden, die bey den Auflösungen der sphärischen Dreyecke vorkommen. Ich begnüge mich daher hier blos die Formeln ohne Beweis herzusetzen, wornach Anfänger gar leicht die Auflösung eines sphärischen Dreyecks bewerkstelligen werden, wenn sie nur aus demjenigen was ich bisher allgemein beygebracht habe, wissen was sie eigentlich suchen, und dabey die Bemerkung machen, daß sich dasjenige, was sie in einem sphärischen Dreyecke durch Rechnung finden, auch allemahl auf die zugehörige körperliche Ecke beziehet.

15. Ich werde nun ein für allemal in einem sphärischen Dreyecke, die drey Winkel desselben mit den grossen Buchstaben A, B, C, bezeichnen, und die gegenüberstehenden Seiten desselben, mit den kleinen Buchstaben a, b, c.

Regeln

Regeln zur Auflösung sphärischer Dreyecke.

LI. Man kan hier eigentlich 5 Aufgaben in Erwegung ziehen; die erste. Aus drey Stücken eines Dreyecks die übrigen zu finden, wenn sich unter den gegebenen Stücke ein Winkel und eine gegenüberstehende Seite befinden. Die zwote. Aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, das übrige zu finden, die dritte, aus einer Seite und zween anliegenden Winkeln, und ferner die vierte aus allen drey Seiten, und endlich die fünfte aus allen drey Winkeln das übrige zu finden. Die Formeln für die Auflösung dieser 5 Fälle sind nun folgende.

LII. Für den ersten Fall hat man die Regel, daß sich die Sinusse der Seiten, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel erhalten. Heisen also die gegebenen Winkel, A, B, und die gegenüberstehenden Seiten, a, b, so hat man sin A : sin B = sin a : sin b, also

sin A sin b = sin B sin a.

Durch welche Formel also aus zwo Seiten und dem einen Winkel, der andere Winkel, oder aus zwo Winkeln, und einer Seite die andere Seite gefunden werden kan.

LIII Für den zweiten Fall, heise A der gegebene Winkel, und c, b, die beyden Seiten

die

die ihn einschliessen, so kan man entweder einen von den beyden übrigen Winkeln C, B, die den Seiten c, b, gegenüber stehen, oder die dritte Seite a die dem gegebenen Winkel A gegenüberstehet durch Rechnung finden. Und man hat für diese beyden Auflösungen folgende Formeln.

1) $\text{tang } B = \frac{\sin A \text{ tang } b}{\sin c - \text{tang } b \cos c \cos A}$

oder wegen $\frac{1}{\text{tang } B} = \cot B$

$$\cot B = \frac{\sin c}{\sin A \text{ tang } b} - \cos c \cot A,$$

wodurch man den Winkel B findet, welcher der Seite b gegen über stehet. Verlangte man den Winkel C, so würde man ihn durch eben die Formel finden, wenn man nur C, b, c, statt B, c, b, sezte.

2) $\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c$

ist die Formel, wodurch aus den beyden Seiten c, b, und dem eingeschlossenen Winkel A, die dritte Seite a bestimmt wird.

LIV. Für den dritten Fall: seyen A, B, die beyden gegebenen Winkel, und c die Seite an der sie anliegen, so ist für den dritten der Seite c gegenüberstehenden Winkel.

1) $\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B;$

Für

Für eine der beyden Seiten aber

$$2)\ \text{tang } b = \frac{\sin c \text{ tang } B}{\cos c \cos A \text{ tang } B + \sin A}$$

oder

$$\cot b = \frac{\sin A \cot B}{\sin c} + \cos A \cot c$$

wo b die Seite bedeutet, die dem Winkel B gegenüber stehet.

Es ist klar, daß man auch die Seite b berechnen könne, wenn man vorher nach (1) den Winkel C gefunden hat — denn alsdann hat man nach der Regel LII.

$$\sin C : \sin c = \sin B : \sin b \text{ oder}$$

$$\sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}$$

LV. Die Auflösung des vierten Falles ergiebt sich sogleich aus der Formel (LIV. 2) denn aus ihr folgt umgekehrt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \text{ oder}$$

$$\cos A = \frac{\cos a}{\sin b \sin c} - \cot b \cot c$$

wo also A der Winkel ist, den die beyden Seiten c, b, einschliessen.

LVI. Wenn endlich für den fünften Fall die drey Winkel, A, B, C, heisen, und man will die Seite a haben, welche dem Winkel A gegenüber stehet, so hat man für dieselbe nachstehende Gleichung.

$$\text{col } a = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C$$

LVII. Alle diese Formeln sind für den Sinus totus = 1 eingerichtet, daher man auch unter dieser Voraussetzung nach (Trig. S I) die Rechnung führen muß. Man bedient sich also der trigonometrischen Linien nicht so, wie sie für den Sinus totus = 10000000 in den Tafeln angegeben sind, sondern dividirt vorher jede trigonometrische Linie der Tafeln, mit der Zahl 10000000 ehe man sie zur Berechnung unserer Formeln braucht. Und wenn nach der Berechnung eine gewisse trigonometrische Linie für den Halbmesser 1 herausgekommen ist, so multiplicirt man sie vorher mit der Zahl 10000000 ehe man sie in den Tafeln aufsuchet, und den ihr zugehörigen Winkel bestimmt.

Die meisten dieser Formeln sind zwar so beschaffen, daß sie aus zween Theilen bestehen, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß, und in so ferne sind sie freylich etwas unbequem, weil die Logarithmen nicht recht bequem dabey gebraucht werden können. So z. E. bestehet in

LVI die Formel, wodurch man cos a findet, aus zween Theilen $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$; cot B cot C, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß. Ob nun wohl zwar jeder Theil für sich durch Logarithmen ausgerechnet werden kan, so wäre es doch besser, die Formel wäre so eingerichtet, daß man nicht erst ein paar Theile zusammen addiren müste um den Cos a zu finden, sondern daß man geradezu statt des Cosinus selbst den Logarithmen desselben erhielte. Dis würde offenbar geschehen wenn die Formel für Cos a, nicht durch jene Summe zweener Glieder, sondern durch ein Product oder einen Quotienten gegeben wäre. Man hat nun in der That Formeln wodurch man diese Absicht einer leichtern Berechnung erreichen kan, und man findet sie gleichfalls in oberwähnten Astron. Abh Hrn. Hofr. Kästners, allein da ich sie zu meiner Absicht in der Folge eben nicht gebrauchen werde, so habe ich sie weggelassen, und bin der Meinung, daß wenn man auch nur die von mir angegebenen Formeln braucht, die Rechnung doch eben so gar weitläuftig nicht ist.

LVIII. Um die Berechnungsart wenigstens durch ein Beyspiel hier zu erläutern, und die beym Gebrauche vorkommende Erinnerungen desto besser ins Licht zu setzen, so will ich z. E. die Formel (LVI) nemlich

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C$$

dazu gebrauchen, wo ich den ersten Theil $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} = x$ und den zweiten $\cot B \cot C = y$ nennen will. Es sey also z. E $A = 135°$; $B = 70°$; $C = 60°$; so ist $\cos A = \cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45°$

Mithin

$$\cos a = -\frac{\sin 45°}{\sin 70° \sin 60°} + \cot 70° \cot 60°$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{r} \log \sin 45° = 9{,}8494850-10 \\ \log \sin 80° = 9{,}9729858-10 \\ \log \sin 60° = 9{,}9375306-10 \end{array}\right\}$$

Summe dieß beyd Log. $= 9{,}9105164-10$

abgezog von $1 \sin 45°$ läßt $3{,}9389686 = \log x$

Ich habe nemlich die Characteristic des Logarithmen vom $\sin 45°$ in Gedanken um 4 Einheiten vermehrt, damit ich einen Logarithmen $13{,}8494850-10$ bekäme, von dem der Abzug des Logarithmen $9{,}9105164-10$ geschehen könte, und zum Reste ein Logarithme übrig bliebe, den man alsdenn unter der Characteristic 3 in den Tafeln aufsuchen könte — Man muß aber hierauf von der Zahl welche dem Logarithmen 3,9389686 zugehöret, wieder so viel

Deci-

Decimalstellen abschneiden, um so viel Einheiten oberwähnte Characteristic vermehret worden ist; Nun gehört dem Logarithmen 3,9389686 die Zahl 8689 zu, daher 4 Decimalstellen abgeschnitten giebt

$x = 0,8689$

Ferner ist log cot 70° = 9,5610659—10
log cot 60° = 9,7614394—10

Summe = 19,3225053—20

Hier vermehre ich gleichfalls die Characteristic 19 um 4 Einheiten; denn wird 23,3225053—20 = 3,3225053, von der Zahl aber die nun diesem Log. zukömt, schneide ich auch 4 Decimalstellen ab, oder dividire sie mit 10000, und finde sodann

$y = 0,21013$

Es ist also cos a = $-x+y$ = — 0,86890 + 0,21013 = — 0,65878; Dis wäre also cos a für den Sinus totus = 1, daher für den Sinus totus = 10000000, wird

cos a = — 6587800

Da aber dieser Cosinus negativ ist, so zeigt dieses an, daß der Winkel a stumpf seyn müsse.

Man suche also in den Tafeln einen spitzen Winkel, dessen Sinus die gefundene Zahl 6587800 ist, addire dazu 90° so hat man den Winkel oder Bogen a = 41° 12' + 90° = 131° 12';

Eigentlich fällt a zwischen 131°12' und 131°13'.

Wenn man die bey diesem Beyspiel vorkommenden Erinnerungen sich wohl bekannt gemacht hat, so wird es keine Schwierigkeit haben auf eine ähnliche Art in jedem Falle, mit den übrigen Formeln die Rechnungen gehörig anzustellen.

Anmerkung. Die meisten von den oben angeführten Formeln sind so beschaffen, daß sie in jedem Falle anzeigen ob der gesuchte Bogen oder Winkel, spitz oder stumpf ist. Das entscheidet sich in solchen Fällen, wo die gesuchte Grösse durch einen Cosinus oder Tangenten gefunden wird; denn wenn diese trigonometrischen Linien bejaht oder verneint werden, so gehören sie zu spitzen oder stumpfen Winkeln.

In einigen Fällen, wo die unbekante Grösse durch einen Sinus gefunden wird, findet eine Zweydeutigkeit statt. Denn da bekantermassen, ein Sinus so wohl zu einem spitzen, als stumpfen Winkel (wo letzterer die Ergänzung des spitzen zu 180° ist) gehört, so müssen andere Umstände entscheiden, welchen man von beyden Winkeln, zu denen der gefundene Sinus gehört, nehmen müsse. Solchergestalt ist die Formel (LII) $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$, von der Beschaffenheit, daß es unentschieden bleibt, ob man den aus ihr gefundenen Bogen oder Winkel, spitz oder stumpf nehmen müsse. Andere Umstände der Aufgabe, werden aber in dem meisten Falle diese Zweydeutigkeit entscheiden.

Der

Der practischen Geometrie II. Theil

X. Kapitel.

Ueber die Fehler die beym Winkelmessen, daher rühren, wenn die Ebene des Werkzeugs nicht genau horizontal gestellet worden.

§. 140. I. Wir haben schon im vorhergehenden bemerkt, daß, wenn das Fernrohr genau in einer auf das Werkzeug senkrechten Ebene auf und nieder beweglich, und das Werkzeug genau horizontal gestellet worden ist, man am Mittelpunkte des Winkelmessers allemahl genau den Horizontal-Winkel erhalte, welchen zween Objekte, nach denen das Fernrohr gerichtet worden ist, daselbst mit einander machen, oder wenn man sich durch den Mittelpunkt,

und durch beyde Objekte ein paar Verticalebenen vorstellet, so ist oberwähnter Winkel genau der Neigungswinkel dieser beyden Ebenen gegeneinander. Wenn aber das Werkzeug nicht genau horizontal stehet, wie es dann wegen vieler Ursachen, nie völlig genau geschehen kan, so wird auch, der Winkel, um den die Alhidadenregel herumgedrehet worden ist, nicht genau der Horizontalwinkel der beyden Objekte seyn, sondern von demselben um eine gewisse Grösse unterschieden seyn; Ein Feldmesser muß nun wissen, unter welchen Umständen dieser Unterschied beträchtlich ist oder nicht, und daher werden folgende Untersuchungen nützlich seyn.

II. Es sey also (Fig. III) der Bogen A C G ein Stück von dem Rande eines gegen den Horizont schief stehenden Winkelmessers, und E dessen Mittelpunkt. Der Winkelmesser schneide die Horizontfläche, in der geraden Linie E A. Um nun den Winkel, den die Ebene des Werkzeugs mit der Horizontalfläche macht, abzubilden, so beschreibe man mit dem Halbmesser E A, in der Horizontalfläche, den Kreisbogen A B H, so ist der sphärische Winkel G A B, die Neigung des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche (Trig. S. XLIX. 7 §.)

III. Es sey auf dem Werkzeuge der Punkt C derjenige, von dem die Grade angerechnet

werden,

werden, oder der Punkt o auf den Eintheilungen des Randes.

IV. Das Fernrohr E D des Winkelmessers sey nun, indem die Alhidadenregel, oder der Inder des Vernier o° weist, nach einem gewissen Objekte hingerichtet, und die Axe des Fernrohrs (welches ich hier als eine Kippregel betrachte) mache in dieser Richtung mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel D E C, dessen Ebene man sich also auf der Fläche des Werkzeugs senkrecht vorstellet.

V. Beschreibt man mit dem Halsmesser E C, in dieser Ebene D E C, den Kreisbogen C D, so wird derselbe das Maaß des Neigungswinkels des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs seyn.

VI. Gesetzt nun, die Alhidadenregel E C, werde aus der Lage E C, in die Lage E G gebracht, bey der das Fernrohr E F nach einem zweiten Objekte hingerichtet ist, so wird es mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel F E G machen, dessen Maaß der mit dem Halbmesser E G = E C beschriebene Kreisbogen F G ist.

VII. Stünde also die Ebene des Werkzeugs genau horizontal, so wären die Ebenen D E C, F E G ein paar Verticalflächen, die erweitert,

durch die beyden Objekte, nach denen das Fernrohr ED, EF gerichtet ist, gehen würde, der Winkel CEG am Mittelpunkt des Werkzeugs, wäre dieser beyden Verticalflächen ihr Neigungswinkel, den man auszumessen verlangte (§ 132), und der von der Alhidadenregel durchlaufene Bogen CG, das Maas dieses Winkels.

VIII. Da aber vorausgesetzt wird, daß des Winkelmessers Ebene, gegen die Horizontalfläche schief stehet, so sind auch die Ebenen DEC, FEG nicht vertical, mithin der Winkel GEG auch nicht der wahre Horizontalwinkel der beyden Objekte, oder die Neigung der beyden Verticalebenen, in denen die Objekte liegen (VII). und dieser ist es doch, den man in der practischen Geometrie eigentlich verlangt.

IX. Man gedenke sich also durch beyde Richtungen des Fernrohres, in denen die Objekte erscheinen, ein paar Verticalebenen EDB, EFH, die die Horizontalfläche, in den Horizontallinien EB, EH durchschneiden, so ist der Winkel dieser beyden Horizontallinien, d. i. HEB, eigentlich der wahre Winkel, den man verlangt, und der Bogen BH dessen Maaß.

X. Nun sind offenbar die beyden Bogen CG, BH von einander unterschieden, und wenn man daher den Bogen CH, um den die Alhidaden-

regel

regel gedrehet worden, für das Maaß des Horizontalwinkels, BEH annehmen wolte, so würde man offenbar einen Fehler begehen, der so groß wäre, als der Unterschied der beyden Bogen CG — BH.

XI. Diesen Unterschied nun zu bestimmen, ist die Absicht gegenwärtiger Aufgabe, und vermittelst der sphärischen Trigonometrie, die man hier offenbar zu Hülfe nehmen muß, weil die Neigungen verschiedener Ebenen gegeneinander in Betrachtung kommen, wird die Aufgabe auf folgende Art aufgelöset.

XII. Es sey der Neigungswinkel des Werkzeugs, gegen die Horizontalfläche, oder der sphärische Winkel CAH = k; der Bogen AC, um den die Alhidadenregel, bey der Richtung des Fernrohrs nach dem ersten Objekte, von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA des Werkzeugs mit der Horizontalfläche, entfernt ist, heisse λ; diesen muß man eigentlich als bekant annehmen, wenn man gegenwärtige Aufgabe auflösen will

Den Bogen CG um den die Alhidadenregel gedrehet worden nenne man = α.

Den Bogen AB = φ; den AH = ψ; die gegebenen Neigungswinkel DEC = β; FEG = b.

Hat

Hat man nun aus den bekant angenommenen Grössen λ, α, β, b, k, die beyden Bogen ψ, φ, berechnet, so ist $\psi - \varphi$, oder der Bogen BH gefunden, welcher demnächst mit CG oder dem Bogen α verglichen, die Grösse des Fehlers geben wird welchen man aus der schiefen Lage des Werkzeugs zu befürchten hat. (X)

XIII. Um also die beyden Bogen AB, und AH, oder die Werthe von φ, ψ, zu bestimmen, so stelle man sich den Bogen DC, als ein Stük eines gröſten auf ACG senkrechtstehenden Kreises, bis nach L verlängert vor, dergestalt, daß der Bogen $CL = 90^\circ$ werde, so ist bekantermaassen, L der Pol des Kreises ACG;

XIV. Da gleichfalls DB auf AB senkrecht stehet, so nehme man auch den Bogen $BP = 90^\circ$, so ist P der Pol des gröſten Kreises ABH.

XV. Nimt man auch die Bogen AC I, ABK, $= 90^\circ$ und legt durch die Punkte K, I einen gröſten Kreis, KIPL, so gehet dieser durch die beyden Pole L, P (aus Hrn. H. Kästners Geometrie 49 u. f. Sätzen) und man erhält ein sphärisches Dreyeck LPD.

XVI. Weil man nun $AI = AK = 90^\circ$ genommen hat, so ist der Punkt A des Kreises KIPL

KIPL Pol, und der Bogen KI bekantermaßen das Maas des sphärischen Winkels IAK (K. Geom. 52 S. 3 Zus.). Ferner sind aber, weil L des Kreises AGI Pol, und P des Kreises ABK Pol ist, die Bogen LI = 90°; PK = 90° oder LI = PK; das heist LP + PI = PI + IK folglich LP = IK; also ist die Entfernung LP der beyden Pole, dem Bogen IK, oder dem Maaße des sphärischen Winkels IAK gleich, welchen die beyden Kreise AGI, AHK, zu denen L, P als Pole gehören, mit einander machen.

XVII. Weil ferner L des Kreises AGI Pol ist, so ist der Bogen CI das Maaß des sphärischen Winkels CLI, und aus eben dem Grunde, weil P des Kreises ABK Pol ist, wird auch der Bogen BK des sphärischen Winkels BPK Maaß seyn.

XVIII. In unserm sphärischen Drenecke LPD ist also LD = LC — CD = 90° — β (V.XII) der sphärische Winkel LPD = 180° — DPI = 180° — BK weil nemlich BK des sphärischen Winkels DPI Maaß ist (XVII). Aber BK = 90° — AB = 90° — φ (XII.) daher LPD = 180° — (90° — φ) = 90° + φ.

Eben so des sphärischen Winkels DLI Maaß der Bogen CI (XVII) = 90° — AC = 90° — λ (XII)

XIX.

XIX. In dem sphärischen Dreyecke LPD suche man nun aus den beyden Seiten LD $= 90° - \beta$; LP $= k$ (XII. XVI) und dem eingeschlossenen Winkel DLP $= 90° - \lambda$, den Winkel LPD $= 90° + \varphi$; so wird man erstlich einen Ausdruck bekommen, wodurch sich der Bogen φ bestimmen läßt Nun ist, aus (Trig. S. LIII. 1.) (wenn das dortige A hier den sphärischen Winkel DLP, das dortige B den sphärischen Winkel LPD, und die beyden Seiten LP, LD die dortigen c, b bedeuten).

$$\text{tang LPD} = \frac{\text{sin DLP. tang LD}}{\text{sin LP} - \text{tang LD cos LP cos DLP}}$$

Es ist aber LPD $= 90° + \varphi$, also tang LPD $=$ tang $(90° + \varphi) = -$ cot φ

DLP $= 90° - \lambda$; also sin DLP $=$ sin $(90° - \lambda) =$ cos λ und cos DLP $=$ cos $(90° - \lambda) =$ sin λ.

LD $= 90° - \beta$; daher tang LD $=$ tang $(90° - \beta) =$ cot β.

Und endlich weil LP $= k$, so ist sin LP $=$ sin k cos. LP $=$ cos k.

Substituirt man also diese Werthe in den gefundenen Ausdruck, so erhält man

$$-\text{cot}\,\varphi = \frac{\cos\lambda \cot\beta}{\sin k - \cot\beta \cos k \sin\lambda}$$

und

und folglich wegen $\frac{1}{\cot \varphi} = \text{tang } \varphi$

$$\text{tang } \varphi = \text{cos}k \text{ tang } \lambda - \frac{\text{sin } k \text{ tang } \beta}{\text{cos } \lambda}$$

XX. Solchergestalt ist erstlich aus dem Bogen $AC = \lambda$, dem Winkel $DEC = \beta$ und dem Neigungswinkel $CAH = k$, der Bogen $AB = \varphi$ auf der Horizontalfläche gefunden.

Will man auf eine ähnliche Art aus dem Bogen $AG = \lambda + CG = \lambda + \alpha$, aus dem Winkel $FEG = b$, und dem Neigungsw. k den Bogen AH oder ψ auf der Horizontalfläche bestimmen, so wird man ihn durch eben dieselbe Formel finden, welche wir für den Bogen $AB = \varphi$ he ausgebracht haben; denn es erhellet daß man in obige Formel nur statt φ setzen dürfe ψ, statt β den Buchstaben b, und statt des Bogens $AC = \lambda$, den Bogen $AG = AC + CG = \lambda + \alpha$; Also ist

$$\text{tang } \psi = \text{cos}k \text{ tang } (\lambda + \alpha) - \frac{\text{sin } k \text{ tang } b}{\text{cos } (\lambda + \alpha)}$$

XXI. Aus denen solchergestalt gefundenen Bogen $AH = \psi$, $AB = \varphi$ hat man nun auch den Unterschied $\psi - \varphi$ oder den Bogen BH, welcher mit $GG = \alpha$ verglichen, den Fehler geben

den wird, welcher aus der schiefen Lage des Werkzeugs gegen den Horizont zu befürchten stehet.

XXII. In den meisten Fällen wird freylich, der Fehler aus der schiefen Lage des Werkzeugs, nicht sehr groß seyn, vorausgesezt daß das Instrument mit dem Horizonte nur einen sehr kleinen Winkel macht; Indessen giebt es aber auch Fälle, wo gleich bey einer nur sehr geringen Neigung dennoch ein sehr beträchtlicher Fehler entstehen kan, und ein Feldmesser muß daher selbigen zu bestimmen wissen, wenn er die Unrichtigkeit in der Stellung des Werkzeugs entweder muthmaßlich annimmt, oder dieselbe sonst als bekannt voraus seßt.

XXIII. Ich will die gegebenen Formeln anitzt durch ein Beyspiel erläutern.

Es sey $k = 1°$; $\beta = 4°$; $b = 10°$; $\lambda = 30°$ und $\alpha = 50°$, so wird für den Winkel φ

$$\log \cos k = 9{,}9999338 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \lambda = 9{,}7614394 - 10$$
$$\text{Summe} \quad 9{,}7613732 - 1$$

Hierzu gehört die Zahl

$$\cos k \operatorname{tang} \lambda = 0{,}5772623$$

Ferner ist

log

log sin k = 8,2418553 — 10
log tang β = 8,8446437 — 10
Summe 17,0864990 — 20
abzuziehn l cos λ = 9,9375306 — 10
0,1489684 — 3

Zu diesem Logarithmen gehöret die Zahl 0,0014091

$= \frac{\sin k \tang \beta}{\cos \lambda}$ welche abgezogen von 0,0772623

läßt tang φ = 0,0758532

Folglich aus den Sinustafeln φ = 29°. 56'. 7''

für den Winkel ψ ist

log cos k = 9,9999338 — 10
log tang $(\lambda + \alpha)$ = 0,7536812
Summe = 0,7536150

wozu die Zahl 5,6704183 gehöret, welche den Werth von cos k tang $(\lambda + \alpha)$ ausdrükt.

Ferner ist

log sin k = 8,2418552 — 10
log tang b = 9,2463388 — 10
Summe 17,4881741 — 20
abzuz. log cos $(\lambda + \alpha)$ = 9,2396702 — 10
0,2485039 — 2

wozu die Zahl $\frac{\sin k \tang b}{\cos (\lambda + \alpha)}$ = 0,0177232

gehöret, welche abgezogen von 5,6704183

läst tang ψ = 5,6526951

Daher ψ = 79°. 58'. 4"

φ = 29°. 56'. 7"

Also $\psi - \varphi$ = 50°. 1'. 57"

Da nun α = 50°. 0'. 0"

so ist $\psi - \varphi - \alpha$ = 1' 57"

Es ist also der wahre Horizontalwinkel in diesem Beyspiel um 1' 57" beynahe um 2' gröſſer als der, welchen das geneigte Werkzeug angiebt, wenn man also den Bogen CG = α auf dem Rande des Winkelmesſers für das Maaß des Horizontalwinkels BEH = $\psi - \varphi$, annehmen wolte, so würde man bey den angenommenen Umständen einen Fehler von beynahe 2 Minuten begehen.

XXIV. Dieſer Fehler wäre nun in diesem Beyspiel an sich eben so gar beträchtlich nicht, indeſſen könten doch Umstände vorkommen, wo er beträchtliche Folgen nach sich ziehen könte, und aus diesen muß der Feldmeſſer beurtheilen, ob er ihn auſer Acht laſſen darf oder nicht.

XXV. Bey andern Datis kan aber in der That der Fehler von einer solchen Beträchtlichkeit werden, daß ihn ein Feldmeſſer gewis nicht für Nichts ansehen darf. So z. E wenn man in obigen Formeln $\lambda = 0$, $\alpha = 90°$, $\beta =$

20°

$20°, b = 15'$ und $k = 1°$ annehme, so fände sich nach gehöriger Rechnung $\varphi = -21' 50''$; (das negative zeigt hier an, daß dieser Bogen φ nicht rechter Hand des Punktes A, sondern linker Hand desselben z E. von A bis Z zu nehmen ist) Ferner findet sich $\psi = 90°$; also $\psi - \varphi = 90° - (-21'. 50'') = 90° + 21'. 50''$; Da nun α bloß $= 90°$ ist, so ist $\psi - \varphi$, oder der Horizontalwinkel in diesem Falle um $21'. 50'$ grösser, als derjenige, den das Werkzeug angiebt welcher Fehler gewis nicht für Nichts angesehen werden kan; Und da das Werkzeug nur um $1°$ gegen die Horizontalfläche geneigt war, und dennoch ein so beträchtlicher Fehler daraus entstanden ist so erhellet hieraus zulänglich, was der Geometer für Vorsichtigkeit anwenden müsse, in dem Falle, da das Werkzeug mit einem in einer Verticalebene auf und nieder beweglichen Fernrohre versehen ist, den Winkelmesser so genau als möglich horizontal zu stellen, wenn er sich anders unter gewissen Umständen nicht sehr groben Fehlern aussetzen will.

Einige Folgerungen aus dem bisherigen

§. 141. I. Es erhellet, wenn man in obigen Formeln $k = o$ setzte, oder das Werkzeug keine Neigung gegen den Horizont hätte, daß alsdenn wegen $\sin k = o$ und $\cos k = 1$, seyn würde

tang φ = tang λ und folglich $\varphi = \lambda$
tang ψ = tang $(\lambda + \alpha)$ mithin $\psi = \lambda + \alpha$

Also $\psi - \varphi = \alpha$; daher $\psi - \varphi - \alpha = 0$ d h. es würde in solchem Falle bey Ausmessung der Winkel kein Fehler entstehen, die Neigung des Fernrohrs gegen das horizontalgestellte Werkzeug mag beschaffen seyn, wie sie will, oder die Winkel b, β mögen von jeder willkührlichen Grösse seyn. Allemahl bleibt der von der Alhidadenregel beschriebene Bogen α. das Maaß des wahren Horizontalwinkels $\psi - \varphi$. Dies erhellet auch schon aus dem vorhergehenden, und wird also durch gegenwärtiges noch mehr bestätigt.

II. Setzt man in obigen Formeln $b = \beta = 0$ oder nimt man an, das Fernrohr sey der Ebene des Werkzeugs parallel, so wird

tang φ = tang λ cos k
tang ψ = tang $(\lambda + \alpha)$ cos k

Diese Formeln dienen also dazu die Fehler zu bestimmen, welche aus der geneigten Lage eines solchen Werkzeugs entstehen, dessen Fernrohr nicht wie eine Kippregel auf und nieder beweglich, sondern parallel mit der Ebene des Werkzeugs unbeweglich verbunden ist (§. 100).

III. Wenn man mit einem solchen Instrumente Horizontalwinkel messen will, so müssen die

die Gegenstände, nach denen man visiret, in einer Horizontalebene durch den Mittelpunkt des Werkzeugs, liegen — Da aber dieses gar selten auf dem Felde zutrift, so neigt man das Werkzeug vorsetzlich, so, daß dessen Ebene durch die beyden Objecte gehe. Dadurch bekömt man nun zwar auf dem Instrumente nicht den wahren Horizontalwinkel am Mittelpunkte desselben, sondern einen schiefen Winkel $= \alpha$ und man muß daher vermittelst der Formeln (II) den wahren Horizontalwinkel $\psi - \varphi$ durch Rechnung zu bestimmen suchen, wobey man denn freylich die Neigung des Instruments gegen den Horizont als bekant ansehen muß.

IV. In den Formeln (II) müste aber auch der Werth des Bogens λ d h. in Fig. III der Bogen AC, um welchen die Richtungslinie EC nach dem ersten Objecte, von dem gemeinschaftlichen Durchschnitte EA des Werkzeugs mit dem Horizonte, entfernt wäre, gegeben seyn; da es nun schwer hält bey einer vorgegebenen Neigung des Werkzeugs, die Grösse des erwähnten Bogens CA ausfindig zu machen, oder nur muthmaßlich anzunehmen, so werde ich für den Fall (II) eine andere Auflösung beybringen, bey der nicht der Bogen $AC = \lambda$, sondern vielmehr die Elevationswinkel der Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet ist, als bekant angenommen wer-

den; diese Winkel lassen sich entweder selbst messen, oder doch weit sicherer nach dem Augenmasse annehmen, als der Bogen λ.

V. Es sey also ACG (Fig IV) das Werkzeug, in einer gegen den Horizont AEF geneigten Lage; H dessen Mittelpunkt; HC, HG die beyden Richtungen des mit der Ebene des Werkzeugs parallelen Fernrohrs, nach denen beyden Objekten, deren Horizontalwinkel man finden soll.

Man gedenke sich durch die Richtungen HC, HG ein paar Verticalebenen CHE, GHF, die den Horizont in den geraden Linien HE, HF durchschneiden; so ist EHF der wahre auszumessende Horizontalwinkel; Statt dessen findet man aber, indem das Fernrohr aus der Richtung HC in die HG gedrehet wird, auf dem Rande des Werkzeugs den Winkel CHG, dessen Maaß der Bogen CG ist; so wie EF des Horizontalwinkels Maaß ist.

So viel nun die beyden Bogen CG, EF von einander unterschieden sind, so groß ist der Fehler der daher rühret, daß man den Bogen CG auf dem schief stehenden Werkzeuge für den Bogen EF oder für das Maaß des Horizontalwinkels EHF annimt.

Anstatt daß ich nun den Neigungswinkel GAF des Werkzeugs gegen den Horizont und den

Bogen

Bogen AC = λ in Rechnung bringe, so will ich annehmen, es seyen der Objecte, nach denen die Richtungen HC, HG des Fernrohrs zulaufen, ihre Elevationswinkel EHC, FHG entweder würklich gemessen, oder nach dem Augenmaaße angenommen worden. Daraus wird sich demnächst auf eine leichte Art, der Bogen EF als das Maaß des Horizontalwinkels, durch Rechnung finden lassen.

Es sey also der Winkel CHE = ε; GHF = e der Bogen CG = α. Das Maaß des Horizontalwinkels, oder der Bogen EF = φ.

CE, GF, seyen ein paar Kreisbogen, mit dem Halbmesser HC = HG, in den Verticalebenen CHE, GHF beschrieben.

Also CE = ε; GF = e, weil sie der Winkel CHE, GHF Maaße sind.

Man nehme nun ECP = 90° und FGP = 90° so ist P des Kreises AEF Pol, weil die Ebenen CHE, GHF auf dem Horizonte AEF senkrecht stehen; und das sphärische Dreyeck CPG hat bey P einen Winkel, dessen Maaß ist der Bogen EF = φ.

Weil nun PC = 90° — CE = 90° — ε; PG = 90° — GE = 90° — e; und CG = α, so sind die drey Seiten des sph. Dreyecks

bekant, daher kan man den Winkel CPG = φ nach (Trig. § LV) durch Rechnung finden, und wenn man die dortigen b, c, a, hier die Bogen PC, PG, CG bedeuten läst, so erhält man in unserer Figur

$$\cos P = \frac{\cos CG}{\sin PC \sin PG} - \cot PC \cot PG$$

Nun ist aber $\cos CG = \cos \alpha$; $\cot PC = \cot (90° - \varepsilon) = \tang \varepsilon$ ferner $\cot PG = \cot (90° - e) = \tang e$; $\sin PC = \sin (90° - \varepsilon) = \cos \varepsilon$ und $\sin PG = \sin (90° - e) = \cos e$

Diese Werthe also substituirt, geben $\cos P$ oder

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon \cos e} - \tang \varepsilon \tang e$$

Wo man also aus den gegebenen Stücken, α, ε, e den Horizontalwinkel φ berechnen kan; Seine Vergleichung mit dem Bogen α giebt den Fehler welcher aus der geneigten Lage des Werkzeugs herrühret.

Ex. Es sey $\alpha = 57° 25'$; $\varepsilon = 2° 25'$; $e = 4° 58'$ so wird

log cos ε	=	9,9996136—10
log cos e	=	9,9983663—10
Summe	=	0,9979799—1 abgezog.

von

von log cos α = 9,7312064—10 läst

$\log \frac{\cos \alpha}{\cos e \cos \varepsilon}$ = 0,7332265 — 1

wozu die Zahl 0,541036 gehört.

Ferner ist log tange = 8,9390321—10

log tang ε = 8,0253518—10

Summe = 0,5643839 — 3

wozu die Zahl tang ε tang e = 0,003667 gehört.

Man ziehe also von 0,541036

ab 0,003667

so hat man cos φ = 0 537369

wo man durch Proportionaltheile findet φ = 57°. 29' 43" da nun α = 57°. 25' war so ist $\varphi - \alpha$ = 4'. 43" so groß wäre also der Fehler, wenn man den Bogen CG = α = 57° 25' für des Horizontalwinkels φ Maaß annehmen wolte. Letzterer ist eigentlich bey den angenommenen Umständen um 4' 43" grösser als der, welchen das Werkzeug angiebt.

Auf diese Art erhellet, wie man in jedem Falle, aus den Elevationswinkeln CHE, GHF, die man etwa nach dem Augenmaaße schätzen, oder auch selbst messen kan, den schiefen Winkel CHG, den man auf dem Werkzeuge angegeben findet, in den zugehörigen Horizontalen EHF verwandeln könne.

berechnet, und die Art, wie aus dieser Tafel die nöthige Correction des schiefen Winkels zu bestimmen ist, läst sich gleichfalls aus erwähnten Program ersehen.

Dessen IIte Tafel enthält für jedes λ von 0° bis 360°, die Correctionen 1) für $k = 15'$, und $\beta = 5^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $\beta = 15^\circ$; $\beta = 20^\circ$; 2) für $k = 1^\circ$ und $\beta = 5^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $\beta = 15^\circ$; $\beta = 20^\circ$.

Nur muß ich noch erinnern, daß mein Bogen den ich λ genannt habe, bey Herrn Prof. Meister $90^\circ - \lambda = \nu$ ist; Meine Buchstaben β, k, heisen bey ihm a, b.

Die Art des Gebrauchs seiner Tafeln ist in dessen Abhandlung §. XI. durch Beyspiele von verschiedenen Fällen erläutert.

Herr Pr. M. vergleicht nun die Tafeln mit einander, und findet, daß ein Werkzeug mit einem parallelen Fernrohre nicht so gefährlich zu gebrauchen sey, als ein anderes, dessen Fernrohr in einer senkrechten Ebene auf und nieder beweglich ist; daß z. E. eine Neigung von 4° bey dem Werkzeuge der erstern Gattung, nicht so gefährlich sey, als eine Neigung von $15'$ bey einem Winkelmesser der zweiten Gattung, und so empfiehlt er wie natürlich, alle nöthige Vorsichten

sichten in der Horizontalstellung eines Winkelmessers, der mit einer Kippregel versehen ist.

Wenn man aber indessen die Bequemlichkeiten in Betrachtung ziehet, die ein Winkelmesser, mit einem auf und nieder beweglichen Fernrohre, in Absicht eines andern hat dessen Fernrohr ihm parallel und unbeweglich ist, wenn man überlegt, wie viel Mühe und Zeitverlust es kostet, ein solches Werkzeug mit einem unbeweglichen Fernrohr, so zu stellen, daß dessen Ebene, in die Fläche des auszumessenden schiefen Winkels zu liegen komme, anderer Unbequemlichkeiten zu geschweigen, so wird man wohl immer ein Werkzeug mit einem auf und nieder beweglichen Fernrohre vorziehen.

Ueberdem läst sich doch, vermittelst einer guten Wasserwaage, die Ebene des Winkelmessers ziemlich genau horizontal stellen, so daß man kaum einen Fehler von 10' in dem wagerechten Stande desselben zu befürchten haben wird, und bey einer solchen Neigung beläuft sich der gröste Fehler, den man mit einem Werkzeuge, das mit einer Kippregel versehen ist, in Messung eines Horizontalwinkels begehen kan, höchstens auf 4 bis 5 Minuten, wenn auch gleich das nach einem Objekte gerichtete Fernrohr, mit der Ebene des Werkzeugs einen Winkel von 20 Graden machte, welches doch bey Horizontalver-

vermessungen äuserst selten vorfällt, und sich durch andere Hülfsmittel, (z E. durch Stäbe die man zwischen dem Werkzeuge und dem Objecte in eine gerade Linie setzet u. s. w.) oft vermeiden läst.

Anmerkung

§. 142. In der Aufgabe § 140, kömt nichts vor, was die Ebene ABK (Fig I I) nothwendig auf die Horizontalfläche einschränkte Sie ist in der That allgemeiner und läst sich so abfassen:

Es ist eine willkürliche Ebene ABK gegeben, gegen die eine andere ACI geneigt ist; E ist ein Punkt in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA beyder Ebenen, und ED, EF ein paar Linien, deren Neigungswinkel gegen die Ebene ACI gegeben sind; auch CEG oder der Winkel unter dem sich ein paar durch ED, EF auf die Ebene ACI senkrecht gesetzte Ebenen durchschneiden ist bekant, man sucht daraus den Winkel BEH, unter dem sich ein paar Ebenen durchscheiden, die man durch die Linien ED, EF, auf die zwote Ebene ABH senkrecht setzet.

Es bliebe eben die Auflösung wenn z E. ABK eine Verticalfläche wäre, die Ebene ACG mit ihr einen gewissen Winkel machte, und man aus dem Winkel CEG und den übrigen Daris,

den

den Winkel BEH, oder Bogen BH berechnen wolte.

Da nun diese Aufgabe so allgemein ist, so werden wir Gelegenheit haben sie in der Folge, noch bey verschiedenen Aufgaben mit Nutzen zu gebrauchen.

XI. Kapitel.

Ueber die Fehler, die beym Winkelmessen daher rühren, wenn das Fernrohr, als Kippregel, nicht genau in einer Ebene beweglich ist, die auf des Werkzeugs Ebene senkrecht stehet.

§. 143. Daß diese Eigenschaft eines Fernrohrs nothwendig sey, wird schon aus dem vorhergehenden erhellen — Nun geschiehet es aber sehr oft, daß dem Fernrohre diese nöthige Vollkommenheit fehlet, und daß auch keine Verrichtungen angebracht sind, vermittelst deren man etwa durch Stellschrauben, diese Erfordernis einer Kippregel erhalten kan; Man muß daher Mittel haben demohnerachtet mit einem solchen Werkzeuge richtig zu messen, und den Fehler in der Bewegung des Fernrohrs aus-

ausfindig zu machen; dazu werden nun folgende Betrachtungen dienlich seyn.

Unter welchen Umständen ein Fernrohr sich in einer auf der Ebene des Werkzeugs senkrechten Ebene auf und nieder bewege.

§. 144. Lehrs. Es sey (Fig. V.) AAA die Ebene des eingetheilten Randes eines Winkelmessers; C der Mittelpunkt desselben. Cc eine auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehende Linie; c sey der Punkt, durch welchen die Axe mn gehet, um die sich die Kippregel, oder das Fernrohr Oo drehet. Die Richtung des Fernrohrs Oo mache mit der Umdrehungsaxe mn einen rechten Winkel, dergestalt, daß nco = mco = 90° sey. Ich behaupte nun wenn die Axe mn mit der Ebene des Werkzeugs parallel ist, das Fernrohr werde sich um diese Axe in einer Ebene auf und nieder bewegen, welche auf dem Werkzeuge senkrecht stehet.

Bew. Weil Cc auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehet, und mn mit dieser Ebene parallel ist, so ist der Winkel mcC = 90°; Aber auch mco = 90°; Also stehet mc, auf cC, co gemeinschaftlich senkrecht, und ist folglich auch auf die Ebene senkrecht, welche man sich durch die Richtungen co, cC gelegt, vorstellet.

Gesetzt

Gesetzt nun, das Fernrohr Oo, werde um die Axe mn gedrehet, und in die Lage Ww gebracht; so ist der Winkel mcw = 90°, weil das Fernrohr cw auf der Axe mn, in ieder Lage senkrecht seyn wird, wenn es mit der Axe ein für allemahl rechtwinklicht verbunden ist. Weil nun auch mcC = 90° und mco = 90° war, so wird die Richtung cw, mit den beyden Richtungen cC, co, in einer und derselben Ebene liegen (H. H. Kästn. Geom. 45 S. Zus.)

Es wird also die Axe mn auf jedweder Richtung co, cw, des Fernrohrs, das heist, auf der Ebene in der sich das Fernrohr auf und nieder drehet, senkrecht stehen. Aber auch cC lieget in der Ebene, in der sich die Richtungen des Fernrohrs co, cw befinden, folglich da cC auf der Ebene des Winkelmessers senkrecht stehet, so wird auch die Ebene Cco in der sich das Fernrohr auf und nieder beweget oder die Ebene des Kreises Awop, auf der Ebene des Werkzeugs ACA senkrecht stehen.

I. Zus. Wenn das Fernrohr Oo mit der Axe mn recht winklicht verbunden ist, so ist eigentlich die Ebene Awop in der sich das Fernrohr drehet, immer auf mn senkrecht.

Aber diese Umdrehungsebene Awop stehet nur in dem Falle zugleich auf dem Werkzeuge ACAA

senkrecht, wenn die Umdrehungsaxe mn dem Werkzeuge parallel ist, oder wenn mn, mit der Perpendiculärlinie cC einen rechten Winkel macht.

II. Zus. Die Ebene, wie hier Awop, in der sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, soll künftig die **Ebene des Fernrohres**, und eine Ebene durch mn die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, soll der Kürze halber, die **Ebene der Umdrehungsaxe** heissen.

III. Zus. Wenn mn dem Werkzeuge parallel ist, so stehet cC, oder der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebenen des Fernrohrs, und der Umdrehungsaxe, auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht.

Und wenn ACA die Durchschnittslinie der Ebene des Fernrohres mit der Ebene des Randes, oder der unter dem Fernrohr befindlichen Alhidadenregel, vorstellet, so stehet cC auf ACA senkrecht.

§. 145. I. Wir wollen nun untersuchen, was die bisherigen Sätze vor Veränderungen leiden, wenn wie in der VI Fig. die Umdrehungsaxe mn, dem Werkzeuge nicht parallel ist, mithin nicht auf cC senkrecht stehet.

Man setze die Axe mn, mache mit der Perpendiculärlinie cC nach n zu einen spitzen Winkel

kel ncC, folglich nach m zu, den stumpfen Winkel Ccm.

II. Weil nun, wenn das Fernrohr mit der Axe mn rechtwinklicht verbunden ist, die Umdrehungsaxe mn, immer auf der Ebene des Fernrohrs senkrecht stehet, und folglich auch auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebenen des Fernrohrs und der Umdrehungsaxe, so ziehe man in der Ebene der Umdrehungsaxe cmCL, die Linie ct senkrecht auf cm, und lege durch ct eine Ebene ctαo, senkrecht auf die Ebene cmCL, so wird ctαo itzt die Ebene vorstellen, in der sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, wenn die Axe mc dem Werkzeuge nicht parallel ist.

III. Es ist also klar daß itzt die Ebene ocαt nicht auf dem Werkzeuge senkrecht stehen wird, wie die Awop im vorhergehenden §.

Sondern: wenn die Umdrehungsaxe mn gegen das Werkzeug geneigt ist, so wird auch die Ebene des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt seyn.

IV. Da sowohl die Ebene des Randes ACL, als auch die Ebene αoct auf der Ebene der Umdrehungsaxe, oder auf CLmc senkrecht stehen, so wird auch beyder Ebenen αoct, ACL, gemeinschaftlicher Durchschnitt αt, auf der Ebene CLmc senkrecht seyn. (Kästn. Geom. 48 Satz). Mithin

hin werden die Winkel αtC, αtc rechte Winkel seyn (K. Geom. 45 S.). Woraus denn weiter folgt, daß der Winkel Ctc, der Neigungswinkel der Ebene des Fernrohrs αtco, gegen die Ebene des Werkzeugs ACL seyn werde.

V. In dem rechtwinkl. Dreyecke Cct ist Cct + Ctc = 90° = tcm (II) = nct = Cct + ncC; also ncC = ctC, oder die Ebene, in der sich das Fernrohr auf und nieder bewegt, ist gegen die Ebene des Winkelmessers unter eben dem Winkel geneigt, welchen die Axe mn mit einer auf das Werkzeug senkrecht gezogenen Linie cC macht.

Oder welches auf eins hinausläuft; der Neigungswinkel Ctc ist das Complement desjenigen Winkels zu 90° um welchen die Umdrehungsaxe mn, gegen die Ebene des Winkelmessers geneigt ist.

VI. Man gedenke sich durch die Lothrechte cC eine Ebene ACco, auf die Ebene CcmL senkrecht, so wird auch AC oder ihr Durchschnitt mit der Ebene des Randes auf der Ebene CcmL senkrecht stehen.

Aber auch αt stehet auf CcmL senkrecht, also sind AC, αt gleichlaufend (K. Geom. 46 S.)

VII.

VII. Wenn zwo Ebenen αoct, ACco, eine dritte Actα in parallelen Linien AC, αt durchschneiden, so wird auch der beyden Ebenen αoct, ACco, gemeinschaftlicher Durchschnitt co, mit CA, αt, oder überhaupt mit der Ebene ACαt des Winkelmessers parallel seyn. Auch wird co auf der Ebene cmCt senkrecht stehen.

VIII. Umgekehrt also, wenn man das Fernrohr, welches sich in der schiefen Ebene αtco auf und nieder bewegt, in eine solche Lage co bringt, bey der es der Ebene des Winkelmessers Acαt parallel ist, so wird es sich in einer Ebene ACco befinden, welche nicht nur auf der Ebene des Randes, sondern auch auf der Ebene der Umdrehungsaxe senkrecht stehet.

VIII. Der beyden Ebenen ACco, αtco Neigungswinkel ist $Cct = 90° - Ctc$.

Folgerung aus dem bisherigen

§. 146. I. Wenn das Fernrohr in einer Ebene beweglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, und das Werkzeug horizontal gestellt worden ist, so wird das Fernrohr, sich immer in einer und derselben Verticalfläche befinden, man mag es hoch oder niedrig richten; Wenn daher das Fernrohr von einem Objecte nach einem andern gerichtet wird, so wird der

Winkel, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, allemahl der wahre Neigungswinkel seyn, den beyde Verticalflächen, in denen die Objecte liegen, am Mittelpuncte des Werkzeugs mit einander machen, das Fernrohr mag übrigens in beyden Richtungen nach den Objecten, horizontal seyn oder nicht; Wenn aber das Fernrohr in einer schiefen, mithin bey dem horizontalen Stande des Werkzeugs, nicht in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist, so würde man sich sehr irren, wenn man den Bogen, welcher bey Herumdrehung der Alhidadenregel auf dem Rande beschrieben worden ist, für das Maaß des Neigungswinkels zwoer Verticalebenen, die man sich durch die Objecte nach denen das Fernrohr gerichtet wird, und den Mittelpunkt des Winkelmessers, vorstellet, annehmen wolte. Der Fehler wird desto beträchtlicher seyn, je tiefer das Fernrohr bey dessen Richtungen nach den Objekten, gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt ist. Um dieses desto mehr ins Licht zu setzen, so überlege man folgendes.

II. Es sey (Fig VI) Oo die Lage des Fernrohres, wenn es horizontal, und mit der Ebene des Werkzeugs parallel liegt (§. 145. VI. VII). Eine Verticalebene durch Oo schneide die Ebene des Werkzeugs oder die Alhidadenregel in der geraden Linie ACA, die durch den Mittelpunkt des Winkelmessers gehet.

Nun

Nun sey Ooαa die schiefe Ebene in der sich das Fernrohr auf und nieder drehet, und sey unter dem Neigungswinkel φ = ctC = ncC (§. 145. IV) gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt

So erhellet, wenn das Fernrohr, aus seiner horizontalen Lage Oo, herausgebracht, und z. E. in die geneigte Lage Ww gebracht wird, dasselbe nicht beständig in der Verticalebene AOAO bleiben werde — Das geschiehet nur, wenn es sich würklich in einer Verticalfläche auf und nieder bewegt — Eine Verticalfläche, die man sich nun durch diese gegen die Horizontalfläche geneigte Lage des Fernrohres Ww, oder cw einbildet, wird die Ebene des Winkelmessers nicht in der Linie CA, sondern in einer ganz andern Linie Cg durchschneiden, und diese Linie Cg, wird mit der erstern CA, die der horizontalen Lage des Fernrohres zukömt, einen gewissen Winkel ACg machen, der offenbar desto gröſſer ist, je mehr das Fernrohr cw, aus der horizontalen Richtung co gebracht worden ist, d. h. je gröſser der Winkel wco ist.

III. Eine Folge hieraus ist nun diese:

Wenn das Fernrohr, bey der Richtung nach einem gewissen Objecte, das ich Q nennen will, Anfangs über der Linie vCx horizontal gestanden hätte, folglich mit vCx parallel, mithin in Ab-

sicht der Linie vCx eben das gewesen wäre, was das Fernrohr Oco in Absicht der Linie ACA war (II), und nun die Alhidadenregel oder die Linie vCx herumgedrehet, und in die Lage ACA gebracht worden wäre, bey der das nach einem zweiten Objecte P gerichtete Fernrohr cw eine geneigte Lage hätte, so würde zwar xCA der Winkel seyn, um den die Alhidadenregel herum gedrehet worden, allein weil das Fernrohr eine geneigte Lage hat, so wird eine Verticalebene durch cw, die Alhidadenregel nicht, in der Linie ACA sondern, in der Linie Cg durchschneiden, und xCg würde der wahre Winkel seyn, den die beyden Verticalebenen durch die Objecte Q, P am Mittelpunkte des Werkzeugs mit einander machen. Allein dieser Winkel xCg ist nicht dem Winkel xCA gleich, um welchen die Regel gedrehet worden; mithin, wenn man den auf dem Rande durchlaufenen Bogen Ax, für das Maaß, des wahren Horizontalwinkels gCx annehmen wolte, so würde man offenbar einen Fehler begehen, der dem kleinen Bogen Ag, oder dem zugehörigen Winkel ACg gleich wäre.

IV. Um die Grösse dieses kleinen Winkels ACg zu bestimmen, so überlege man, daß ACg der Neigungswinkel der beyden Verticalebenen ACco, gCcw oder der beyden grösten Kreise Aop, gwp ist.

V.

V. Man beschreibe nun mit dem Halbmesser cw = co, in der Ebene αoct, in der sich das Fernrohr drehet, den Kreisbogen owα, so erhält man ein sphärisches Dreyeck opw, darinnen ist der Bogen op = 90°, als Maas des rechten Winkels ocp.

Dis erhellet daraus, weil die beyden Verticalebenen AopC, gwpC sich in der Verticallinie pC schneiden müssen, und die Horizontallinie co mit der Verticalen pc einen rechten Winkel machen muß.

Ferner ist p des Horizontalkreises AgI A Pol, folglich der sphärische Winkel opg der Neigungswinkel, der beyden Verticalebenen Aop, gwp; Also opg = AC g (IV) welchen Winkel ACg ich = x nennen will.

Der sphärische Winkel pow ist = 180° — woA; Aber woA ist die Neigung der schiefen Ebene αoct, gegen die Verticale AoCc. Folglich auch woA = tcC = 90° — ctC (§ 145. VII) Macht also die Axe mn nach n zu den Neigungswinkel = ω mit dem Werkzeuge, so ist Ctc = 90° — ω; Also woA = tcC = ω folglich pow = 180° — ω.

Man gedenke sich in der Verticalebene gwCc, durch c eine Horizontallinie ci gezogen, so ist der Winkel icw die Neigung des Fernrohrs unter

der Horizontallinie, dieſen Winkel will ich $= \psi$ nennen

Alſo iſt der Winkel wcp $=$ icp $+$ wci $= 90° + \psi =$ dem Bogen piw.

Um nun den Winkel opw oder ACg zu finden, ſo wollen wir das ſphäriſche Dreyeck opw auflöſen.

Man laſſe in (Trig. S. LIII. 1) die dortigen Gröſſen A, B, b, c, hier in der Figur die Gröſſen opw, pow, pw, po bedeuten, ſo giebt die dortige Gleichung, folgende

$$\text{tang pow} = \frac{\text{ſin opw tang pw}}{\text{ſin po} - \text{tang pw coſ po coſ opw}}$$

Nun iſt aber tang pow $=$ tang $(180° - \omega)$

$= -$ tang ω

tang pw $=$ tang $(90° + \psi)$

$= -$ cot ψ

ſin opw $=$ ſin x

ſin po $=$ ſin $90° = 1$; coſ po $= 0$

Dieſe Werthe alſo ſubſtituirt, geben

tang $\omega =$ ſin x cot ψ alſo

$$\text{ſin } x = \frac{\text{tang } \omega}{\text{cot } \psi} = \text{tang } \omega \text{ tang } \psi$$

Weil aber nun gewis die Axe mn nur immer einen ſehr kleinen Winkel ω mit der Ebene des Werkzeugs machen wird, wenn anders das

Werk-

Werkzeug nicht gar zu fehlerhaft seyn soll, und überdem auch der Winkel opw = ACg = x immer nur klein seyn wird, so kan man ohne merklichen Fehler sin x = x; und tang ω = ω Mithin

$$x = \omega \text{ tang } \psi$$

setzen.

Solchergestalt findet man also aus den gegebenen Grössen ω, ψ, den Fehler, welchen man wegen der geneigten Lage der Axe, in dem Falle, bey Ausmessung eines Horizontalwinkels zu befürchten hat, wenn nach dem ersten Objecte Q das Fernrohr über der Linie ux horizontal gerichtet gewesen, nach dem zweiten Objecte P aber in der Richtung cw um den Winkel ψ von der Horizontallinie herabgeneigt gewesen wäre. Dann nemlich erfordert der Winkel ACx = α, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, die Correction ACg = x = ω tang ψ, um den wahren Winkel xCg = α + x = α + ω. tang ψ zu erhalten, welchen beyde Verticalebenen, durch die Objecte, Q, P, am Mittelpunkte des Winkelmessers mit einander machen.

VI. Es ist hier angenommen worden, daß die Axe cn mit cC (Fig. VI) nach n zu, den spitzen Winkel ncC macht. Einem Beobachter also der bey O durchs Fernrohr Oo sähe, würde der Durchschnitt der Axe cn mit der Ebene des Werk-

Werkzeugs, rechter Hand der Linie ACA, oder auch rechter Hand des Perpendikels Cc fallen.

Es ist klar, wenn die Axe nach der entgegengesetzten Richtung cm gegen die Ebene des Winkelmessers geneigt wäre, daß alsdenn die Axe cm die Ebene des Werkzeugs in einem Punkte schneiden würde, welcher in Absicht des Beobachters bey O linker Hand des Perpendikels cC läge. Man wird also für den letzten Fall, den Werth von ω in obiger Formel (V) negativ nehmen müssen. Daher wäre in solchen Falle auch die Correction des Winkels α, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, negativ, und der wahre Winkel, den die Objecte am Mittelpunkte des Werkzeugs machen $= \alpha - \omega . \text{tang } \psi$.

VII. Ferner setzt die bisherige Rechnung in Fig. VI. zum voraus, daß das Fernrohr cw bey der Richtung nach dem zweiten Objecte P nach w zu geneigt ist, und folglich sich unterhalb der Horizontallinie ci befinde; Wäre aber nach dem zweiten Objecte das Fernrohr über der Horizontallinie ci erhöhet, so müste man in unseren Formeln, auch den Winkel ψ negativ setzen; dann wäre auch tang ψ negativ, folglich für den Fall (V) der wahre Winkel $= \alpha - \omega \text{ tang} \psi$ und für den Fall (VI) derselbe $= \alpha + \omega \text{ tang } \psi$.

VIII.

VIII. Ich will nun die bisherige Voraussetzung, daß das Fernrohr, bey der Richtung nach dem ersten Objecte Q horizontal oder parallel über der Alhidadenregel vx gestanden habe, ändern, und will annehmen daß es bey der Richtung nach dem ersten Objecte Q, ebenfalls unter der Horizontallinie um den Winkel ψ^1, geneigt gewesen wäre; Alsdann würde eine Verticalebene die durch das Object Q, nach dem das Fernrohr gerichtet ist, und durch den Mittelpunkt des Winkelmessers gehet die Ebene des Randes nicht in der Linie Cx, sondern in einer andern Linie $C\gamma$ durchschneiden, dergestalt, daß also hier die Linie $C\gamma$, in Absicht der Linie Cx eben das wäre, was die Linie Cg in Absicht der CA war, und der kleine Winkel $xC\gamma$ wäre $= \omega$ tang ψ^1; Nun würde der wahre Winkel der beyden Verticalflächen durch die Objecte, am Mittelpuncte des Werkzeugs $= \gamma Cg$; der aber, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat $= xCA = \alpha$.

Nun ist $\gamma CA = \alpha - \omega$ tang ψ^1, und daher

γCg oder $\gamma CA + ACg$ oder

$\gamma Cg = \alpha - \omega$ tang $\psi^1 + \omega$ tang ψ Mithin

$\gamma Cg = \alpha + \omega$ (tang ψ — tang ψ^1)

Und folglich wäre der Fehler, den man in Bestimmung des verlangten Winkels γCg begehen würde, wenn man den von der Alhidadenregel, oder dem Index des Vornier, durchlaufen

sen Bogen xγA für desselben Maaß annehmen wolte, der Grösse ω (tang ψ — tang ψ^1) gleich.

IX. Wenn $\psi^1 = \psi$, also in beyden Richtungen des Fernrohrs nach den Objecten, das Fernrohr gleichviel über oder unter der Horizontallinie geneigt wäre, so würde der Fehler ω (tang ψ — tang ψ^1) = 0 und der wahre Winkel γCg, dem xCA, den das Werkzeug angiebt, gleich.

Soll also mit einem Winkelmesser, dessen Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist, bey Ausmessung eines Winkels kein Fehler entstehen, so muß das Fernrohr bey dessen Richtung nach den Objecten gleichviel über oder unter der Horizontallinie geneigt seyn.

X. Um das bisherige mit einem Zahlenexempel zu erläutern, so will ich setzen die Neigung der Axe, um die sich das Fernrohr drehet, betrage $20^1 = \omega$. Bey der Richtung des Fernrohrs nach dem ersten Objecte sey dessen Neigung unter der Horizontallinie oder $\psi^1 = 12°$, nach dem zweiten $\psi = 18°$; der von dem Index beschriebene Bogen $\alpha = 80°$, der wahre Winkel beyder Objecte oder γCg = A, so ist

$A = 80° + 20^1$ (tang 18° — tang 12°)
$= 80° + 20^1$ (0,3249 — 0,2125)
$= 80° + 20^1$, 0,1124 = 80°. 2'. 16''

Für

Für $\psi^1 = -12^\circ$ wäre aber

$A = 80^\circ + 20^1$ (tang $18^\circ + 12^\circ$) oder nach gehöriger Rechnung

$A = 80^\circ . 10^1 . 45''$

Hieraus erhellet also, daß der Fehler sehr beträchtlich werden kan, wenn gleich die Neigung der Umdrehungsaxe nur 20^1 betrüge, mithin sich durchs bloße Auge schwerlich würde wahrnehmen lassen.

XI. Wenn man überhaupt den Fehler

$x = \omega$ (tang ψ — tang ψ^1)

bestimmen will, so muß man die Grössen ω, ψ, ψ^1 als bekannt annehmen, oder Mittel haben, bey einem vorgegebenen Werkzeuge dieselben ausfindig zu machen. Wie man die Neigung der Axe ω bestimmen und durch Beobachtungen finden könne, zeige ich nachher. Die Werthe von ψ, ψ^1, oder die Neigungen des Fernrohrs gegen die Horizontalfläche zu bestimmen, sehe ich kein ander Mittel, als daß man entweder wissen muß, wie viel die Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet ist, über oder unter der Horizontalebene des Werkzeugs liegen, oder es müste von dem Mechanico eine Einrichtung getroffen werden, zugleich den Winkel zu messen, um den das Fernrohr bey der jedesmahligen Richtung desselben, über oder unter der Horizontallinie geneigt wäre.

Da

Da aber eine solche Verrichtung, besonders kleine Werkzeuge, deren man sich doch nur gewöhnlich beym Feldmessen bedient, nur zusammengesezter machen würde, und übrigens auch keine sehr scharfe Bestimmung der Winkel ψ, ψ^1 nöthig ist, so habe ich mich immer folgendes Mittels bedient, die Neigung des Fernrohrs unter der Horizontallinie zu bestimmen.

Es sey Fig VII. wieder c der Punkt, um den sich in dem Gewinde das Fernrohr auf und nieder bewegt, oder der Mittelpunkt des Gewindes; cC die Weite desselben von der horizontalen Ebene des Werkzeugs. Es wird nicht schwer seyn cC nach einem gewissen Maasstabe als bekant anzunehmen. Ich will also cC = a nennen.

w W sey das geneigte Fernrohr, und w das äuserste Ende desselben, wt ein Loth auf die Ebene des Werkzeugs; wi horizontal, und cr senkrecht auf Ww. Ich kan auch die beständigen Grössen cw, cr als bekant annehmen, wo ich cw = b nenne, des Winkels cwr Sinus ist = $\frac{cr}{cw}$ also der Winkel cwr eine beständige Grösse = α

Des Fernrohrs Ww Neigung gegen die Horizontallinie wi ist der Winkel ψ = Wwi = α + cwi

Um

Um cwi zu finden, messe man den veränderlichen Abstand wt, welches in jedem Falle nicht schwer seyn wird, und nenne wt = z.

So ist in dem rechtwinklichten Dreyecke cwi, ci = Cc — wt = a — z und sin cwi = $\frac{ci}{cw}$ = $\frac{a-z}{b}$ Also ist durch Messung des Abstandes wt, auch der Winkel cwi den ich φ nennen will bekant.

Dis giebt demnach die Neigung des Fernrohrs gegen die Horizontallinie, oder den Winkel $\psi = \alpha + \varphi$. Wenn wt > Cc oder z > a, so ist des Winkels cwi oder φ Sinus negativ, folglich auch der Winkel φ negativ; In diesem Falle ist demnach $\psi = \alpha - \varphi$. Auf solche Art kan man nun aus den unveränderlichen Grössen α, cw, a, und dem veränderlichen Abstand z, in jedem Falle gar leicht die Winkel ψ, ψ' finden, und obgleich in Messung der erwähnten Grössen α, cw, a, leicht kleine Fehler enthalten seyn können, so wird man dennoch ψ mit hier zureichender Genauigkeit finden.

Auf diese Art erspart man sich eine Vorrichtung den Winkel ψ unmittelbar zu messen, und da man die beständigen Grössen α, cw, a ein für allemahl als bekant ansehen kan, so hat man bey jeder Neigung des Fernrohrs blos den ver-

änderlichen Abstand z zu messen, welches ohne die geringste Weitläuftigkeit jedesmahl geschehen kan. Den gemessenen Abstand wt = z kan man dann allemahl zugleich mit in diejenige Columne schreiben, in welche die Abmessungen zu stehen kommen, die der Bestimmung desjenigen Objekts, wohin das Fernrohr Ww gerichtet ist, zugehören (§. 133. IV.)

XII. Für $z = o$, oder wenn das Fernrohr ganz bis auf die Ebene des Winkelmessers geneigt ist, wird $\sin \varphi = \frac{a}{cw}$; diesen Winkel will ich γ nennen, so ist $\gamma + \alpha$ der gröste Winkel um den man das Fernrohr neigen kan. Gewöhnlich pflegt man ihn nicht grösser als etwa 20 bis 25 Grad zu nehmen.

Zu untersuchen ob das Fernrohr genau in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene beweglich sey.

§. 147. Aufl. I. Man bringe die Ebene des Winkelmessers Fig VI mit aller möglichen Vorsicht, vermittelst einer sehr guten Wasserwaage in eine horizontale Stellung.

II. Nun lasse man in einiger Entfernung von dem Werkzeuge an einem Faden MR ein Loth herabhängen, welches aber zu gegenwärtiger Absichs

sicht sehr ruhig hängen muß; Daher man sich eines mit Wasser angefüllten Gefässes bedienen kan, in welches das Loth hängt.

III. Noch besser ist es, wenn man auf einer entfernten Wand, genau eine Verticallinie verzeichnet.

IV. Man richte nun die Axe des Fernrohres, oder den Durchschnitt der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte desselben, ganz genau nach der entfernten Verticallinie MR, wobey denn das Fernrohr, eine mit der Ebene des Werkzeugs parallele, folglich horizontale Lage co habe, die man gar leicht durch Versuche, oder durch andere Mittel erhalten kan.

V. Nun ist klar, wenn das Fernrohr in einer Verticalebene ocAC auf und nieder beweglich ist, so wird der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte beständig die erwähnte Verticallinie MR decken, und selbige nie verlassen, man mag das Fernrohr, unter oder über die Horizontallinie neigen, wie man will.

VI. Man bringe also das Fernrohr, aus seiner horizontalen Lage Oo, bey der es genau nach MR gerichtet ist, in eine geneigte Lage. Verläst nun der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien, oder die Axe des Fernrohrs, die erwähnte Verticallinie MR, so ist zuverläßig das Fern-

rohr nicht in einer Verticalebene, sondern in einer schiefen coαt auf und nieder beweglich, mithin wird die Umdrehungsaxe mn einen gewissen Winkel $= \omega$ mit der Ebene des Werkzeugs machen (§ 146 V.)

ω zu finden.

§ 148. I. Es bleibe alle Zurüstung wie im vorhergehenden §. und die Horizontalaxe Oo des Fernrohres sey genau nach der Verticallinie MR gerichtet worden — Man neige nun das Fernrohr aus der Lage Oo in die Ww, so wird, wenn das Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist, die Axe Ww in dieser geneigten Lage keinesweges die Verticallinie MR mehr decken, sondern von ihr um einen gewissen Abstand entfernt seyn.

Man stelle sich durch cw eine Verticalebene Ccwg vor, die das Werkzeug in Cg schneide, so wird anitzt die Verticalebene Ccwg, in der sich das geneigte Fernrohr befindet, von der Verticalebene ACco in der es sich bey dem horizontalen Stande befand um den kleinen Winkel $ACg = x = \omega \operatorname{tang} \psi$ (§. 146. V) abweichen. Diesen kleinen Winkel x zu finden, lasse man das Fernrohr in seiner Neigung cW, und wende durch Hülfe der Micrometerschraube, die Alhidadenregel, sanft herum, bis izt die geneigte Axe des Fernrohrs cw, den Verticalfaden MR

decket

decket, mithin die Verticalebene Ccwg' in die Lage cCA gekommen ist; so wird man die Alhidadenregel genau um einen Winkel ACg = x verrücket haben, und diesen Winkel, werden die Umdrehungen der Micrometerschraube bestimmen.

II. Nachdem auf diese Art durch Beobachtung der Winkel x gefunden worden, so bestimme man nach (§. 146 IX) auch die Neigung des Fernrohrs unter der Horizontallinie oder den Winkel ψ.

III. Weil nun x, ψ solchergestalt bekante Grössen sind, so findet man umgekehrt aus der Gleichung $x = \omega \text{ tang } \psi$, den Werth von $\omega = \frac{x}{\text{tang}\,\psi} = x \cot \psi$ also die Neigung der Umdrehungsaxe mn gegen die Ebene des Werkzeugs.

IV. Bey einem Werkzeuge, das ich besitze, wo gleichfalls das Fernrohr nicht in der gehörigen Ebene auf und nieder beweglich ist, fande ich bey einem angestellten Versuche $x = 8'30''$, und das Fernrohr war so geneigt, daß (§. 146. XI) in Theilchen eines verjüngten Maasstabes $z = 85$; $a = 175$. $b = 325$ war. Der Winkel α war aber wegen einer besondern Vorrichtung der Kippregel = o. Dieß gab mir also

$\sin \varphi = \frac{a - z}{b} = \frac{90}{325} = 0{,}2769$. also $\psi = 16^\circ\ 4'$. Weil nun $x = 8^\circ\ 30'' = 510''$, so ist

$$\begin{aligned} \text{l}x &= 2{,}70757 \\ \text{l}\cot\psi &= 0{,}54059 \\ \hline \log \omega &= 3{,}24816 \end{aligned}$$

also $\omega = 1770'' = 29'.\ 30''$

So betrug also bey diesem Werkzeuge, die Neigung der Axe, um die sich das Fernrohr drehet, beynahe einen halben Grad; Ich habe nachher die Versuche bey andern Neigungen des Fernrohrs wiederhohlt, und fand für ω folgende Werthe.

$\omega = 29'.\ 30''$
$\omega = 28.\ 0$
$\omega = 27.\ 20$
$\omega = 29.\ 14$
$\omega = 28.\ 12$
$\omega = 29.\ 10$

das Mittel $\omega = 28'.\ 34''$

Die Unterschiede in den gefundenen Werthen für ω rühren bloß von den kleinen Fehlern her, die bey den Abmessungen, die zur Bestimmung von ω nöthig waren, begangen worden sind.

Uebrigens habe ich hier noch zu erinnern, daß dieser Werth von ω negativ ist, weil, die

unter

unter der Horizontallinie geneigte Axe des Fernrohrs, in Absicht des Beobachters bey O, nach einem Punkte gerichtet war, der nicht linker des Verticalfadens MR, sondern rechter Hand desselben lag, wo also die Verticalebene Ccwg, nicht wie hier in der Figur angenommen ist, linker Hand der ACco, sondern rechter Hand derselben, liegen muste.

Anmerkung

§. 149. Das bisherige wird also denen, die ein Werkzeug besitzen, wo das Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist, zeigen, wie sie dennoch mit einem solchen Winkelmesser nach der gehörigen Correction, einen Winkel genau messen können; Es wird gut seyn, wenn sie sich für jede Neigung des Fernrohrs, also für jedes ψ, ein für allemahl den daraus entspringenden Fehler berechnen, und davon eine Tabelle verfertigen, aus der sie sodann nach (§. 146. VIII) sogleich die nöthige Correction herausnehmen können.

Ist aber von dem Mechanico an dem Werkzeuge eine solche Vorrichtung angebracht, wodurch sich etwa durch Stellschrauben, die Axe um die sich das Fernrohr drehet, genau der Ebene des Werkzeugs parallel stellen läst, so kan man der bisherigen Rechnungen überhoben seyn; Wenn man nemlich nach § 147 auch einen sol-

chen Fehler des Werkzeugs gefunden hat, so kan man vermittelst der Stellschrauben, die Axe, um die sich das Fernrohr drehet, so lange verbessern, bis man in der Bewegung des Fernrohrs keinen Fehler mehr entdecket.

Eine Vorrichtung durch Stellschrauben die Umdrehungsaxe des Fernrohres der Ebene des Werkzeugs parallel zu stellen.

§ 150. Es lassen sich dergleichen Mittel sehr viele angeben; Eine Vorrichtung aber, wodurch ich glaube diese Absicht bey dem § 99. angegebenen Winkelmesser auf eine leichte Art zu erhalten wäre etwa folgende. Fig VIII bedeutet TZ das Stük Meßing welches mit denselben Buchstaben auf der LXV Figur der V Kupferplatte des 1sten Theils bezeichnet ist, und wird durch 4 Schrauben, auf die Alhidadenregel befestigt. (§ 99. 18) Vtz ist die Vorrichtung an der sich das Zirkelgewinde V befindet, um welches sich das Fernrohr auf und nieder drehet. Diese Vorrichtung endigt sich in eine runde Platte tz, deren untere Fläche tμz konvex ist, oder eine Kugelfläche vorstellet; Auf dem Stük Messing TZ ist nun eine kugelförmige oder koncave Vertiefung m gedrehet, in welche genau die konvexe Fläche tμz passet, welches man durch Einschmirgeln gar leicht erhalten kan. Die Einrichtung

muß

muß aber so getroffen werden, daß, wenn tμz in die Vertiefung m gesetzt worden, die obere Fläche der Platte tz, etwa noch um ½ Linie, über der Ebene des Stücks Messing TZ hervorraget, ohngefähr wie es im Durchschnitte (Fig VIII *) zu sehen ist.

Nun sind nahe an dem Umfange der Vertiefung m, 4 Schraubenmütter, a, a, α, α, angebracht, in die 4 stählerne Schrauben wie ohngefähr bey n zu sehen ist, gehören, die mit ziemlich breiten Köpfen versehen sind, damit wenn die Vorrichtung tμz in die Vertiefung m gelassen wird, alsdann diese Schraubenköpfe, ohngefähr mit ihrer Hälfte über die Platte tμz herübergehen, und wenn sie angezogen werden, durch ihren Druk auf dieselbe, die Platte tμz unverrückt erhalten, wenn man will: Zugleich werden aber diese Schrauben auch dazu dienen, die Platte tz, mithin die ganze Vorrichtung tVz, um die sich das Fernrohr drehet, in der Vertiefung m etwas zu verschieben, mithin zu machen, daß tVz in eine solche Stellung komme, bey der die Axe um die sich in dem Zinkelgewinde das Fernrohr drehet, der Ebene des Werkzeugs parallel werde. Denn wenn man z. E. die Schrauben α.α, etwas nachlässet, und hingegen die a, a, anziehet, so werden letztere durch ihren Druk auf die in der Vertiefung m befindlichen Platte tz, die Vorrichtung tVz, nach der Seite zu

neigen, und verschieben, nach welcher der Druk geschieht; und da, durch das anziehen der Schrauben $\alpha\alpha$, und lösung der aa, die Vorrichtung tVz nach der entgegengesetzten Seite geneigt werden kan, so erhellet, daß vermittelst dieser Schrauben, die Vorrichtung tVz, die sich dadurch in der Vertiefung m etwas verschiebt, in eine solche Stellung gebracht werden kan, daß die Axe um die sich das Fernrohr XX drehet der Ebene des Werkzeugs parallel werde. Hat sie nun einmahl ihre gehörige Stellung, so werden die 4 Schrauben a, a, $\alpha\alpha$. nachdem sie sorgfältig angezogen worden, die Vorrichtung tVz unverrückt erhalten.

Anmerkung

Die Schlüsse, worauf sich die Formeln (§ 146. V) gründen, setzen zum voraus, daß die Umdrehungsaxe mn Fig VI mit dem Fernrohre rechtwinklicht verbunden ist, und folglich die Kippregel keinen andern Fehler habe, als den, daß die Axe mn, der Ebene des Werkzeugs nicht parallel ist.

Wenn man aber auserdem noch annimmt, daß das Fernrohr nicht mit der Axe mn rechtwinklicht verbunden ist, sondern einen Winkel mit der Axe macht, der von einem Rechten um etwas geringes unterschieden ist, so werden aus

dieser

dieser zwoten Unvollkommenheit der Kippregel, auch noch Fehler bey Messung der Winkel entstehen, weil alsdann das Fernrohr, beym Auf- und Niederbewegen, nicht wie bisher eine Ebene, sondern eine kegelförmige Fläche beschreibt.

Allein der Fehler, der aus dieser Ursache beym Winkelmessen zu befürchten ist, ist so unbeträchtlich, daß ich es nicht der Mühe werth gehalten habe, ihn mit in Erwegung zu ziehen — Und es läst sich ohne merklichen Irrthum annehmen, daß das Fernrohr, so weit als man es beym Feldmessen auf und nieder bewegt, eine vollkommene Ebene beschreibt, ob es gleich nicht völlig genau mit der Umdreh. Axe rechtwinklicht verbunden ist. Wenn auch das Fernrohr, mit der Umdreh. Axe mn, einen Winkel von 89 Graden machte, also um 1° von der senkrechten Verbindung abwiche, (welches doch ein Mechanicus gar leicht wird vermeiden können) so habe ich gefunden, daß in den seltensten Fällen in Ausmessung der Winkel ein Fehler von $1\frac{1}{2}$ Minute, daraus zu befürchten sey. Weit gefährlicher ist die bisher betrachtete Neigung der Umdrehungsaxe mn.

XII. Kapitel.

Winkel, deren Ebene sich in einer Verticalfläche befinden, vermittelst des Winkelmessers, auf dem Felde auszumessen.

§. 151. Die im ersten Theile gegebenen Vorschriften (§ 128. u. f.) die Grösse eines Winkels zu erfahren, beziehen sich nur auf solche Winkel, deren Schenkel horizontal sind, oder wenigstens auf die Horizontalfläche projicirt werden.

Nun kömt es aber in der practischen Geometrie auch oft vor, daß man Höhen oder Tiefen messen muß. In diesem Falle stellet man sich (Fig IX) durchs Auge O und das Object P eine Verticalebene vor, gedenket sich in derselben eine Horizontallinie Or durchs Auge gezogen, und von dem Objecte P auf dieselbe eine perpendiculäre Pa herabgefället; dann heist Pa die Höhe des Objects über der Horizontallinie durchs Auge, und wenn das Object p unter der Linie Or läge, so hiesse ap die Tiefe des Objects. Um diese Höhe Pa, oder Tiefe pa zu bestimmen, so muß außer andern gegebenen Stücken, auch

der

der Winkel POa, oder poa bekant seyn; davon ersterer POa, der **Elevationswinkel** heist, wenn das Object über der Horizontallinie liegt, der andere pao aber der **Depressionswinkel**, wenn das Object p sich unter der Horizontalaxe Or befindet.

Es sind also hier POa, poa, ein paar Winkel, die sich in einer Verticalebene befinden, und man siehet leicht, daß wenn diese Winkel ausgemessen werden sollen, folgende Bedingungen in Erfüllung gebracht werden müssen. 1) Den eingetheilten Rand, oder die Ebene des Winkelmessers genau in die Verticalebene POa einzurichten. 2) Die Axe des Fernrohrs, welche hier in der Figur durch die Linie LOl bezeichnet ist, genau in die horizontale Richtung LOla zu bringen.

Wenn diese beyden Bedingungen erfüllt sind, so erhellet, daß man um die Grösse des Elevationswinkels POa zu erfahren, nur nöthig habe, das Fernrohr aus der horizontalen Richtung Ol, in die Richtung On nach dem Objecte P zu bringen, und dann den auf dem verticalgestellten Rande des Winkelmessers beschriebenen Bogen ln, oder Lm in Graden und Minuten zu bestimmen;

Die wichtigste Erfordernis hiebey ist immer diese: das Fernrohr so genau als möglich in

die

die horizontale Stellung zu bringen; Und da hierzu die Kenntnis einer Libelle erfordert wird, so muß ich erstlich hievon einige Begriffe beyzubringen suchen.

Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre.

§. 152. Wenn man überlegt, daß wir uns schon im vorhergehenden, eines mit Wasser angefüllten Gefässes bedienet haben, den horizontalen Stand einer Ebene zu erfahren, so wird man auch gar leicht darauf verfallen, sich einer ähnlichen Einrichtung zu bedienen, um eine vorgegebene Linie, z. E. die Axe eines Fernrohrs in eine horizontale Lage zu bringen.

Die Art nun wie eine Libelle, (d. h. eine solche Vorrichtung, wodurch man vermittelst der Oberfläche des Wassers den horizontalen Stand einer Linie erfahren kan) mit dem Fernrohre zu dieser Absicht verbunden werden müste, läst sich im wesentlichen aus der X Figur ersehen.

I. Man gedenke sich in dieser Figur das Fernrohr so, wie es bey dem verticalen Stande eines Winkelmessers erscheinen würde. OO sey also die um den Mittelpunkt des Winkelmessers bewegliche Alhidadenregel, und H, H, ein paar Hülsen durch Schrauben auf sie befe-

stigt,

stigt, dergestalt, daß das durchgesteckte Fernrohr XX der Ebene des Werkzeugs parallel sey(*) m, m, sind Schrauben, die man nach Gefallen anziehen, und nachlassen kan;

II. Um die Axe des Fernrohrs genau horizontal stellen zu können, so sey P eine gläserne, etwa 6 Zoll lange cylindrische Röhre, die an beyden Enden genau verschlossen, und mit Weingeist angefüllt wird, so aber, daß eine Luftblase, oder vielmehr ein leerer Raum $\alpha\beta$, darinn bleibe, wodurch die horizontale Lage, oder die Oberfläche des Wassers abgebildet wird. Ich will nun erstlich zeigen, wie diese Libelle P gehörig mit dem Fernrohre verbunden seyn muß, und um die Beschreibung nicht zu unterbrechen, die nöthigen Erfordernisse einer guten Libelle Libelle hernach nachfolgen lassen.

III.

(*) Ich habe schon im vorhergehenden (§. 100) erinnert, daß bey Höhenmessungen, die Kippregel nicht mit Vortheil zu gebrauchen sey, sondern daß man in solchen Falle die Vorrichtung TKZ (I Theil. Tab. V. Fig. LXVI) von der Alhidadenregel wegnimmt, und statt ihrer ein paar Hülsen, auf die Alhidadenregel befestigt, damit das durchgesteckte Fernrohr, der Ebene des Randes parallel werde und nicht, wie bey der Kippregel, auf und nieder beweglich sey;

III. N, Q sind ein paar meßingene Hülsen, die die cylindrische Röhre des Fernrohres genau umfassen, und auch durch ein paar Schrauben n, n, nach Gefallen festgehalten werden können.

IV. An der Hülse Q. ist eine Vorrichtung angelöthet, die bey c ein Zirkelgewinde hat, woran sich eine meßingene Hülse K befindet, wodurch das eine Ende der Libelle gesteckt ist.

V. Die Libelle um das Zirkelgewinde auf und nieder zu bewegen, dienet die Stellschraube Kr, welche völlig von eben der Beschaffenheit und Zusammensetzung ist, wie die (§. 100.) beschriebene Micrometerschraube, daher ich weiter keine Erläuterungen beyzufügen habe, und auch alles aus der Zeichnung deutlich zu ersehen ist — Die meßingene Hülse M, in die das andere Ende der Libelle verküttet ist, trägt einen Ansatz v, welcher für die Stellschraube Kr die Mutter abgiebt — an dem Ansatz v, befindet sich aber, wie aus Fig. XI deutlicher zu ersehen ist, ein etwas dünneres prismatisches Stück s, welches bey Wendung der Stellschraube, sich in einem Schlitze auf und niederschiebt, welcher in der aufrechtstehenden Wand, des auf die Hülse N gelötheten Kniees dpq, eingeschnitten ist, wie aus Fig XII deutlicher erhellet. Die Absicht davon ist, daß bey Umwendung der Stellschraube,

nicht

nicht die geringste Wankung zu befürchten sey, und die Libelle sich desto genauer in einer einzigen Ebene auf und nieder treiben lasse.

VI. Dis ist die ganze Vorrichtung, wodurch die Libelle gehörig mit dem Fernrohre verbunden ist. Wenn man die Libelle von dem Fernrohre abnehmen will, so darf man nur die Röhre V, worin sich das Ocularglas des Fernrohrs befindet, abnehmen, und dann das Fernrohr nach der Richtung XXO durch die Hülsen Q, N, schieben; Hierauf werden sich gar leicht die beyden Hülsen N, Q, woran sich die Vorrichtung für die Libelle befindet, von der Röhre des Fernrohrs nach der Richtung NXQ abschieben lassen.

VII. Uebrigens habe ich noch zu erinnern, daß wir beym Gebrauche, den wir in der Folge von der Libelle machen, immer voraus setzen, daß die Axe der Libelle, so genau als möglich sich mit der Axe des Fernrohrs, in einer und derselben Ebene befinde; Eine Voraussetzung welche von dem Mechanico gar leicht erhalten werden kan;

Nöthige Eigenschaften einer guten Libelle.

§. 153. I. Die innere Höhlung der Glasröhre, muß so genau als möglich cylindrisch seyn,

und daher mit besonderer Vorsicht ausgeschliffen, und poliret werden; Eine Bedingung welche zwar so gar leicht nicht zu erfüllen stehet, aber von einem geschickten Mechanico doch immer erhalten werden kan. Glasröhren so wie sie aus der Hütte kommen, werden selten die erwähnte Eigenschaft besitzen, indem dieselben, bald eine kegelförmige Höhlung, bald andere Ungleichheiten und Beulen haben; daher ist das Ausschleifen vermittelst eines metallenen cylindrischen Kolbens schlechterdings nothwendig, wenn die Libelle gut seyn soll. Herr Mechanicus Brander (Siehe Picards Abh vom Wasserwägen übers durch Hr. Lambert pag 295) hat Mittel gefunden, Glasröhren durchs Ausschleifen so gerade zu machen, daß sie auf die geringste Neigung einen Ausschlag geben. Man kan zwar konische Röhren, wenn sie nur rein von Beulen sind, auch zu Libellen gebrauchen, allein ihre Rectification erfordert besondere Kunstgriffe, die man sehr wohl in Hrn Prof Meisters Abhandlung von Libellen *Comment. Soc. Reg. Goetting. T. VII* ausgeführt, nachlesen kan; das nöthige aber hievon beyzubringen, ist hier wenigstens der Ort nicht; die Libelle, von der ich also in diesem Kapitel rede, wird als vollkommen cylindrisch angenommen, oder ihre Abweichung von der cylindrischen Gestalt wenigstens so geringe gesetzt, daß man keinen merklichen Fehler zu befürchten hat.

II. Die Länge der Glasröhre muß wenigstens 5 bis 6 Zoll, betragen, wenn sie die gehörige Empfindlichkeit haben soll; indessen kömt es hauptsächlich auch

III. Auf die Länge $\alpha\beta$ der Luftblaße an, die zuverläßig gegen die ganze Länge der Röhre ein bestimmtes Verhältnis hat, wenn die Libelle ihre gehörige Empfindlichkeit haben soll. Ist nemlich die Blase allzuklein, so hängt sie sich gar zu leicht an, und verursacht eine Trägheit der Libelle. Ist aber die Blase gar zu groß, so wird die Libelle zu empfindlich, und es hält schwer, sie in den gehörigen Stand zu bringen.

Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß, wenn die Röhre 5 bis 6 Zoll lang ist, die schicklichste Grösse der Luftblase etwa $\frac{3}{4}$ oder 1 Zoll betragen muß, und wenn bey diesen Umständen, die Libelle gut ausgeschliffen ist, so muß dieselbe auf eine Erhöhung oder Vertiefung von 10 Secunden zuverläßig einen Ausschlag geben, welches eine Genauigkeit ist, die man bey gewöhnlichen Höhenmessungen in der practischen Geometrie kaum von nöthen hat.

IV. Der Weingeist, womit die Röhre gefüllet wird, muß sehr rein und gut, auch nicht gefärbt seyn, und in Folge der Zeit keinen Satz von Unreinigkeiten in der Röhre zurücklassen.

Auch darf sich, ehe die Röhre gefüllt wird, keine Fettigkeit, oder Staub u. s. w. in der innern Höhlung angesetzt haben.

Wie man eine Libelle mit dem Fernrohre parallel machen könne

§. 154. Grundsatz I. Wenn die Röhre der Libelle cylindrisch ist, und beyde Axen, sowohl der Libelle als des Fernrohrs, sich in einer gemeinschaftlichen Verticalebene befinden, und man ferner annimmt, daß man die Axe des Fernrohres horizontal gestellet habe, so erhellet, wenn unter solchen Umständen die Luftblase $\alpha\beta$, in der Mitte der Libelle P ruhig stehen bleibt, auch die Libelle horizontal, mithin die Axe des Fernrohres mit der Wasserfläche $\alpha\beta$, oder mit den Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, der Libelle, parallel seyn werde.

Grundsatz II. Und wenn man die Libelle an dem horizontalgestellten Fernrohre in unverrückter Lage läßt, das Fernrohr aber innerhalb der Hülsen H, H, um seine Axe drehet, bis die Libelle unterhalb des Fernrohres in die Lage $\varepsilon'\varphi'e'f'$ kömt, so wird sich die Luftblase $\alpha\beta$, noch in der Mitte zeigen, wenn nur sonst die Axe des Fernrohres, oder die Alhidadenregel OO keine Verrückung gelitten hat.

III. Diese beyden Sätze sind so klar, daß sie keines Beweises bedürfen, und geben ein sicheres Mittel ab, zu untersuchen, ob die Wasserfläche $\alpha\beta$, oder die Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, mithin auch die Axe der Libelle, der Axe des Fernrohres parallel ist oder nicht.

IV. Ist nemlich die Luftblase $\alpha\beta$ bey der Lage der Libelle ef $\varepsilon\varphi$, zwar in der Mitte, aber nicht alsdann, wenn durch Umwendung des Fernrohres die Libelle in die Lage $\varepsilon'\varphi'$ e'f' gebracht worden (III) so zeigt dieses an, daß die Axe des Fernrohres nicht mit der Wasserfläche $\alpha\beta$, mithin auch nicht mit der Axe, oder mit den Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, der Libelle parallel sey, sondern daß dieselbe mit der Axe der Libelle einen gewissen Winkel mache.

V. Es sey (Fig XIII) ef die Libelle, und nx die Axe des Fernrohres, welche mit der Libelle einen Winkel eyn $= \alpha$ mache; Die Linien ne, fx, die auf nx senkrecht gezogen worden, mögen die Verbindungslinien der Libelle mit dem Fernrohre ausdrücken — Nun sey die Ebene enfx vertical und die Luftblase $\alpha\beta$ erscheine in der Mitte von ef, so ist die Richtung ef horizontal, und die verlängerte Axe des Fernrohres macht mit der Horizontallinie ey einen Winkel $= \alpha$

VI. Man stelle sich nun vor, die Axe nx bleibe unverrückt, um dieselbe werde aber die Ebene nefx dergestalt gedrehet, daß sie in die Lage $n\varepsilon\varphi x$ komme, und abermahls vertical sey, so wird die Libelle ef in die Lage $\varepsilon\varphi$ kommen, und mit der in der Ebene $\varepsilon n\varphi x$ durch ε gezogenen Horizontallinie $p\varepsilon t$ einen Winkel $y\varepsilon t = 2.\,fyx = 2.\,\alpha$ machen. Die Luftblase, würde also nicht in der Mitte von $\varepsilon\varphi$ stehen bleiben, sondern hier von ε nach φ heraufsteigen, und bey φ hängen bleiben.

VII. Dieser Satz nun, daß, wenn bey der erstern Richtung ef die Libelle horizontal ist, dieselbe nach der geschehenen Umwendung des Fernrohres, in der Lage $\varepsilon\varphi$, mit dem Horizonte einen Winkel macht, der doppelt so groß ist, als der, welchen die Axe des Fernrohres mit der Libelle macht, wird uns ein leichtes Mittel an die Hand geben, die Axe des Fernrohres sehr genau in eine horizontale Stellung zu bringen, und der Libelle parallel zu machen; das Verfahren bestehet in folgendem.

VIII. 1. Man stelle den Winkelmesser gehörig auf sein Stativ, und bringe die Ebene desselben in eine verticale Lage, welches dadurch geschiehet, daß man das Werkzeug so lange in der zugehörigen Nus herumwendet bis ein Loth wz (Fig. XIV), welches man längst der Ebene

des

des Randes herabhängen läst, den Rand bey a, b frey berühret, ohne sich an denselben zu reiben.

Die XIV Figur stelle also solchergestalt den Winkelmesser in einer verticalen Lage vor; nx dessen Fernrohr, und ef die daran angebrachte Libelle; MK die Micrometerschraube, die die Alhidadenregel, mithin auch das Fernrohr regiert.

2. Ich setze nun, daß man die Libelle ef, vermittelst der Hülsen N, Q (Fig X) in eine solche Lage gebracht habe, daß sie sich oberhalb des Fernrohres befinde, und wenigstens so genau, als es nach dem Augenmaße geschehen kan, mit der Axe des Fernrohrs in einer und derselben Verticalebene liege.

3. Wenn dies geschehen ist, mache man vermittelst der Stellschraube kr, Fig XIV wenigstens nach dem Augenmaße die Libelle ef, dem Fernrohre nx parallel, und bringe demnächst, durch Umdrehung der Alhidadenregel, das Fernrohr in eine solche Richtung, daß die daran befestigte Libelle ef genau horizontal stehet, und folglich die Luftblase $\alpha\beta$, in der Mitte erscheinet.

5. In dieser Lage bleibe das Fernrohr unverrückt, und man befestige daher die Alhidadenregel an den Rand.

6. Da nun die Libelle nur nach dem Augenmaaße mit dem Fernrohre parallel ist, so wird die Axe des Fernrohres mit der horizontalen Richtung der Libelle nur einen sehr kleinen Winkel $= \alpha$ (V) machen.

7. Um den Werth von α zu finden, lasse man die Ebene des Werkzeugs und die Alhidadenregel in unverrückter Stellung, löse die beyden Schrauben, die das Fernrohr in den Hülsen H H Fig X festhalten, und wende hierauf nach (VI) das Fernrohr nx, mit der daran befestigten Libelle, um seine unbewegliche Axe, bis die Libelle unterhalb des Fernrohres in die Lage $s\Phi$, und zwar nach dem Augenmaaße mit der Axe des Fernrohrs in einer und derselben Verticalebene zu liegen komme.

8. In dieser Lage $s\Phi$ wird die Luftblase nicht in der Mitte stehen bleiben, (es müste denn durch einen sehr seltenen Zufall, die Libelle mit dem Fernrohre, nach dem Augenmaaße, genau parallel geworden seyn) sondern hier z. E. von s nach Φ heraufsteigen, und

9. Die jetzige Richtung $s\Phi$, wird mit der Horizontallinie st einen Winkel $= 2.\alpha$ machen (VII)

10. Es ist klar, wenn man die geneigte Libelle $\varepsilon\varphi$ in eine horizontale Lage bringen wolte, solches durch Umdrehung der Alhidadenregel geschehen könte; Man müste nemlich durch Umdrehung der Alhidadenregel, die Lage des Fernrohrs, mithin auch zugleich die Richtung der Libelle $\varepsilon\varphi$ um den Winkel $2.\alpha$ verändern, und weil hier in der Figur die Luftblase bey φ hängen bleibt, also φ höher liegt als ε, so müste man die Alhidadenregel so drehen, daß das End φ, niedriger zu liegen, das entgegengesetzte ε aber in die Höhe käme, bis ε, φ beyde in einer Horizontallinie lägen.

11. Da nun der Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\alpha'$ nur klein seyn wird, so kan man die Wendung der Alhidadenregel bloß vermittelst der Micrometerschraube MK bewerkstelligen. Man wende also MK herum, bis die Alhidadenregel so viel verrücket worden, daß $\varepsilon\varphi$ in eine horizontale Richtung gekommen ist, so werden die gezählten Umdrehungen der Micrometerschraube den kleinen Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\alpha$ geben, den die geneigte Richtung der Libelle $\varepsilon\varphi$ mit der Horizontallinie εt machte.

12. Die Hälfte der gefundenen Umdrehungen geben den Winkel α, oder die Neigung der Libelle gegen die Axe des Fernrohres. (VII)

13. Wenn man sich in Fig XIII die Lage der Libelle, $\varepsilon\Phi$ vorstellet, wie sie mit der Horizontallinie ε' den Winkel $\Phi\varepsilon' = 2\alpha$ macht, so wird hingegen das Fernrohr nx mit der Horizontallinie $\tau\varepsilon\upsilon$ nur einen Winkel $n\upsilon\varepsilon = \frac{1}{2}\Phi\varepsilon\tau = \alpha$ machen. Wird daher nach dem Verfahren (12) das Fernrohr nx mit der daran befestigten Libelle, um das Centrum o, vermittelst Umwendung der Micrometerschraube, gedrehet, bis die Libelle $\varepsilon\Phi$ horizontal geworden ist, so hätte man nur halb so viel Umdrehungen nöthig gehabt, das Fernrohr nx in die horizontale Richtung zu bringen, weil die Libelle $\varepsilon\Phi$ gegen die Horizontallinie um einen Winkel $\Phi\varepsilon\tau$ geneigt ist, der doppelt so groß ist als der $n\upsilon\varepsilon$, welchen des Fernrohrs Richtung mit der Horizontallinie macht. Hätte man also um der Libelle $\varepsilon\Phi$ die horizontale Lage zu verschaffen, die Micrometerschraube MK (Fig XIV) $\frac{1}{3}$ E 8mahl herumdrehen müssen, so drehe man nachdem die Libelle horizontal geworden, wieder 4 Umdrehungen rückwärts, so wird demnächst das Fernrohr nx horizontal seyn, die Libelle aber nur einen Winkel $= \alpha$ mit der Horizontallinie machen.

14. Nachdem nun solchergestalt in (13) das Fernrohr einmahl eine horizontale Lage bekommen hat, so wird man demnächst auch gar leicht die Libelle $\varepsilon\Phi$ dem Fernrohre parallel machen

chen können; Man lasse nemlich das Fernrohr unverrückt in seiner horizontalen Lage und drehe ganz sanft die Stellschraube kr, welche sich ietzo bey e befinden wird, herum, bis die Luftblase in der Mitte von ϑφ ruhig stehen bleibt, so ist auch in dem Augenblicke die Libelle horizontal, folglich dem horizontalen Fernrohre parallel.

15. Auf diese Art kan man also sehr sicher die Libelle mit dem Fernrohre parallel machen, besonders wenn man die Vorschrift wiederholt, und die Libelle aus ihrer untern Lage, wieder oberhalb des Fernrohrs, in die Lage et bringt, in der sie auch noch horizontal seyn muß, wenn bey dem bisherigen Verfahren nicht kleine Fehler begangen worden sind. Entdeckt man solchergestalt einige Unrichtigkeit, so muß man die Arbeit (10—14) von neuem vornehmen, bis endlich die Luftblase immer in der Mitte der Libelle ruhig stehen bleibt, man mag die Libelle um das Fernrohr drehen wie man will — die wichtigste Vorsicht die man übrigens bey dem bisher beschriebenen Verfahren zu beobachten hat, ist, daß die Ebene des Werkzeugs während der Operation in einer unverrückten Lage bleibe.

16. Wenn nun ein für allemahl die Libelle mit dem Fernrohre parallel gemacht worden ist, so ist es demnächst leicht, an jedem Orte, wo man das Werkzeug hinbringt, sogleich die horizon-

rizontale Lage des Fernrohres zu erhalten. Man darf nehmlich die Alhidadenregel nur so lange herumwenden, bis die Luftblase in der Mitte der Libelle ruhig stehen bleibt, so ist in dem Augenblicke auch das Fernrohr horizontal.

Beym Forttragen des Werkzeugs von einer Station auf dem Felde, zur andern, muß man aber davor sorgen, daß sich unterdessen die Libelle an dem Fernrohre nicht verrücke, und folglich aus ihrer parallelen Lage komme.

17. Die bisherige Methode, eine Libelle dem Fernrohre parallel zu machen, wird man bey würklicher Handanlegung sehr leicht und bequem finden — Sonst aber giebt es auch andere Methoden z. E. Hr. Mech. Branders. M. s. Picards Abh. vom Wasserwägen, mit Hn. Lamberts Beyträgen p. 294. Ich halte aber die bisher beschriebene zu meiner Absicht für geschickter.

Ich wende mich nun nach den bisherigen Vorbereitungen zu folgender

Aufgabe.

§. 155. Einen Winkel POa (Fig IX) der sich in einer Verticalebene befindet, auszumessen. Der eine Schenkel desselben Oa wird horizontal angenommen (§. 151.)

Auf-

Auflösung.

I. Man setze den Winkelmesser (§ 99) gehörig auf sein Stativ, und bringe die Ebene desselben vermittelst eines Lothes in eine verticale Lage.

II. Ich setze zum voraus, daß durch einen Versuch die Libelle bereits mit dem Fernrohre in eine parallele Lage gebracht worden ist.

III. Man drehe das Werkzeug auf dem Zapfen des Stativs so lange, bis der verticalgestellte Rand des Winkelmessers, so stehet, daß, wenn man das Fernrohr nach dem Objekte P hinrichtet, solches in dem Durchschnitte der beyden Kreuzlinien, oder in der Axe des Fernrohres erscheinet. Wenn dieses bewerkstelligt ist, so sagt man, die **Ebene des Winkelmessers sey in die Verticalebene des auszumessenden Winkels POa eingerichtet worden.**

IV. Nachdem dieses geschehen ist, bringe man den Index des Vernier genau an den Punkt o der Eintheilungen des Randes, und befestige die Alhidadenregel an den Rand.

V. Man löse an dem Werkzeuge die §. 99. 16 und 1 Thl. Tab. V. Fig LIX mit L bezeichnete Schraube, so wird man das verticalgestellte Werkzeug um den horizontalen Zapfen der Nuß herum wenden können; so, daß die Ebene des

Werk-

Werkzeugs beständig vertical bleibt. Man kan solchergestalt durch Wendung des ganzen Werkzeuges es dahin bringen, daß das auf o° gestelte Fernrohr (IV) genau in eine horizontale Lage OI Fig IX zu liegen komme. Dis wird nemlich geschehen, wenn die Luftblase der Libelle in der Mitte derselben erscheinet. In dem Augenblicke da dieses geschiehet, ziehe man die Schraube L wieder an, damit das Fernrohr unverrückt in seiner horizontalen Lage bleibe. Solte während daß man die Schraube L anziehet, das Fernrohr wieder etwas aus der horizontalen Lage kommen, so bediene man sich der §. 99. 12 genannten Stellschraube Wz, so wird man durch eine sanfte Bewegung des vertical gestellten Winkelmessers, dem Fernrohre wieder völlig genau die horizontale Stellung verschaffen können.

VI. Es ist also durch das bisherige Verfahren, der Winkelmesser genau vertical gestellt worden, und das Fernrohr IOL Fig IX hat eine horizontale Lage, bey der zugleich der Index des Vernier auf o° stehet.

VII. Man lasse also an dem Werkzeuge alles in unverrückter Stellung, löse die Alhidadenregel, und drehe dieselbe bis man durch das Fernrohr in der Richtung mOn das erhabene Objekt P erblicket, und in dem Augenblicke befestige man die Alhidadenregel wieder an den Rand,

so

so wird man demnächst aus dem Bogen Lm, welchen der Index des Vernier beschrieben hat, das Maas des Winkels LOm oder nOl, mithin die Elevation des Objects P über der Horizontallinie Ola erfahren.

VIII. Man kan hierauf um sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, den Index des Vernier wieder zurück auf o° führen, und untersuchen, ob in dieser Lage die Libelle noch horizontal stehet, ob folglich während daß man das Fernrohr aus der horizontalen Richtung Ol in die On brachte, sich die Ebene des Werkzeugs nicht verrücket hat; ein gleiches könte man, vermittelst eines Probierfernrohres (§ 131. VII.) erfahren, wenn das Werkzeug mit einem versehen wäre.

Anmerkungen

§. 156. I. Der Winkelmesser, dessen Beschreibung wir in dem ersten Theile § 99 gegeben haben, ist von der Beschaffenheit, daß die Grade von der linken Hand gegen die rechte gezählet werden — also auf dem verticalen Kreise Fig IX. nach der Richtung LvnlmL Wenn folglich bey L, o° stehet und das Fernrohr aus der horizontalen Lage Ll in die elevirte mn gebracht wird, so durchläuft der Index des Vernier den Bogen Lm, aber nicht nach der Richtung, nach welcher

cher die Grade gezählet werden, sondern rückwärts. Damit man nun die richtige Grösse des Bogens Lm erfahre, so untersuche man, was nach der Richtung, nach der die Grade gezählet werden, der Index des Vernier bey m weiset; Gesetzt er wiese den Bogen Lvnlm = 355° 10', so ziehe man diesen Bogen von 360° ab, so erhält man die richtige Grösse des Bogens Lm = 4°. 50', das Maaß des gesuchten Winkels POa.

II. Eine der wichtigsten Eigenschaften bey Messung der Verticalwinkel, ist, daß der Durchschnitt der Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohres ganz genau in der Axe desselben liege. Daher der Mechanicus bey diesem Umstande alle mögliche Vorsicht anwenden muß. Man kan sich davon gehörig versichern, wenn man das Fernrohr nach einem gewissen Objekte so richtet, daß der erwähnte Durchschnitt der beyden Kreuzlinien einen gewissen kenntlichen Punkt des Objekts decket, hierauf das Fernrohr innerhalb der Hülsen H, H, Fig X herumwendet, und untersuchet, ob der erwähnte Durchschnitt den bemerkten Punkt des Objekts nicht verlässet. Da bey Umwendung des Fernrohres der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien um die wahre Umdrehungsaxe des Fernrohrs einen Kreis beschreiben muß, wenn solcher nicht genau in der Axe liegt, so liessen sich gar leicht Mittel ausfindig machen,

aus

aus dem Durchmesser des beschriebenen Kreises, der sich an dem entlegenen Objecte beobachten liesse, die Grösse des Fehlers, oder die Abweichung des Durchschnitts der beyden Kreutzlinien von der Axe des Fernrohres zu bestimmen; Ich werde mich aber hiebey nicht länger aufhalten, weil die Sache an sich leicht ist, und ich auch übrigens dem Mechanico die Geschicklichkeit zutrauen kan, die Linien auf das Glas so zu reissen, daß ihr Durchschnitt genau in die Axe des Fernrohres zu liegen komme.

III. Es entstehen auch kleine Fehler bey Ausmessung eines Verticalwinkels 1) wenn die Ebene des Werkzeugs nicht genau in eine verticale Lage gebracht worden ist, 2) wenn die Axe des Fernrohres der Ebene des Winkelmessers nicht genau parallel ist — Obgleich die erwähnten Ursachen bey Höhenmessungen selten von grossen Folgen sind, so erfordert es doch die Einsicht eines Feldmessers, wenigstens einen ohngefähren Ueberschlag zu machen, wie groß etwa die daher entstehenden Fehler seyn mögen, und dazu wird folgendes dienlich seyn.

Fehler welche aus den beyden Ursachen (III) zusammengenommen, bey Ausmessung eines Verticalwinkels zu befürchten sind.

§. 157. I. Es sey BCcN, Fig XV, ein Stück von dem eingetheilten Bogen des Winkelmessers; A dessen Mittelpunkt, um welchen sich die Alhidadenregel, und folglich das Fernrohr drehet. Man gedenke sich durch A eine Horizontalebene, die die Ebene des Werkzeugs in der geraden Linie BA durchschneide; Mit dem Halbmesser des Instruments AB beschreibe man in der Horizontalfläche den Bogen BM. Weil ich nun annehme, der Winkelmesser stehe nicht vertical, mithin nicht auf der Horizontalfläche senkrecht, so wird der sphärische Winkel NBM, als der Neigungswinkel des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche, nicht genau $= 90°$ seyn. Ich will also $NBM = 90° - \gamma$ setzen, wo also γ des Werkzeugs Neigung gegen die Verticalfläche bedeutet; ABL sey eine Ebene durch BA, auf das Werkzeug senkrecht; also der sphärische Winkel $NBL = 90°$, folglich der kleine Winkel $MBL = NBL - NBM = \gamma$.

II. Man nehme nun an, die Linie AE in der Horizontalfläche, stelle das nach der Libelle horizontalgerichtete Fernrohr vor, und da ich voraussetze, das Fernrohr mache mit der Ebene des Werk-

Werkzeugs einen kleinen Winkel, so lege man durch A E eine Ebene CAE auf das Werkzeug senkrecht, welche die Ebene des Winkelmessers, oder auch die Alhidadenregel in der geraden Linie AC schneide, so wird der Winkel CAE des Fernrohrs Neigung gegen das Werkzeug, und ein Bogen CE, mit dem Halbmesser CA = BA beschrieben, dieses Winkels CAE Maaß seyn. Ich will CAE oder den Bogen CE = β nennen.

III. Gesetzt nun, die Alhidadenregel AC bey deren Lage das Fernrohr AE horizontal ist, werde in die Richtung Ac gebracht, bey der man durch das Fernrohr, welches aus der horizontalen Lage AE in die Ac gekommen seyn wird, das über die horizontale Ebene erhöhete Object sehe. Hier muß man sich nun gleichsam vorstellen, durch Umdrehung der Alhidadenregel, komme der Winkel CAE in die Lage cAe; wo die Ebene cAe noch auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehen, und der Bogen ce = CE = β (II) seyn wird.

Durch Ae lege man nun eine auf die Horizontalfläche BDM senkrechte Ebene eAD, die die Horizontalfläche in AD durchschneide, so ist eigentlich der Verticalwinkel eAD, der wahre Elevationswinkel des Objects über der Horizontalfläche, und eD dessen Maaß.

Der Winkel CAc, oder der Bogen Cc ist aber derjenige welchen die Alhidadenregel, mithin der Inder des Vernier auf dem Werkzeuge beschrieben hat, indem das Fernrohr aus der horizontalen Richtung AE, in die Richtung Ae gebracht worden ist Wolte man also diesen Bogen Cc, den ich $= \alpha$ nennen will, für des Winkels eAD Maaß annehmen, so würde man offenbar einen Fehler begehen, weil Cc nicht dem Bogen De gleich seyn kan.

Aus den gegebenen Grössen α, β, γ, wird man aber gar leicht den Bogen eD $= x$, mithin den wahren auszumessenden Elevationswinkel eAD bestimmen.

IV. Man nehme die Bogen BcN, DeO, BL, BM Quadranten gleich, so wird L des Kreises BcN, N des Kreises BL, und O des Kreises BM Pol. ML aber des Winkels LBM $= \gamma$, Maaß.

V Ferner ist der Bogen cN, das Maaß des Winkels cLN am Pole des Kreises B N. Man nenne den kleinen Bogen BC $= \psi$, so ist cN $=$ $90° - cB = 90° - (\alpha + \psi)$

VI. Der Bogen eO $= 90° -$ De $=$ $90° - x$ (III)

VII. LO $=$ MO $+$ ML $=$ $90° + \gamma$ (IV)

VIII.

VIII. Weil ferner auch ceL = 90°, so hat man eL = 90° — ce = 90° — β. (III)

IX. Man suche nun in dem sphärischen Dreyecke eOL aus den beyden Seiten eL, OL, und dem eingeschlossenen Winkel eLO = cLN, die dritte Seite eO, nach (Trig S. LII. 2) so wird cos eO = sin eL sin LO cos eLO + cos eL cos OL oder aus (IV. V. VI. VII. VIII) die gehörigen Werthe substituirt

sin x = cos β cos γ sin (α + ψ) — sin β sin γ.

X Vermittelst dieses Ausdrucks findet man also aus den bekanten Grössen β, γ, α, ψ, den wahren Elevationswinkel eAD = x.

XI. Daß ψ eine bekante Grösse in dieser Formel sey, erhellet so.

Wenn in der Figur der Bogen eC = α = o wird, d. h. der Punkt e auf C fält, so fällt das Fernrohr Ae in die Horizontalfläche, und hat in ihr die Lage AE.

Also ist für diesen Fall auch x = o; Setzt man demnach in die Formel IX, so wohl α als auch x = o, so erhält man

o = cos β cos γ sin ψ — sin β sin γ

also $\sin \psi = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \tang \beta \tang \gamma$.

Es ist also ψ eine bekante Grösse, indem sie durch die beyden Grössen β, γ, bestimmt ist.

XI. Weil aus (X)

$\sin \beta \sin \gamma = \sin \psi \cos \beta \cos \gamma$

so substituire man diesen Werth in die Gleichung (IX) dann wird

XII. $\sin x = \cos \beta \cos \gamma (\sin (\alpha + \psi) - \sin \psi)$

XIII. Aber aus (Trig S. XIII. 12) (das dortige $\varphi = \alpha + \psi$ gesetzt) folgt $\sin (\alpha + \psi) - \sin \psi = 2 \cos (\frac{1}{2} \alpha + \psi) \sin \frac{1}{2} \alpha$

Also wird

$\sin x = 2 \cos \beta \cos \gamma \sin \frac{1}{2} \alpha \cos (\frac{1}{2} \alpha + \psi)$

welche Formel sehr bequem ist, den wahren Winkel x durch Logarithmen zu berechnen.

XIV. Wenn die Grössen β, γ, wie gewöhnlich nur sehr klein sind, so wird auch ψ in (X) sehr klein seyn; dieses verstattet demnach bloß $\psi = \beta . \gamma$ zu setzen, wo ψ, β, γ Decimaltheile des Sinus totus bedeuten; sind aber ψ, β, γ in Secunden ausgedrückt, so hat man

$\frac{\psi}{206264} = \frac{\beta}{206264} \cdot \frac{\gamma}{206264}$ mithin in Secunden

$$\psi = \frac{\beta . \gamma}{206264}$$

XV. Ex. Man setze die Abweichung des Werkzeugs von der Verticalfläche $\gamma = 10' = 600''$; des Fernrohres Neigung gegen das Werkzeug oder $\beta = 8' = 480''$, den Bogen α den die Alhidadenregel auf dem Werkzeuge beschrieben hat $= 20°. 30'$; so hat man erstl. für den Bogen ψ

$\log \beta = 2,6812412$
$\log \gamma = 2,7781512$

$\log \beta \gamma = 5,4593924$
$\log 206264 = 5,3144252$ (Trig S. V.)

$\log \psi = 0,1449672$
$\psi = 1'',5$

Es erhellet also, daß man in diesem Ex. den Bogen ψ ganz bey der folgenden Rechnung weglassen kan, da er nur etwas über eine Secunde beträgt. Also wird für x,

$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log \cos \beta = 9{,}9999988 - 10$
$\log \cos \gamma = 9{,}9999982 - 10$
$\log \sin \frac{1}{2}\alpha = 9{,}2502822 - 10$
$\log \cos \frac{1}{2}\alpha = 9\ 9930131 - 10$

$\log \sin x = 9{,}5443224$

$x = 20^\circ\ 29'.\ 56''$; also $\alpha - x = 4''$

Es wäre also bey den angenommenen Grössen, der wahre Verticalwinkel x nur um 4" kleiner, als der, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, indem das Fernrohr aus dem horizontalen Stande nach dem erhöheten Objecte gerichtet wurde. Dieses ist in der That ein Fehler, welcher in der practischen Geometrie immer für Nichts angesehen werden kan.

XVI. Es wird sich nun, wie in diesem, so auch in andern Beyspielen, und überhaupt aus der Natur der Formel zeigen, daß eine kleine Abweichung des Fernrohres von dem parallelen Stande, und eine geringe Schiefe des Werkzeugs, fast immer nur einen sehr unbeträchtlichen Fehler hervorbringen werden, wenn man auch gleich, die Grössen β, α, γ, weit grösser annähme, als in dem Beyspiele (XV) geschehen ist. Aus diesen Ursachen darf also in den wenigsten Fällen ein Feldmesser sehr besorgt seyn. Weit wichtiger ist aber bey Höhenmessungen die Vorschrift, die Libelle mit dem Fernrohre so genau

als möglich parallel zu machen, weil aus dieser Ursache die vorzüglichsten Fehler zu besorgen sind.

XVII. In den meisten Fällen, wenn anders β, γ nicht eine sehr beträchtliche Grösse haben, (welches man immer wird voraus setzen können) wird man ohne merklichen Fehler, die Berechnung des Bogens ψ sich ganz ersparen können, da ψ nur immer einige wenige Secunden betragen wird. Dis giebt demnach, $\psi = 0$ gesetzt, für x folgende weit kürzere Formel.

$$\sin x = 2 \cos\beta \cos\gamma \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha$$

welche sich wegen $2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha$ in folgende

$$\sin x = \cos\beta \cos\gamma \sin\alpha$$

zusammenziehet, welche sehr geschwinde durch Logarithmen zu berechnen stehet.

XVIII. Wenn das Fernrohr dem Werkzeuge parallel also $\beta = 0$ ist, das Werkzeug aber um den Winkel γ von der Verticalebene abweichet, so hat man blos

$$\sin x = \cos\gamma \sin\alpha$$

XIX. Wäre aber das Werkzeug genau vertical, also $\gamma = 0$, das Fernrohr aber um den Winkel β gegen das Werkzeug geneigt, so hätte man

$$\sin x = \cos\beta \sin\alpha$$

XX. Wenn endlich so wohl $\beta = o$ als auch $\gamma = o$ wäre, so würde

$$\sin x = \sin \alpha \text{ mithin}$$
$$x = \alpha$$

d. h. der wahre Winkel, demjenigen gleich, welchen das Werkzeug angiebt.

Gebrauch der Quadranten, Verticalwinkel zu messen, und Ersparung einer Libelle dabey.

§. 158. Bey Höhenmessungen pflegt man sich sonst auch der Quadranten ohngefähr auf folgende Art zu bedienen.

1. Es sey (Tab. II Fig. XVI) ba der eingetheilte Rand eines solchen Werkzeugs, und der Bogen von o bis 90 einem Quadranten gleich. c dessen Mittelpunkt, um den das Fernrohr de, mit der daran befindlichen Vernierplatte rm beweglich ist. i, k, ein paar Punkte auf der Ebene des Werkzeugs, welche so liegen, daß eine Linie durch sie, wie ik, mit der Linie c90° genau parallel ist, welche durch das Centrum c, und den Theilpunkt 90 gehet — Wenn nun die Ebene des Quadranten genau vertical gestellet, und so gerichtet worden, daß ein Loth in, durch die beyden Punkte i, k, gehet, mithin ik dadurch eine verticale Lage erhalten hat, so wird auch der Halbmesser c 90° vertical, mithin der Halbmesser

messer c o° horizontal seyn. Wenn nun von dem Mechanico die Einrichtung so getroffen worden, daß die Linie cr, die man sich durch das Centrum c, und den Index r des Vernier einbildet, genau der Axe des Fernrohrs de parallel ist, so erhellet, daß wenn co° horizontal gestellet worden, und durch Umdrehung des Fernrohrs, der Index r des Vernier an den ersten Theilpunkt o° gebracht wird, mithin die Linie cr, in den horizontalen Halbmesser co° zu liegen kömt, alsdenn auch die Axe des Fernrohres, eine horizontale Lage haben werde. Wird demnächst, das Fernrohr aus dieser horizontalen Richtung, in die Richtung de gebracht, so ist der Bogen o°r, das Maas des Winkels, um den das Objekt, nach welchem das Fernrohr de zielet, über der Horizontallinie co° elevirt ist.

So erhellet also, wie bloß vermittelst des Lothes ik, die horizontale Lage des Fernrohrs erhalten werden kan, wie man also zu dieser Absicht eine Libelle ersparen könne.

Allein wenn man überlegt, daß die gewöhnlichen geometrischen Werkzeuge nicht sehr groß seyn dürfen, so wird die Linie ik nicht die gehörige Länge haben, welche erfordert wird, wenn vermittelst des Lothes in, der Halbmesser c90° sehr genau eine verticale Lage erhalten soll. Denn es ist klar, je weiter die Punkte i, k, durch wel-

welche das Loth gehet, von einander entfernet sind, desto sicherer wird auch die richtige Verticalstellung der Linie ik ausfallen. Wenn man ferner in Erwägung ziehet, wie nothwendig es sey, daß ik genau mit c 90°, und cr genau mit der Axe des Fernrohres parallel gemacht worden sey, und wie viele, oft beschwerliche Prüfungen, nöthig sind, sich davon gehörig zu versichern, so wird man, wenigstens bey Geometrischen Werkzeugen sich immer lieber einer Libelle bedienen, die horizontale Richtung des Fernrohres zu erhalten, weil 1) ihre Prüfung nicht mit so vielen Umständen verknüpft ist, und 2) weil, wenn sie eine Länge von 5 bis 6 Zollen hat und überdem ausgeschliffen ist, weit sicherer den horizontalen Stand des Fernrohrs geben wird, als es vermittelst eines Lothes an einem kleinen Quadranten geschehen kan. Hat aber der Quadrant eine beträchtliche Gröss, z. E. von 2 oder $2\frac{1}{2}$ Fussen im Halbmesser, dann ziehe ich das Loth vor, weil die gehörige Anbringung der Libelle an das Fernrohr und andere Vorrichtungen dabey, Beschwerlichkeiten ausgesetzt seyn würden, die bey einem kleinen Winkelmesser nicht statt finden.

2. Die Art, wie übrigens an einem Quadranten, die gehörige verticale und horizontale Wendung erhalten werden kan, muß man aus andern Schriftstellern, z. E. aus Herrn *de la Lande Astronomie* Tom. II. §. 2311 (a Paris 1771) Bi-

ons

ons mathematischen Werkschule VI B. I Kap. und aus den Schriften kennen lernen, die von Messung eines Grades auf der Erdfläche handeln.

XIII. Kapitel.

Die Fehler der geometrischen Werkzeuge durch Versuche ausfindig zu machen.

§. 159. Ein jeder Geometer, der bey wichtigen Messungen etwas richtiges leisten will, wird vorher die Zuverlaßigkeit seiner Werkzeuge prüfen, und deren Fehler zu entdecken suchen — Insbesondere ist diese Vorsicht in Absicht derer Instrumente zu empfehlen, mit denen Winkel gemessen werden. Findet man beträchtliche Unrichtigkeiten, so wird man vernünftiger Weise Rücksicht auf sie nehmen, und bey einem jeden ausgemessenen Winkel die nöthige Verbesserung anbringen.

Ich werde nun in diesem Kapitel, unterschiedene Methoden angeben, die Richtigkeit eines geometrischen Winkelmessers zu untersuchen, und mich vorzüglich auf den Winkelmesser einschränken, den ich im ersten Theile dieses Buches beschrieben habe. Ein kleines Nachdenken, wird

einem

einem jeden leicht die Mittel an die Hand geben, ähnliche Prüfungen bey andern Winkelmessern anzustellen.

Man kan nun überhaupt bey diesem Geschäfte folgende Fragen thun.

Erstens. Ob der eingetheilte Rand eines Winkelmessers seine gehörige Richtigkeit habe, und wenn Fehler in dessen Abtheilungen enthalten sind, an welcher Stelle des Randes sie sich befinden.

Zweitens. Ob die Abtheilungen des Vernier ihre gehörige Genauigkeit haben, und der Vernier den gehörigen Bogen fasset. Auch ob die Indices der Verniere sowohl der 90 als 96 Theilung, genau in einer geraden Linie liegen.

Drittens. Ob das Fernrohr genau in einer Ebene auf und nieder beweglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet — dieses zu untersuchen ist bereits im XI Kap. gewiesen worden.

Viertens. Ob der Winkelmesser excentrisch sey; dieses sind die wichtigsten Fragen, die man überdie Güte eines geom. Winkelmessers anstellen kan — Folgendes wird nun zeigen, wie solche Untersuchungen anzustellen wären.

Wie man die Unrichtigkeiten in den Abtheilungen des Randes bestimmen könne.

§. 160. 1. Wenn man bloß untersuchen will, ob Ungleichheiten in den Abtheilungen des Randes enthalten sind, ohne übrigens die eigentliche Grösse derselben zu bestimmen, so kan dieses oft schon vermittelst eines sehr guten Stangenzirkels, entschieden werden.

Man fasset nemlich, mit aller möglichen Schärfe, einen gewissen Bogen des Randes, z. E. 30° zwischen beyde Spitzen des Stangenzirkels, und prüfet, ob diese Weite durchgehends auf der ganzen Peripherie von gleicher Grösse sey. Vorzüglich ist dieser Versuch mit dem Bogen von 90° anzustellen, wodurch man erfährt, ob die ganze Peripherie gehörig in 4 gleiche Theile getheilt ist; Es braucht keine Erinnerung, daß man jederzeit die Spitzen des Stangenzirkels genau in die Theilpunkte einsezen, und sich allenfalls eines Vergrösserungsglases dabey bedienen müsse.

Durch dieses Verfahren findet man, ob wenigstens grobe Fehler in den Hauptpunkten des Randes enthalten sind; Aehnliche Prüfungen werden nun auch auf der 96 Theilung vorgenommen.

Solchergestalt zeigt sich überhaupt, wo Unrichtigkeiten in den Abtheilungen vorgefallen sind — die Grösse derselben ausfindig zu machen, wird nun die Folge ausweisen.

Kleine Fehler in den Theilpunkten des Randes, werden sich nun freylich wohl nicht vermittelst des Stangenzirkels entdecken lassen — Indessen giebt es doch viele Schriftsteller, die bey der Prüfung des eingetheilten Randes, selbst astronomischer Werkzeuge, den Stangenzirkel vorschlagen; De la Lande (Astronomie §. 2563) sagt, man könne **sehr gut** vermittelst eines Stangenzirkels die Fehler des eingetheilten Randes entdecken.

Warum solte man sich auch nicht des Stangenzirkels zur Aufsuchung wenigstens solcher Fehler bedienen können, welche aus Nachläßigkeit des Mechanici entstanden sind, da man ja selbst den Stangenzirkel zur Theilung des Werkzeugs braucht?

Wie man vermittelst der Methode §. 135. welche mein Vater zur genauern Ausmessung eines Winkels vorgeschlagen hat, die Fehler in den Theilpunkten eines Randes bestimmen könne.

§. 161. Fig XVII Tab. IX stelle den horizontalgestellten Winkelmesser vor; O dessen Mittel-

telpunkt, um den sich das Fernrohr drehet, welches ich hier der Ebene des Werkzeugs parallel, und nicht in einem Gewinde auf und nieder beweglich, annehme; (Dieses erhält man nach (§. 100) wenn man die Vorrichtung, um die das Fernrohr auf und nieder beweglich ist, von der Alhidadenregel abschraubt, und dagegen auf die Alhidadenregel ein paar Hülsen durch die das Fernrohr gesteckt wird, befestigt.) Die beyden Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohres seyen so gestellt, daß eine davon, auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehe, (§ 134) mithin bey dem horizontalen Stande des Winkelmessers, eine verticale Lage habe.

Der Index des Vernier stehe bey a auf 0°; und das Fernrohr ziele in dieser Richtung ab, genau nach einem Punkte Q, den man auf einer etwa 40 bis 50 Fuß von dem Winkelmesser entfernten Wand, verzeichnet hat. Q werde also von der Verticallinie im Brennpunkte des Fernrohres genau bedecket.

II. Will man nun einen gewissen Bogen des Randes, z. E. den von 0° bis 60°, von 60° bis 120° u. s. w. prüfen, so lasse man das Werkzeug in unverrückter Stellung, löse die Alhidadenregel, und bringe durch Umdrehung derselben, das Fernrohr aus der Richtung ab in die cd, so daß bey c der Index des Vernier genau auf

60° stehet; lasse demnächst von einem Gehülfen, den man durch Zeichen und Zurufen bedeutet, ein Blatt Papier, worauf ein anderer Punkt P verzeichnet ist, auf der oberwähnten Wand so lange verschieben, bis P von der Verticallinie im Brennpunkte des Fernrohres cd ebenfalls genau bedecket wird, so hat man auf diese Art einen Winkel POQ abgestecket, der genau dem Bogen ac, oder 60 Graden des Randes zugehört. Das Blatt Papier wird demnächst gehörig an die Wand feste gemacht.

III. Ob aber nun diese 60 Grad des Randes, wahre 60° sind, und ob auf gleiche Weise die Bogen 60° bis 120° von 120° bis 180° u.s.w. auf dem Rande des Werkzeugs die gehörige Grösse haben, wird sich auf folgende Art entscheiden.

IV. Man lasse das Fernrohr unverrückt auf 60° stehen, und wende nach (§. 135 II) das ganze Werkzeug, bis dadurch das Fernrohr wieder in die Richtung nach Q komme, wie die XVIII Figur ausweiset, wo dann die Linie ab der XVII Figur in die punktirte Richtung ab der XVIII Figur kommen wird.

V. In dieser zwoten Richtung des Fernrohrs nach Q, wird demnach der Index des Vernier auf 60° stehen, so wie er bey der ersten Richtung

tung des Fernrohrs nach Q, nemlich in der XVII Figur, auf 0° stand. Um nun zu untersuchen, ob der Bogen von 60° bis 120° auf dem Rande, dem von 0° bis 60° gleich sey, so lasse man die Ebene des ganzen Werkzeugs unverrückt, und bringe durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel den Index des Vernier genau an den Theilstrich n des Randes, der zu 120° gehöret. Befestige dann die Alhidadenregel wieder, und visire durchs Fernrohr nm — decket die Verticallinie in Brennpunkte desselben, genau den Punkt P, so ist der Bogen von 60° bis 120°, dem von 0° bis 60° gleich, oder cn = ac. Geschiehet dieses aber nicht, sondern die Ziellinie des Fernrohres deckt' einen andern Punkt p, so bringe man durch sanfte Umwendung der Micrometerschraube das Fernrohr völlig genau in die Richtung nach P, dergestalt, daß also nm in die Richtung c'd' zu liegen komme.

VI. Nach dieser geringen Verrükung des Fernrohrs, wird aber der Index des Vernier nicht mehr bey n an dem Theilstriche 120 stehen, sondern sich bey c' befinden, und von n einen gewissen Abstand c'n haben, den man als bekant wird ansehen können, wenn man die Umdrehungen der Micrometerschraube gezählet hat, die erfordert wurden, das Fernrohr aus der Lage nm, völlig genau in die Richtung nach P zu

bringen, und solche demnach in Minuten und Sec. verwandelt. Ich will also den Abstand c'n, als Maaß des kleinen Winkels nOc' oder POp, = α nennen.

VII. In diesen Abstande α von dem Theilpunkte 120, lasse man bey c' den Index unverrückt, bringe erstlich durch **Wendung des ganzen Werkzeugs** das Fernrohr wieder in die Richtung nach Q. und dann durch **blosse Umdrehung der Alhidadenregel** den Index auf 180°; Ist dann bey dieser Lage, das Fernrohr nicht genau nach P gerichtet, so untersuche man wieder, wie viel Minuten und Secunden der Index von dem Theilstriche 180 abstehet, nachdem durch eine sanfte Umdrehung der Micrometerschraube das Fernrohr genau die Richtung nach P erhalten hat. Ich will nun den am Ende dieser Operation, von dem Theilstriche 180 gefundenen Abstand des Index = β nennen.

VII. Durch Fortsetzung solcher Operationen sey also am Ende der 4ten Operation der Abstand des Index von dem Theilstriche, der zu 240° gehört = γ

Am Ende der 5ten Oper. der Abstand von dem Theilstriche, der zu 300° gehört = δ

Am

Am Ende der 6ten des Index Abstand von dem Theilstriche 360 = ε.

VIII. So wird man aus denen durch Hülfe der Micrometerschraube gefundenen Abständen α β γ δ ε, nicht allein die eigentliche Grösse des Winkels POQ dem bey der ersten Operation der Bogen von 0° bis 60° zugehörte, sondern auch die wahre Grösse der Bogen von 60° bis 120° von 120° bis 180° u. s. w. bestimmen können.

IX. Nennet man nemlich den Winkel POQ, oder den Bogen von 0 bis 60° auf dem Rande = a, ferner die Bogen

von 0 bis 120 = b
von 0 — 180 = c
von 0 — 240 = d
von 0 — 300 = e

so erhellet, weil von Anfange einer Operation bis ans Ende derselben, das Fernrohr immer um den Winkel POQ = a gedrehet worden, daß vom Anfange der ersten Oper. bis ans Ende der zwoten, das Fernrohr, oder der Index auf dem Rande den Bogen 2. a beschrieben haben wird. Da aber am Ende der 2ten Operation der Index den Abstand α vom Theilpunkte 120 hatte, und die Weite von 0° bis 120° = b gesezt worden, so erhellet, daß vom Anfange der er-

stern bis ans Ende der 2ten Operation auch der Bogen $b + \alpha$ wird beschrieben worden seyn. Daß also am Ende der 2ten Operation seyn müsse

$$b + \alpha = 2.a$$

Auf gleiche Weise erhellet, daß am Ende der 3ten Operation seyn werde $c + \beta = 3.a$
Am Ende der 4ten —— $d + \gamma = 4.a$
der 5ten —— $e + \delta = 5.a$
der 6ten ——$360° + \varepsilon = 6.a$

Nemlich am Ende der letzten Operation, hat der Index den ganzen Umkreis, und noch überdem den kleinen Bogen ε durchlaufen.

Ich habe hier zwar angenommen, daß am Ende einer jeden Operation der Index rechter Hand der Theilstriche, 120, 180 u. s. w. gestanden habe, daß folglich die Werthe, von α, β, γ, δ ε, positiv seyen. Es erhellet aber, daß auch einige von diesen Werthen negativ seyn würden, wenn am Ende einer gewissen Operation der Index linker Hand der erwähnten Theilstriche gestanden hätte.

X. Aus der Gleichung $360° \mp \varepsilon = 6.a$ findet man nun erstlich $a = \frac{360° \mp \varepsilon}{6} = 60° \mp \frac{1}{6}\varepsilon$.
Es würde also, wenn am Ende der letzten Operation

ration nicht $\varepsilon = 0$ gefunden worden wäre, der Bogen auf dem Rande von 0 bis 60 nicht genaue 60° halten, sondern um den Werth $\frac{1}{6}\varepsilon$ grösser oder kleiner als 60° seyn.

Diesen Werth von a nun in die übrigen Gleichungen substituirt giebt

$$b = 120^\circ + \tfrac{2}{6}\varepsilon - \alpha$$
$$c = 180^\circ + \tfrac{3}{6}\varepsilon - \beta$$
$$d = 240^\circ + \tfrac{4}{6}\varepsilon - \gamma$$
$$e = 300^\circ + \tfrac{5}{6}\varepsilon - \delta$$

woraus man also die wahre Grösse der Bogen von 0° bis 120°, von 0° bis 180° u. s. w. findet

die Werthe von b — a, c — b, u. s. w. geben dann die Grösse der Bogen von 60° bis 120° von 120° bis 180° u. s. w., und zeigen ob jeder dieser Bogen genaue 60° halte oder nicht.

XI. Ex. Bey einem Winkelmesser, dessen Radius 6 Zoll war, habe ich solchergestalt den Versuch angestellet und folgende Werthe gefunden.

$$\alpha = + 2'.\ 10''$$
$$\beta = - 2'.\ 30''$$
$$\gamma = - 3'.\ 0''$$
$$\delta = 0'.\ 0''$$
$$\varepsilon = + 4'\ 0''.$$

Diese geben demnach

a = 60°. 0′ 40″
b = 119. 59 10
c = 180. 4. 30
d = 240. 5. 40
e = 300. 3. 20

Dieser Winkelmesser hatte also, in den Theilpunkten 60, 120, 180 u. s. w. merkliche Fehler. Da er auf einer Theilscheibe getheilt worden, so konte ich schon zum voraus vermuthen, daß es mit dessen eingetheilten Rande nicht so ganz richtig seyn möchte; Ich habe mir nicht die Mühe gegeben, auch die übrigen Abtheilungen zu prüfen — Es erhellet indessen, daß auf eine ähnliche Art ein jeder Bogen des Randes, dessen Grösse ein aliquoter Theil von 360° ist, sich wird berichtigen lassen.

Noch muß ich erinnern, daß ich bey diesen Verfahren, weil der Winkelmesser keine Micrometerschraube hatte, mich einer andern Methode bedienet habe, die Werthe von α, β, γ. u. s. w. ausfindig zu machen PQ Fig XVIII. war nemlich eine auf einer Wand gezogene gerade Linie, die Punkte P, Q, lagen in dieser Linie, und um sie waren kleine Kreise gezogen, um sie besser erkennen zu können. POQ war ohngefähr ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Seiten OP, OQ, PQ, mit aller möglichen Vorsicht gemes-

gemessen worden waren, um dadurch den Winkel P zu berechnen. Auf die gezogene Linie PQ, wurden nun auf beyden Seiten des Punktes P eine gewisse Menge von Zollen gesetzt, und durch senkrechte Striche jeder in 4 gleiche Theile getheilet.

Wenn nun der Index des Vernier an einen der oberwähnten Theilstriche 60, 120 u. s. w des Randes, gebracht worden war, und des Fernrohrs Zielllinie alsdann nicht genau den Punkt P bedeckte, sondern z. E an einen andern Punkt p hintraf, so wurde untersucht, wie viel Zolle und Theile desselben, zwischen P und p enthalten waren; Theile eines Zolles, die kleiner als $\frac{1}{4}$ Zoll waren, konten sehr gut geschätzt werden, da die Theilstriche auf Pp durchs Fernrohr sehr kenntlich waren; Auch wurde angemerkt ob p linker oder rechter Hand P fiel.

Aus den Linien OP, Pp, und dem Winkel P, wurde demnächst der kleine Winkel POp $= \alpha$ oder $= \beta$ u. s. w. berechnet, folglich eben das geleistet, was im vorhergehenden durch die Micrometerschraube geschah, (VI); nemlich, die Grösse des kleinen Bogens d'n, oder c'n in Minuten und Secunden bestimmt, so genau als es die geringe Grösse des Werkzeugs verstattet.

XII. Diese Methode die Werthe von α, β u s w. zu finden, möchte in der That wohl noch zuverläßiger seyn, als die erstere, wo man sich hierzu der Micrometerschraube bedienet. Aber sie ist etwas weitläuftiger, und erfordert eine genaue Messung der Grössen OQ, QP, OP, Pp, und eine jedesmahlige Berechnung des Winkels POp. In dem Exempel (XI) waren in Zollen OP = 724,4; OQ = 699,0; PQ = 712,0

XIII. Was nun überhaupt bey dem ganzen Verfahren für Vorsichten zu beobachten sind, davon ist bereits § 136 geredet worden. Uebrigens habe ich noch zu errinnern, daß die Kreußlinien im Brennpunkte des Fernrohrs, sehr zart ins Glas gerissen seyn müssen, damit sie in der Ferne einen so kleinen Punkt als möglich, decken, mithin der Schätzung sehr kleiner Theile auf dem Raume Pp, nicht hinderlich fallen. Endlich muß man nie vergessen, sich eines Vergrösserungsglases zu bedienen, wenn der Index des Vernier an die Theilstriche des Randes gebracht wird. Auch ist es für die Richtigkeit des Verfahrens sehr vortheilhaft, wenn die Punkte P, Q, so stark als möglich erleuchtet sind; Daher man am sichersten verfährt wenn P, Q, schwarze Punkte auf einer weißen Fläche sind.

XIV. Bey Prüfung beweglicher astronomischer Werkzeuge, würde die bisher beschriebene Me-

tho-

thode gleichfalls mit Nutzen gebraucht werden können, und noch eine weit grössere Genauigkeit verstatten, theils wegen des festern Standes derselben, theils auch, weil die Grösse derselben eine genauere Bestimmung der Werthe α, β, γ u. s. w. zulässet.

Noch ein Verfahren die Ungleichheiten in den Abtheilungen eines Randes zu entdecken.

§. 162. Es erhellet, daß dieses geschehen könne, wenn man auf dem Rande eines Winkelmessers zwo Gattungen von Abtheilungen hat, eine, wo der Quadrant in 90 Theile, und eine andere, wo er in 96 Theile getheilt ist. Wenn man nemlich den Index des Vernier der 90 Theilung an einen gewissen Theilstrich des Randes gebracht hat, so gebe man acht, was alsdann der Index des Vernier der 96 Theilung weiset; reducire die 96 Theilung auf Grade, Minuten, u. s. w. und vergleiche das Resultat, mit demjenigen, was der Index der 90 Theilung weiset. Findet sich ein beträchtlicher Unterschied, so erhellet, daß in einer von beyden Abtheilungen des Randes ein Fehler stecken müsse, daß also die erwähnten Theilpunkte, an denen die Indices gestanden haben, eine Berichtigung von nöthen haben, die man demnächst entweder nach dem vor-

vorhergehenden §. oder nach andern Methoden bewerkstelligen kan.

Wie die beyden äuserſten Theilſtriche des Vernier zu Berichtigung der Gradabtheilungen dienen können.

§. 163. Man bringe den Index des Vernier genau an einen gewiſſen Theilſtrich des Randes — Dann muß zu gleicher Zeit auch der letzte Theilſtrich des V an einen Theilſtrich des Randes paſſen; und wenn dis nicht durchgehends ſtatt findet, man mag den Index, an welchen Theilſtrich man will, bringen, ſo ſind zuverläßig Ungleichheiten in den Abtheilungen des Randes.

Geſetzt, der Vernierbogen ſey 31 Graden des Randes gleich, ſo muß, wenn der Index des V. genau an des Randes Theilſtrich 31 gebracht wird, der letzte Strich des Vernier genau an den Theilſtrich 0 des Randes paſſen, wenn alles ſeine gehörige Richtigkeit hat.

Geſetzt nun, man brächte den Index des Vernier an den Theilſtrich 62 des Randes, ſo muß der letzte Strich des Vernier genau auf den Theilſtrich 31 des Randes paſſen. Geſchiehet dieſes nicht, ſo kan man vermittelſt der Micrometerſchraube befinden, um wie viel Minuten ꝛc. der letzte Strich des Vernier von dem

Theil-

Theilstriche des Randes, an den er eigentlich passen müste abstehet, um wie viel folglich der Bogen des Randes zwischen beyden Theilstrichen 31, 62, grösser oder kleiner ist, als der Bogen zwischen den Theilstrichen 0, 31;

So kan man also vermittelst der beyden äussersten Theilstriche des V. und durch Hülfe der Micrometerschraube, sehr viele Unrichtigkeiten in den Abtheilungen eines Randes entdecken.

Gebrauch der Micrometerschraube, die Unterabtheilungen in einzelne Grade zu prüfen.

§. 164. Wenn man sich auf die Richtigkeit der Micrometerschraube verlassen kan, und den eigentlichen Werth ihrer Schraubengänge weiß, so kan man auf folgende Art, die Gradabtheilungen des Randes berichtigen.

I. Man bringe den Index des Vernier an an gewissen Theilstrich des Randes z E. an den Theilstrich a (Fig XIX). Wende nun die Micrometerschraube herum, bis der Index an den nächstfolgenden Theilstrich b gerückt ist, und verwandele die gezählten Umdrehungen der Micrometerschraube in Minuten u s.w. Geben diese nun genau so viel, als der Bogen ab eigentlich betra-

betragen müste, so ist die Entfernung der beyden Theilpunkte a, b richtig.

II. Um nun die Weite bc, der folgenden beyden Theilpunkte zu prüfen, so drehe man erstlich die Micrometerschraube wieder rückwärts, bis der Index wieder von b nach a gerückt ist; dadurch kommen in die weibliche Schraube, wieder dieselben Gänge der männlichen, und dies ist nothwendig, wenn man die Weite bc prüfen, und mit ab vergleichen will; Bediente man sich dieser Vorsicht nicht, so wäre zu befürchten, daß die etwanige Ungleichheit anderer Schraubengänge, der Richtigkeit des Verfahrens nachtheilig seyn möchte.

III. Nachdem nun solchergestalt sich in der weiblichen Schraube, wieder dieselben Gänge der männlichen befinden, so löse man die Alhidadenregel, und bringe durch bloße Umwendung derselben, den Index des Vernier an den Theilpunkt b, befestige alsdenn die Alhidadenregel wieder, und treibe durch Umdrehung der Micrometerschraube den Index von b bis an den nächsten Theilstrich c, so wird sich zeigen, ob man von b bis c soviel Umdrehungen der Micrometerschraube bekomt, als man von a bis b erhalten hat, ob folglich bc = ab sey. In dem entgegengesetzten Falle wird der Unterschied angemerkt

merkt, und künftig bey Messung der Winkel allemahl in Betrachtung gezogen.

IV. Auf diese Art erhellet, wie eine ganze Reihe von Theilpunkten berichtigt werden könne, und zwar sehr genau, wenn man 1) immer einerley Schraubengänge braucht, und 2) den Werth derselben in Minuten ꝛc. weiß. Wir haben zwar schon § 101 ein Mittel angegeben, den Werth der Schraubengänge zu bestimmen, da aber dieses zu gegenwärtiger Absicht nicht zureichend genau ist, so pflegt man sich auch folgender Methode zu bedienen.

Den Werth der Umdrehungen einer Micrometerschraube zu bestimmen.

§. 165. Es sey (Fig XX) ik ein auf dem Felde vertical abgesteckter Maasstab, auf dem man seine Abtheilungen in Zolle u. s. w verzeichnet hat. c sey der Mittelpunkt des von dem Stabe entfernten und vertical gestellten Winkelmessers, dessen Fernrohr af, genau horizontal, nach dem Stabe ik gerichtet worden.

Man bemerke nun, was die Axe des Fernrohres, oder die horizontale der beyden Kreutzlinien im Brennpunkte desselben, bey h für einen Theilstrich auf dem verticalen Maasstabe abschneidet, oder wenn die Richtung af, nicht

genau

genau auf einen Theilstrich h trift, so schätze man nach dem Augenmaaße, wie viel Theile eines Zolles zwischen der Axe und dem zunächst bey der Axe liegenden Theilstriche enthalten sind.

II. Man drehe nun die Micrometerschraube herum, bis die Axe des Fernrohres in die Lage eb kömmt, und auf dem verticalen Stabe bey g einen andern Theilstrich abschneidet, und beobachte in dem Fernrohre die Anzahl der zwischen g, h, enthaltenen Zolle ꝛc. Messe demnächst die Weite ch = nk, und berechne aus den Grössen gh, ch, in dem rechtwinkelichten Dreyecke chg, den Winkel gch = ace. Diesem gehören nun so viel Umdrehungen der Micrometerschraube zu, als man nöthig hatte, das Fernrohr, aus der horizontalen Richtung af, in die Lage eb zu bringen, diesen Winkel dividire man also mit der gefundenen Menge von Umdrehungen, so bekömt man den Werth einer Umdrehung in Minuten und Secunden.

III. Da man nun das Fernrohr aus der horizontalen Richtung af, nur so viel erhöhen wird, daß, wenn die Axe des Fernrohrs nach g gerichtet ist, auch h noch in dem Fernrohre erscheinet und übrigens auch die Weite ch immer ziemlich groß in Vergleichung mit gh, genommen werden muß, so erhellet, daß der Winkel gch immer nur klein seyn werde; daher kan man

tang

tang gch = gch, (Trig. S. VII) setzen, dis giebt demnach wegen tang gch = $\frac{gh}{ch}$;

$$gch = \frac{gh}{ch} \text{ oder in Secunden}$$

$$gch = \frac{gh}{ch} \cdot 206264$$

Gehören nun diesem Winkel, m Umdrehungen der Micrometerschraube zu, so ist der Werth einer Umdrehung = $\frac{gh}{m.\,ch} \cdot 206264$ Secunden.

Ex. Bey Prüfung der Micrometerschraube an meines Vaters Astrolabio hatte ich gemessen ch = 567 Zoll und fand gh = 10, 6 Zoll; m = 4, 1 Umdreh. also

log gh =	1,0253059
log 206264 =	5,3144252
	6,3397311
abgez. log m. ch =	3,3603670
läst	2, 9793641

wozu die Zahl 940 gehöret, also ist

1 Umdr. =	940″	= 15′. 40″
0,1 Umdr. =	94″	= 1′. 34″

IV. Es verstehet sich, daß man, wegen der bey Messung der Grössen gh, ch, vorfallenden kleinen Unrichtigkeiten, es nicht bey einem Ver-

suche bewenden lassen, sondern, aus mehreren ein Mittel nehmen müsse; Man könte auch leicht berechnen, um wie viel sich der Werth einer Umdrehung oder die Grösse $\frac{gh.\ 206264}{m.\ ch}$ verändern würde, wenn man gh, ch, etwas falsch gemessen hätte; da aber diese Untersuchung an sich gar zu leicht ist, so brauche ich mich nicht dabey aufzuhalten.

Wenn man gleich den Werth der Umdrehung einer an dem Werkzeuge befindlichen Micrometerschraube nicht kennet, sondern nur die richtige Grösse, eines gewissen Bogens auf dem Rande z. E. den von 5°, weiß, die Unterabtheilungen desselben in einzelne Grade, zu prüfen.

§. 166. I. Es sey Fig XIX ah ein gewisser Bogen des Randes, von bekanter Grösse, und bereits entweder nach dem Verfahren §. 161. oder auch auf eine andere Art berichtiget worden — Man soll die richtige Grösse der Unterabtheilungen ab, bc u. s. w. die hier Grade bedeuten mögen, ausfindig machen.

II. Man siehet leicht, daß dis geschehen könne, wenn die Verhältnisse der Stückgen ab, bc, ꝛc. bekannt sind

Diese

Diese können gefunden werden, wenn man die Anzahl der Umdrehungen der Micrometerschr. weiß, die auf ab, bc u. s. w. gehen.

Gesetzt also die Buchstaben q, r, s, t, u, bezeichnen die Bogen ab, bc u. s. w. und a, b, c, d, e, die Umdrehungen der Micrometerschraube die auf sie gehen; Der Bogen ah heisse β.

Es ist also der Bogen β in Theile q, r, s, t, u, getheilt, die sich verhalten, wie a, b, c, d, e; Den Werth dieser Theile findet man also nach Art der Gesellschaftsrechnung, wenn man schließet

$a+b+c+d+e : a = \beta : q$
$a+b+c+d+e : b = \beta : r$
u. s. w.

Dis giebt demnach $q = \frac{a.\beta}{a+b+c+d+e}$

$r = \frac{b.\beta}{a+b+c+d+e}$

u. s. w.

Wodurch man also die Werthe der Bogen q, r, s, t, u in Minuten und Secunden findet, wenn man den Bogen β in Minuten und Secunden ausdruckt.

Gesetzt, man habe durch Berichtigung gefunden, daß ah $= \beta$ genau 5° sey, und vermittelst

telst der Micrometerschraube durch wiederholte Versuche folgendes herausgebracht.

a	= 4,2 Umdr.	auf das Stück	ab = q
b	= 4,3 ——	—— ——	bc = r
c	= 4,1 ——	—— ——	cd = s
d	= 4,4 ——	—— ——	de = t
e	= 4,5 ——	—— ——	eh = u

S. d. Um. = 21,5 und q + r + s + t + u = 5°

Also $q = \frac{4,2}{21,5} \cdot 5° = \frac{4,2}{21,5} 18000'' = 58'36''$

$r = \frac{4,3}{21,5} \cdot 5° = \frac{4,3}{21,5} 18000'' = 60'. 0''$

So erhellet also, wie man auf diese Art den Werth eines jeden Bogens ab, bc u s w finden könne wenn man gleich nicht den eigentlichen Werth der Umdrehung der Micrometerschraube weis, sondern sich nur auf die Gleichheit ihrer Gänge verlassen kan, welches immer ohne merklichen Irrthum angenommen werden kan, übrigens auch nach dem 164 § die Vorsicht beobachtet, daß bey Prüfung eines jeden Theiles ab, bc, u. s. w. immer ohngefähr dieselben Umgänge der männlichen Schraube, sich in der weiblichen befinden.

Prüfung des eingetheilten Randes vermittelst eines gleichschenklichten Dreieckes, das man auf dem Felde absticket.

§. 167. I. Es sey Fig XXI, ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo AC = AB = a, und CB = b genennet werde, so ist nach der bekanten Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{b}{2a} \text{ also}$$

$$b = 2a \sin \tfrac{1}{2} A$$

II. Wenn man also A, a, als gegeben ansiehet, so läst sich daraus b berechnen, und dann aus den bekanten Grössen, a, b, das gleichschenklichte Dreyeck CAB auf dem Felde abstekken, so, daß bey A ein gegebener Winkel hinkömt.

II. Diesen Winkel messe man demnächst mit dem Werkzeuge, und sehe zu, ob ihn das Werkzeug genau so gros angiebt, als er vermöge des abgesteckten Dreyecks CAB seyn muß. Geschiehet es nicht, so wird man aus dem Unterschiede, die Grösse des Fehlers in demjenigen Bogen des Winkelmessers finden, welcher diesen Winkel A maaß. Und so erhellet also, wie dadurch ein jeder Bogen des eingetheilten Randes geprüft werden könte.

III. Dieses Verfahren ist von verschiedenen Schriftstellern empfohlen, und in Ausübung gebracht worden — Allein meines Erachtens ist es theils ziemlich weitläuftig, theils auch müssen

die Seiten des gleichschenklichten Dreyecks mit ausserordentlicher Sorgfalt gemessen und abgesteckt werden, wenn die Prüfung des Werkzeugs ihren erwünschten Erfolg haben soll — denn da kleine Fehler in Messung der Seiten CA, AB, CB auf den Winkel A Einfluß haben, so könte es leicht geschehen, daß man dem Werkzeuge eine Unrichtigkeit Schuld gäbe, wenn es nicht genau den Winkel A so groß angäbe, als er vermöge des abgesteckten Dreyecks seyn solte, da doch der Fehler bloß in dem unrichtig abgesteckten Dreyecke liegen könte.

Folgende Betrachtungen werden nun zeigen, wie genau man die Seiten des Dreyecks abstekken müsse, wenn bey gegenwärtiger Prüfung des Werkzeugs keine groben Fehler entstehen sollen.

IV. 1. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$, so ist klar, wenn so wohl b, als a, um etwas falsch gemessen worden wären, folglich etwas grösser oder kleiner genommen würden, als es die abzustekende Grösse des Winkels A erfordert, daß auch der Winkel A seine richtige Grösse nicht erhalten würde.

2. Man nehme also an, b, verändere sich um db (Trig S. XXVII) a, um da, wo folglich db, da,

da, die Fehler bedeuten können, die in Messung der Grössen b, a, vorgefallen sind, so wird sich auch A um eine gewisse Grösse dA verändern. Um also dA aus db, da zu finden, verfahre man auf folgende Art.

3. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$ so ist

4. $\log \sin \frac{1}{2} A = \log b - \log a - l 2$

5. Mithin $d \log \sin \frac{1}{2} A =$
$d \log b - d \log a - d \log 2$

6. Nun ist aus (Trig S. XLVII. 1) den dortigen Winkel $a = \frac{1}{2} A$ gesetzt, $d \log \sin \frac{1}{2} A =$
$\frac{1}{2} B . d A \cot \frac{1}{2} A$

7. Ferner aus Trig S. XLVI (das dortige x hier $= a$ oder $= b$ gesetzt) $d \log a =$
$\frac{B\, da}{a}$; $d \log b = \frac{B\, db}{b}$

8. Weil die Zahl 2 als unveränderlich angesehen wird, so ist $d \log 2 = o$ (Trig S. XXX!)

9. Die Werthe (6. 7. 8.) in die Gleichung (5) substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{1}{2} d A \cot \frac{1}{2} A = \frac{db}{b} - \frac{da}{a} \text{ oder}$$

$$dA = 2\frac{db}{b} \text{ tang } \tfrac{1}{2}A - \frac{2da}{a} \text{ tang } \tfrac{1}{2}A$$

10. Aus welcher Gleichung man also die Veränderung des Winkels A findet, wenn man annimmt, daß die Seiten b, a, um die Werthe db, da falsch gemessen worden wären.

Nur ist zu bemerken, daß der Werth dA hier in Decimaltheilen des Sin. tot gefunden wird; Verlangt man diesen kleinen Winkel dA in Secunden, so muß man den Ausdruck rechter Hand des Gleichheitzeichens in (9) noch mit der bekanten Zahl 206264 multipliciren.

11. Wenn nun nach dieser Berechnung für dA ein bejahter Werth herauskömt, so zeigt dieses an, daß der Winkel A um dA wächst, wenn a, b, um db, da, wachsen. Kömt aber für dA etwas negatives heraus, so will dieses sagen, daß der Winkel A abnimmt, wenn sich a, b, um da, db verändern. (Trig S. XXIX)

12 Wenn die Schenkel CA = AB = a richtig gemessen worden wären, mithin da = o wäre, so hätte man bloß $dA = -\frac{2db}{b} \text{tang } \frac{1}{2}A$

13 Wäre aber CB = b richtig gemessen, und bloß die Schenkel CA, AB, um da zu groß

oder

oder zu klein gemessen worden, so hätte man db =o, also bloß

$$dA = -\frac{2da}{a} \text{ tang } \tfrac{1}{2} A$$

Ex. Gesetzt, der Winkel A solte genau = 60° seyn, und jeder Schenkel CA = AB = 5 Ruthen = 5000 Linien, so müste man CB genau = 2500 Linien nehmen. Ich will nun setzen, man habe im Abstecken der Linien CA, AB um 1 Linie, und eben so im Abstecken der Länge CB auch um 1 Linie gefehlet, und zwar alle Seiten zu groß gemessen, so hätte man in unserer Formel a = 5000; b = 2500; da = 1 db = 1; Dis gäbe demnach, den Fehler im Winkel A, oder

$$dA = (\frac{2}{2500} \text{ tang } 30° - \frac{2}{5000} \text{ tang } 30°) \; 206264''$$

$$= (\frac{1}{1250} \text{ tang } 30° - \frac{1}{2500} \text{ tang } 30°) \; 206264''$$

welches durch Logarithmen folgendergestalt berechnet wird

log 206264 = 5,3144252
log tang 30° = 9,7614394—10

5,0758646
log 1250 = 3,0969100

1,9789546

Hierzu gehöret die Zahl $\frac{2db}{b}$ tang $\frac{1}{2}$ A. 206264″ welche also 94″ beträgt; Eben so

log 206264 = 5,3144252
log tang 30° = 9,7614394—10

5,0758646
log 2500 = 3,3979400

1,6779246

Hierzu gehöret die Zahl $\frac{2da}{a}$ tang $\frac{1}{2}$ A. 206264″ oder 47″. Es ist also im gegebenen Exempel der Fehler im Winkel A oder dA = 94″ — 47″ = 47″

Es erhellet also, wenn in dem abgesteckten Dreyecke jede Seite nur um 1 Linie zu gros genommen worden wäre, dis im Winkel A schon einen Fehler von 47″ Secunden betragen würde.

Der Fehler könte aber noch weit beträchtlicher werden, wenn man annähme, daß die Seite CB

um 1 Linie zu groß, die Seiten CA, AB aber um 1 Linie zu klein gemessen worden wären; denn für diesen Fall wäre in obiger Formel der Werth von da negativ, dis gäbe demnach

$$dA = \frac{2db}{b} \text{tang } \tfrac{1}{2} A + \frac{2da}{a} \text{tang } \tfrac{1}{2} A$$

oder bey den angenommenen Werthen

$$dA = 94'' + 47'' = 141'' = 2'.21''$$

Der Winkel A würde also da, um beynahe $2\frac{1}{2}$ Minute unrichtig, und zwar zu groß werden.

14. Aus diesen Betrachtungen wird also zureichend erhellen; wenn man die Seiten des gleichschenklichten Dreyecks, nicht bis auf einzelne Linien genau abstecken kan, und das möchte auf dem Felde wohl ziemlich schwer seyn, so ist der Winkel A auch höchstens nur innerhalb 2 bis 3 Minuten als richtig anzunehmen Vorausgesetzt daß A nicht grösser als etwa 60°, und die Schenkel CA, AB, 5 Ruthen groß genommen werden; denn es erhellet, daß dA noch beträchtlicher würde, als in dem gegebenen Beyspiele, wenn man den Winkel A grösser als 60° und a kleiner als 5 Ruthen nähme.

15. Je grösser man a, b, nimt, desto kleiner werden die Grössen $\frac{db}{b}$, $\frac{da}{a}$, für einerley db, und da; desto kleiner wird also auch dA oder der Fehler im Winkel A; Man könte also glau-

glauben, wenn man die Seiten des Dreyecks, CA, und AB sehr groß machte, daß alsdann der Winkel A mit grösserer Zuverläßigkeit abgesteckt werden würde: Allein man muß überlegen, daß alsdenn bey Absteckung sehr langer Linien, auch grössere Fehler vorfallen, mithin die Werthe von ab, da, auch beträchtlicher werden; folglich dem ohnerachtet in dem Winkel A keine grössere Schärfe zu erwarten stehet.

V. Vorausgesetzt also, daß vermittelst des bisherigen Verfahrens der Winkel A höchstens bis auf 2 Minuten genau abgesteckt werden könte; würde man, indem man A mit dem Werkzeuge mäße, wohl kleinere Fehler des eingetheilten Randes entdecken, als die, welche innerhalb 2 Minuten enthalten sind? Keinesweges: wenn man auch sonst in Stellung des Werkzeugs und Beobachtung des Winkels noch so vorsichtig verführe, so bliebe man doch immer innerhalb 2 Minuten in der Prüfung des Bogens auf dem Rande, ungewis.

In dem einzigen Falle wo A nicht sehr groß ist, z. E. nur 5 bis 10 Grad beträgt, lässet das bisherige Verfahren einige Genauigkeit zu. Denn, wenn man da auch kleine Fehler im Abstecken der Linien CA, CB, AB, begienge, so würden sie auf den Winkel A doch nicht so grossen Einfluß haben, als wenn A z. E. 80 oder mehrere Grade hielte,

wie

wie auch aus der für dA gefundenen Formel erhellet, wo offenbar dA abnimt, wenn A kleiner wird.

Wenn man also nur einen kleinen Bogen des Randes prüfen will, so mag man sich der bisherigen Methode bedienen — In andern Fällen verstattet sie aber nie die gehörige Schärfe und leistet mit weit mehrerer Mühe kaum die Genauigkeit eines mäßig richtigen Stangenzirkels.

Anmerkung

§ 168. Die bisher beschriebenen Methoden mögen einigermaaßen zeigen, was man bey Prüfung des eingetheilten Randes eines Winkelmessers zu beobachten hat — Man wird leicht begreifen, daß diese Arbeit oft mit ziemlicher Mühe verbunden ist, und eine sehr grosse Sorgfalt des Geometers erfordert. Indessen kan ich aus Erfahrung versichern, daß die erwähnten Prüfungsmethoden, mit einander verbunden, sicher zum Endzweck führen, da ich so wohl bey Prüfung geometrischer als astronomischer Werkzeuge mich derselben bedient habe.

Wie übrigens sowohl die gehörige Grösse des Vernierbogens, als auch die Abtheilungen desselben geprüft werden können, davon werde ich

weiter

weiter nichts beybringen, da einem jeden, der das bisherige wohl verstanden hat, und auszuüben weiß, leicht Mittel einfallen werden, die bereits berichtigten Theilpunkte des Randes, zu Berichtigung der Vernierabtheilungen zu gebrauchen.

Ob die Indices der beyden Vernierabtheilungen in einer einzigen geraden Linie liegen, die durch des Werkzeugs Mittelpunkt gehet, davon kan man sich versichern, wenn man die Indices an solche Theilstriche der beyden Abtheilungen des Randes bringt, die vermöge der Natur dieser beyden Eintheilungen, in eine gerade Linie fallen müssen, dergleichen sind z. E. auf der 96 Theilung die Theilstriche

0, 16, 32, 48, 64, 80, 96 u. s. w.

welche mit folgenden Theilstrichen der 90 Theilung

0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, u. s. w.

in der Ordnung, wie sie hier unter einander stehen, in eine einzige gerade Linie fallen, vorausgesetzt, daß die ersten beyden 0, 0, in einer einzigen geraden Linie liegen; bringt man also den Index des V. der 90 Theilung nach der Ordnung an die Theilstriche 0, 15, 30 u. s. w. so wird der Index des V. der 96 Theilung, genau an die Theilstriche 0, 16, 32 u. s. w. der 96 Theil. passen müssen, wenn die Indices in einer geraden Linie liegen,

gen, und übrigens, wie dabey zum vorausgesetzt wird, die oberwähnten Theilstriche des Randes an sich nicht fehlerhaft sind, welches wo nicht bey allen, doch wenigstens bey den meisten, immer angenommen werden kan.

Wie man untersuchen könne, ob ein Winkelmesser excentrisch sey.

§. 169. Diese Untersuchung anzustellen, weiß ich kein anderes Mittel, als daß man die Probe macht, ob der Bogen, der die Vernierplatte begränzt, von dem Bogen des eingetheilten Randes immer gleich großen Abstand habe, mithin bey Umdrehung der Alhidadenregel, dem Bogen des Randes vollkommen parallel bleibe. Den Abstand zwischen dem Vernierbogen, und dem Umkreis des Randes kann man sehr genau mit einem Haarzirkel fassen, und demnächst gar leicht prüfen, ob dieser Abstand in jeder Lage des Vernierbogens durch den ganzen Umkreis des Winkelmessers, sich immer gleich verbleibt.

Geschiehet dieses, so wird sich die Alhidadenregel, um den wahren Mittelpunkt des Randes drehen —

Im Gegentheile aber, muß man durch Versuche ausmachen, an welchen Stellen des Randes, der erwähnte Abstand am grösten oder kleinsten ist; dies giebt Mittel, die Grössen

c, α (§. 96) ausfindig zu machen, mithin die bey einem excentrischen Werkzeuge jedesmahl vorzunehmende Correction zu bestimmen. Ich will mich aber bey dieser Untersuchung nicht länger aufhalten, weil ich dem Mechanico die Geschicklichkeit zutrauen kan, die Bewegung der Alhidadenregel um den wahren Mittelpunkt zu verantstalten.

Wenn man aber ein Werkzeug selbst theilen will, so muß man vorher aus der Platte des einzutheilenden Winkelmessers das runde Loch O (Fig. XIX) bohren lassen, in welches der konische Zapfen (§. 99; 1) kömt, um den sich die Alhidadenregel drehet — Nun lässet man ein eben so grosses rundes Stück Messing R, in gleicher Dicke mit der Platte des Winkelmessers, drehen, dergestalt daß R genau die Oefnung O ausfüllt; bestimmet hierauf durch einen feinen Punkt r genau den Mittelpunkt auf der Scheibe R, und wenn man nun den Umkreiß auf die Platte des Winkelmessers reissen will, so befestigt man dieselbe durch ein paar Handschrauben, auf einen Tisch, oder sonst einer ebenen Fläche, füllt alsdann die Oefnung O mit der Scheibe R aus, und reiset demnächst aus dem Mittelpunkt r, den Umkreis abchma des einzutheilenden Winkelmessers.

Auf diese Art kan man überzeugt seyn, daß der Mittelpunkt des eingetheilten Randes, auch

zugleich der Umdrehungspunkt der Alhidadenregel seyn werde. Dieses Verfahren ist offenbar nothwendig, weil es sonst kaum möglich seyn wird, eine genaue centrische Bewegung der Alhidadenregel zu erhalten; Wolte man das Zapfenloch O erst nachher bohren, wenn der Umkreis des Randes schon gerissen, und getheilt ist, so wird man es nie ohne grosse Mühe und Sorgfalt, dahin bringen, daß der Mittelpunkt dieses Lochs, mit dem Mittelpunkte des eingetheilten Randes einerley sey.

Diese nöthige Bemerkung, muß dem Verfahren des 89 Ses noch beygefügt werden.

Uebrigens ist die Untersuchung, ob ein Winkelmesser genau centrisch sey, nothwendig vorher vorzunehmen, ehe man an die Prüfung der Abtheilungen des Randes schreitet, denn man wird leicht begreiffen, daß bey einigen Prüfungsmethoden die centrische Bewegung der Alhidadenregel schlechterdings zum voraus gesetzt wird, oder daß man wenigstens die aus der Excentricität herrührenden Fehler, kennet, und sie nicht den Abtheilungen des Randes schuld giebt.

XIV. Kapitel.

Noch einige Mittel, besonders kleine Winkel auf dem Felde zu messen.

§. 170. Wir haben zwar bereits verschiedene Mittel kennen gelernt, kleinere Winkel zu bestimmen, als bloß solche, welche die Abtheilungen des Randes angeben; hieher gehörten, Vernier, und Micrometerschraube.

Man pflegt aber oft, bey geometrischen Werkzeugen, eine besondere Gattung von Micrometern in die Fernröhre anzubringen, wie z. E. Herr Mechanicus Brander und andere Künstler thun, wodurch sie ihren Werkzeugen ohnstreitig einen noch grössern Grad von Vollkommenheit geben — Wenn man aber dergleichen Micrometer gleich nicht in das Fernrohr eines Winkelmessers anbringen will, weil dergleichen Fernröhre oft zu klein sind, so wird doch sonst ein anderes grösseres Fernrohr ohne Verbindung mit einem Winkelmesser, mit einem dergleichen Micrometer versehen, bey Feldmesser arbeiten oft mit sehr großen Nutzen gebraucht werden können. Und ich kan daher nicht umhin auch kürzlich hiervon die wesentlichsten Begriffe beyzubringen.

Vor-

Vorher muß ich aber einige dioptrische Lehnsätze davon man die Beweise in Hrn. H. Kästn. angew. Math. findet, vorausschicken.

Dioptrische Lehnsätze.

§. 171. I. Wenn man auf ein, auf beyden Seiten erhaben geschliffenes Glas AB (Fig XXII), Strahlen, von verschiedenen Punkten P, Q, eines gewissen Gegenstandes, der von dem Glase entfernt ist, fallen läst, so werden alle Strahlen die z. E. von P auf das Glas fallen, sich hinter dem Glase in einem bestimmten Punkte p vereinigen, und daselbst das Bild des Punktes P darstellen; Auf eben die Art kommen alle Strahlen von Q, hinter dem Glase bey q zusammen, und geben daselbst des Punktes Q Bild; Und so hat überhaupt ein jeder Punkt des Gegenstandes PQ, hinter dem Glase AB, sein eigenes Bild; dergestalt, daß alle Bilder der einzeln Punkte eines Gegenstandes PQ, hinter dem Glase das ganze Bild desselben darstellen werden. Man kan sich hievon durch eine leichte Erfahrung versichern, wenn man in einem Zimmer, hinter das Glas AB in gehöriger Entfernung ein Blatt Papier hält; so werden sich auf demselben, die Gegenstände, die von aussen Strahlen auf das Glas schicken, abmahlen, und zwar verkleinert erscheinen — Die gehörige Weite des Blatt Papieres muß man durch Ver-

suche ausmachen — Eben diese Erscheinungen sind die Gründe von der sogenannten Kamera obscura.

Diese Sätze gelten auch vom Planconvexglase und einem Mesnico. (Kästn. Diopt. 22. u. f.)

Man wird zugleich bemerken, daß sich das Bild eines Gegenstandes, auf dem Papiere in umgekehrter Lage darstellet, dergestalt, daß dasjenige was an dem Gegenstande zu oberst ist, in dem Bilde unten erscheinet, und eben so die rechte Seite des Bildes, der linken des Objects zugehöret.

II. Es läst sich leicht beweisen, daß, wenn P ein gewisser Punkt des Gegenstandes ist, dessen Bild p ohne merklichen Fehler in einer geraden Linie Pcp liege, die man durch P und des Glases c Mittelpunkt ziehet. Und eben so, daß q in der geraden Linie Qcp liege, daß ferner auch alle Bilder eines Gegenstandes PQ, ohne Irrthum ohngefähr in gleicher Weite hinter dem Glase AB liegen.

III. Die Linie rcR die auf dem Glase durch den Mittelpunct c senkrecht stehet, heist die Axe des Glases, und wenn der Punkt R des Objects in der Axe des Glases liegt, so wird auch dessen Bild r sich in der Axe des Glases befinden.

IV.

IV. Man wird ferner die Bemerkung machen, daß eines von dem Glase entferntern Gegenstandes Bild, näher hinter dem Glase liegt, als das Bild eines nahen Gegenstandes. Daß z E das Bild der Sonne nicht so weit vom Glase liege als das Bild eines von dem Glase nur etwa um 50 Fuß entlegenen Objects.

V. Das Bild eines von dem Glase unendlich weit entfernten Gegenstandes, wird am nächsten hinter dem Glase liegen, und die Stelle dieses Bildes heist der **Brennpunct des Glases**, die Weite desselben vom Glase, die **Brennweite**.

Die Bilder der Sonne oder Fixsterne, die man ohne Irrthum, als unendlich weit entlegene Objecte ansehen kan, würden also hinter dem Glase, den Brennpunct, und folglich auch die Brennweite angeben, die man daher durch Versuche finden und messen kan. Sonst hängt aber auch die Brennweite, von der Krümmung des Glases, d. h. von den Halbmessern der Kugelflächen ab, die die Gränzen des Glases bestimmen — Daher ein jedes Glaß seine eigene Brennweite hat.

In Herrn Hofrath Kästners Dioptr. (22) findet man eine Formel, welche die Brennweite, aus den Halbmessern der Kugelflächen bestimmt, die das Glas auf beyden Seiten begränzen. Die

Dicke des Glases ist dabey nicht in Betrachtung gezogen, welches auch meistens beym Gebrauch der Gläser zu Fernröhren, verstattet ist.

VI. Wenn die Brennweite eines Glases durch Versuche oder sonst als bekannt angenommen wird, so kan man daraus die Weite des Bildes eines vor dem Glase in endlicher Weite liegenden Objects, durch Rechnung finden. Man nenne die Brennweite eines Glases $= l$, die Entfernung eines Objects von dem Glase $= b$, und die Weite dessen Bildes hinter dem Glase $= f$, so wird seyn

$$f = \frac{bl}{b - l}$$ (Kästn. Dioptr.)

Ex. Gesetzt es sey die Brennweite eines Glases $l = 8$ Zoll; $b = 5$ Fuß $= 50$ Zoll, so ist

$$f = 9\frac{1}{2} \text{ Zoll.}$$

Es würde also das Bild eines um 50 Zoll entfernten Gegenstandes, um $1\frac{1}{2}$ Zoll weiter vom Glase liegen, als der Brennpunkt, oder der Ort des Bildes, eines unendlich weit weg liegenden Objects.

Für $l = 8$ Zoll; $b = 1000$ Zoll, würde $f = 8,06$ Zoll. Das Bild eines um 1000 Zoll vom Glase entfernten Gegenstandes, würde

also bey einer Brennweite von 8 Zollen, nur um 0,06 eines Zolles weiter vom Glase liegen als der Brennpunkt. — Da nun dieser Unterschied sehr geringe ist, so erhellet, daß man ohne merklichen Fehler, den Brennpunkt selbst, als den Ort der Bilder von solchen Gegenständen, die zwar nicht unendlich weit, sondern nur in mäßiger Entfernung vor dem Glase liegen, ansehen könne.

VII. Wenn PQ auf der Axe rcR senkrecht stehet, so wird auch dessen Bild pq, auf der Axe senkrecht stehen.

VIII. Wenn man sich bey c ein Auge vorstellet, so siehet es den Gegenstand PR unter dem Winkel PcR. Das wäre also die scheinbare Grösse eines Gegenstandes, den man mit blossem Auge, aus dem Punkte c betrachtete.

Wenn nun PR auf cR senkrecht angenommen wird, so kan man in dem rechtwinklichtem Dreyecke pcr (VII) aus der gegebenen scheinbaren Grösse PcR = pcr = α, und aus der Weite rc des Bildes, hinter dem Glase, die Grösse rp des Bildes finden. Denn wenn man rc = f; rp = h nennet, so ist für den Sin. tot. = 1

rc: rp = 1 : tang rcp also

h = f. tang α.

Hieraus folgt, daß die Bilder gleich weit entlegener Objecte, sich wie die Tangenten der scheinbaren Grössen verhalten. Sind aber die scheinbaren Grössen einerley, so verhalten sich die Bilder wie f, oder wie ihre Weite hinter dem Glase. Da nun f abnimmt, wenn des Objekts Weite vor dem Glase wächst (VI) so erhellet, daß das Bild eines entferntern Gegenstandes kleiner sey, als eines nähern, von eben der scheinbaren Grösse.

IX. Da alle Bilder sehr weit entlegener Objecte beynahe in den Brennpunkt fallen, (VI) so kan man überhaupt $f = l$ setzen, und also annehmen, daß, wenn eines Glases Brennweite $= l$ ist, und die scheinbare Grösse, eines vom Glase mäßig weit wegliegenden Objects $= \alpha$, die Grösse des Bildes hinter dem Glase seyn werde $= l . \tang \alpha$.

X. Und wenn überdem, wie gewöhnlich der Winkel PcR oder die scheinbare Grösse α nicht sehr groß ist, folglich ohne Fehler $\tang \alpha = \alpha$ gesetzt werden kan, so wird seyn die Grösse des Bildes $= l . \alpha$.

In den folgenden Betrachtungen, werde ich nun immer zum Voraus setzen, daß das Object PR, so weit vom Glase liege, daß man ohne

Feh-

Fehler die Weite des Bildes rc hinter dem Glasse, der Brennweite gleich setzen kan.

XI. Es stelle nun LMAB die Röhre eines nach PR gerichteten astronomischen Fernrohres vor. AB dessen Objectiv, und mn dessen Ocular. Beyde Gläser übrigens so gestellt, daß ihre Aren in eine gerade Linie fallen, und des Oculars Brennpunkt in des Objectivs Brennpunkt liege. (Kästn. Dioptrick.) So wird ein Auge O vor dem Ocularglase mn, das Bild qp eines Objects QP, in dem Fernrohre sehen, und zwar 1) verkehrt 2) vergrössert, so daß dem Auge O, der Gegenstand QP in dem Fernrohre weit näher und grösser zu seyn scheinet, als er demselben ohne Fernrohr scheinen würde.

Die Vergrösserung hängt nun von dem Verhältnis der Brennweite des Objectivs zur Brennweite des Oculars ab, und es läst sich leicht darthun, daß eines Fernrohres Vergrösserung herauskomme, wenn man die Brennweite des Objectivs mit der Brennweite des Oculars dividirt. Nennet man also erstere $=1$, letztere $=\lambda$ so ist des Fernrohres Vergrösserung $=\frac{1}{\lambda}$

Siehet daher das blosse Auge bey O den Gegenstand QP, unter der scheinbaren Grösse φ,

so siehet es diesen Gegenstand durchs Fernrohr unter dem Winkel $\frac{1}{\lambda} \cdot \varphi = W$

Wäre eben so, eines anderen Gegenstandes QS, den man mit blossem Auge betrachtete, scheinbare Grösse $= \psi$ so würde dessen scheinbare Grösse im Fernrohre $= \frac{1}{\lambda} \psi = w$.

Also $W : w = \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi : \frac{1}{\lambda} \psi = \varphi : \psi$

D. h. die scheinbaren Grössen der Gegenstände durchs Fernrohr betrachtet, verhalten sich wie derselben scheinbare Grössen ohne Fernrohr, so vielmahl folglich, dem blossen Auge ein Object grösser aussiehet als das andere um soviel mahl erscheinet auch im Fernrohre das erste Object grösser als das andere, vorausgesetzt, daß beyde Objecte weit genug vom Fernrohre wegliegen, und folglich die Stellen ihrer Bilder auch ohne merklichen Irrthum, mit dem Brennpunkte in gleicher Weite hinter dem Glase angenommen werden können.

XII. Es seyen QS, PQ ein paar Objecte vor dem Fernrohre und ihre scheinbare Grössen QcS $= \psi$; QcP $= \varphi$;

qs,

qs, qp ihre Bilder; OcR des Fernrohrs Axe, senkrecht auf PQ; l des Objectivglasses Brennweite; so ist aus (X)

$pr = l.PcR$; $qr = l.QcR$; $rs = l.ScR$

Daher

$pq = pr + rq = l.(PcR + QcR)$

oder

$pq = l.PcQ = l.\phi$

Auf eben die Art

$qs = qr + rs = l.(QcR + ScR)$

oder $qs = l.QcS = l.\psi$

daher $pq : qs = l.\phi : l\psi = \phi : \psi$

D. h. die Bilder pq: qs, zweyer Objecte PQ, QS, verhalten sich wie dieser Objekte scheinbare Grössen, oder wie die Winkel, QcP, QcS am Objectivglase.

XIII. Bisher war PQ auf cR senkrecht angenommen. Man nehme an, PV sey ein auf der verlängerten Axe des Fernrohres schief stehendes Objekt, p das Bild von P und q das Bild von Q, so wird auch q, das Bild von V seyn, wenn c, Q, V in gerader Linie liegen; Denn obgleich V etwas weiter vom Fernrohre liegt als Q, mithin das Bild von V etwas näher hinter dem Glase AB liegen muß, als das Bild von Q, so kan man doch den Unterschied völlig aus der Acht lassen, so bald Q, V, in beträchtlicher Weite vor dem Glase AB liegen, (IX) mithin ohne den merk-

merklichsten Irrthum annehmen, daß auch q das Bild von V, mithin pq auch das Bild von dem schiefstehenden Objekte PV sey, welches mit dem senkrechten PQ, gleiche scheinbare Grösse PcQ = PcV hat.

Hieraus wird also allgemein erhellen, daß die Grösse eines Bildes qp, bloß von dem Winkel oder der scheinbaren Grösse PcQ abhängt, das Objekt PQ mag nun auf der Axe des Fernrohres senkrecht stehen oder nicht.

XIV. Aus (X. XI) folgt auch W: $w = pq : qs = \varphi : \psi$

D. h. Die Bilder pq, qs, durchs Ocularglas betrachtet, erscheinen dem Auge noch in der Verhältnis, der scheinbaren Grössen PcQ QcS. Das Ocular ändert also in dem sichtbaren Verhältnis der Bilder nichts, ob es gleich jedes Bild vergrössert darstellet.

Wie man die bisherigen Sätze zur Ausmessung kleiner Winkel auf dem Felde gebrauchen könne.

§. 172. I. Weil die Bilder pq, qs, zweier Objekte sich wie die Winkel PcQ, QcS verhalten, so erhellet, daß wenn man die Grösse des Bildes pq weis, das einem gegebenen Winkel $PcQ = \varphi$ zukömt, man aus der gegebenen Grösse eines andern Bildes qs den zugehörigen Winkel

QcS

QeS = ψ, durch folgende Proportion qp: qs = φ: ψ, woraus denn $\psi = \frac{qs}{qp} \cdot \varphi$ folgt, berechnen könne.

Gesetzt man wüste, daß, wenn die scheinbare Grösse φ = 60 Min. wäre, das zugehörige Bild qp z. E. 50 Theile eines gewissen Maasstabes hielte; so würde einem andern Bilde qs, das z. E. 12 Theile dieses Maasstabes faste, eine scheinbare Grösse oder ein Winkel ψ von $\frac{12}{50} \cdot 60$ oder von 14 $\frac{2}{5}$ Minuten zugehören.

II. Es erhellet also, daß es nur darauf ankomme, an der Stelle des Fernrohres, wo sich die Objecte abbilden, eine Vorrichtung zu treffen, wodurch sich bequem das Verhältnis der Bilder wie qs: qp bestimmen läst, und dann durch einen Versuch ausfindig zu machen, wie gros das Bild sey, dem eine gegebene scheinbare Grösse oder Winkel zugehört.

Diese Absicht zu erreichen, hat man sich schon seit langer Zeit der Schrauben bedient.

Wenn man sich vorstellet, das in der Gegend, wo des Ocularglases Brennpunkt liegt, ein paar Schrauben mit feinen Gängen, durch die Röhre des Ocularglases gehen, die man beyde ins Feld

des Fernrohres weiter herein und heraus schrauben, und einander selbst bis zum Zusammenstossen nähern kan, so erhellet folgendes — Wenn die Röhre des Ocularglases in die Röhre des Objectivs so weit hinein geschoben worden, daß des Oculars Brennpunkt, und folglich auch die erwähnten Schrauben, an die Stelle hinkommen, wo sich im Fernrohre die Gegenstände abbilden, so wird man zwischen beyde Schraubenenden das Bild eines Gegenstandes fassen, und wenn man demnächst beyde Schrauben einander bis zum Zusammenstossen nähert, die Menge von Umdrehungen zählen können, die auf eines Gegenstandes Bild gehen. Sind nun die Schraubengänge von gleicher Weite, so werden sich die Grössen zweyer Bilder verhalten, wie die Mengen von Schrauben Umdrehungen, die auf sie gehen, und so wird das Verhältnis zweyer Bilder dadurch bekant seyn.

Die Vorrichtung selbst bestehet in einem messingenen Ringe N (Fig XXIII) der in der Gegend des Brennpunkts vom Oculare, um die Röhre des Oculars gelegt wird; Dieser Ring ist an beyden Enden eines Durchmessers durchbohrt, und daselbst mit Schraubenmuttern versehen, die den Schrauben fh, lk, zugehören. — Damit man nun diese Schrauben in das Feld des Fernrohres herein und herausschrauben könne, so hat die Röhre des Oculars bey a, b, (Fig XXII)

in

in der Gegend des Brennpunkts gleichfalls ein paar Oefnungen, wodurch alsdenn die Schrauben fh, lk gehen, nachdem der Ring um das Fernrohr gelegt worden. Uebrigens müssen die Schraubengänge so wohl auf fh als lk genau gearbeitet und so viel als möglich gleiche Weite haben, damit man die Umdrehungen der einen Schraube, zu der andern ihren rechnen könne, als ob sie alle an einer Schraube wären.

E, e, sind ein paar Scheiben, mit Abtheilungen versehen, damit man durch Hülfe der Weiser f, l, die an den Köpfen der Schrauben fh, lk, befestigt sind, Theile von Umdrehungen zählen könne.

III. Gesetzt nun, nachdem die bisherige Vorrichtung gehörig um das Fernrohr gelegt worden, so werde das Objekt PQ durch dieses Fernrohr betrachtet. pq sey das Bild von PQ, und die Schrauben in der Gegend dieses Bildes. Man schraube sie so weit ins Feld des Fernrohrs, daß zwischen ihren beyden Enden das Bild qp des Objekts QP erscheinet; Damit man nun finde, wie viel Umdrehungen, auf die Grösse des Bildes qp gehen, so schraube man beyde Schrauben fq, lp weiter herein, bis sie zu ammenstossen. Sind nun zu dieser Absicht bey dem Bilde qp z. E. 24 Umdrehungen, und auf eben die Art bey einem andern Bilde qs 20 Umdrehungen

gen nöthig, so ist das Verhältnis der beyden Bilder qp: qs = 24: 20.

In eben der Verhältnis stehen nun auch, die diesen Bildern zugehörigen scheinbaren Grössen PcQ; ScQ;

IV. Wüste man nun z. E. die scheinbare Grösse, die einer Umdrehung der Schrauben zugehörte, so hätte man demnächst gar leicht die scheinbare Grösse eines Objekts, dessen Bilde eine gewisse Menge von Umdrehungen zukäme.

Um nun den einer Umdrehung zugehörigen Winkel zu finden, giebt es verschiedene Mittel.

Den Werth der Umdrehung aus der Brennweite des Objectivs und der Weite der Schraubengänge zu finden.

§. 173. Gesetzt die Schraube f h oder lk (Fig XXIII) halte in der Länge eines Zolles, oder einer andern Länge die ich = a nennen will, eine gewisse Anzahl von Schraubengängen, die n heissen mag, so ist die Weite eines Schraubenganges = $\frac{a}{n}$, vorausgesetzt, daß alle Gänge gleich weit sind.

II.

II. Es sey nun Fig XXIV, υw, die Weite eines Schraubenganges, und bey w des Objectivs Brennpunkt; c das Mittel des Objectivs AB, so gehöret diesem Schraubengang υw, oder einem Bilde dessen Grösse der Weite eines Schraubengangs gleich wäre, eine scheinbare Grösse $\upsilon cw = xck$ zu.

Heist also die Brennweite des Objectivs $= l$, der kleine Winkel $\upsilon cw = \alpha$; so ist (§. 171. X) $\upsilon w = l . \alpha$

Aber auch $\upsilon w = \frac{a}{n}$ (I) daher $\frac{a}{n} = l . \alpha$;

folglich $\alpha = \frac{a}{n . l}$; woraus man also die scheinbare Grösse α findet, die der Weite eines Schraubenganges, oder einer Umdrehung der Schraube zugehöret.

Dabey ist aber zu erinnern, daß man den Werth $\frac{a}{n . l}$ noch mit der Zahl 206264 multipliciren müsse, um α in Secunden zu finden; Also

$$\alpha = \frac{a}{n . l} . 206264 \text{ Secunden.}$$

Ex. Gesetzt es sey die Brennweite l = 78,66 reinl. Zolle, die Schraube halte in einer Länge = a = 1,69 reinl. Zolle, n = 45,5 Gänge, so ist, wenn ich 206264 = e nenne

log a = 0,2278867; log n = 1,6580114
log e = 5,3144251; log l = 1,8957554

log a. e = 5,5423118; log n. l = 3,5537668
log n. l = 3,5537668

log α = 1,9885450; Daher α = 97″,39

mithin betrüge ein Schraubengang oder der Werth einer Umdrehung 1′ 37″,39

Dis Exempel befindet sich in H. H. Kästn. Astron. Abh. II Saml. pag 313 und gehöret zu einem Fernrohre, mit einem dergleichen Schraubenmicrometer, welches Hr. Opt. Baumann verfertigt hat.

Den Werth einer Umdrehung aus der scheinbaren Grösse eines Gegenstandes PQ zu finden, dessen Entfernung cR = b, vom Objective bekant ist.

§. 174. I. Es sey PQ ein auf dem Felde vertical aufgerichteter Stab in ziemlich beträchtlicher Weite von dem Objective; die Axe des Fernrohrs sey nach dem Augenmaasse horizontal nach PQ gerichtet, dergestalt, daß man ohne Irrthum das Dreyeck PcQ als gleichschenklicht

ansehen, und Pc=Qc=Rc=b setzen kan. Der Stab PQ sey von P nach Q in Zolle u. s. w. eingetheilet; pq im Fernrohre das Bild von PQ, und die Schrauben so weit hereingeschroben, daß, das Bild pq, zwischen beyden Schraubenenden enthalten ist.

Man untersuche nun, wie viel Schraubengänge diesem Bilde qp zugehören, welches dadurch geschiehet, daß man die Schraubenumdrehungen zählt, die man nöthig hat, beyde Schraubenenden einander bis zum Zusammenstossen zu nähern. Ich will also setzen, dem Bilde pq gehöre auf dem Stabe eine Grösse PQ von m Zollen zu, und man habe n Umdrehungen gezählet, beyde Schraubenenden einander um die Entfernung pq zu nähern. Weil nun der Winkel PcQ immer nur klein ist, so kann man ohne merklichen Fehler PcQ oder die scheinbare Grösse

$$\varphi = \frac{PQ}{Rc} = \frac{m}{b}$$

setzen (die Weite Rc=b nemlich auch in Zollen ausgedrückt.) Aber dem Bilde pq, folglich der scheinbaren Grösse pcq, oder PcQ gehören n Umdrehungen der Schraube zu — Also ist der

Werth einer Umdrehung $= \frac{\varphi}{n}$ oder $= \frac{m}{b.n}$ 206264

Secunden, nemlich an der Stelle, wo

des Gegenstandes PQ Bild pq liegt, und wo sich in dem Fernrohre auch die Schrauben befinden müssen.

II. Da aber der Ort des Bildes pq nicht immer genau in eine und dieselbe Stelle des Fernrohres fällt, sondern weiter oder näher beym Objectivglase liegt, nachdem PQ näher oder entfernter ist (§ 171 IV.) folglich auch für einerley scheinbare Grösse, die Länge Bildes desto grösser oder kleiner ist, je weiter oder näher es hinter das Objectiv fällt, so erhellet daß auch der in (I) gefundene Werth einer Umdrehung, nicht, ohne einigen Fehler zu begehen, für alle möglichen Bilder gelten kan, sondern nur für solche, die zu Objekten gehören, die in der Weite b vor dem Objektive liegen — Um aber doch alle nöthige Genauigkeit zu beobachten, und um den nach (I) gefundenen Werth einer Umdrehung auch für Bilder zu gebrauchen, die in jeder andern Weite hinter das Objectivglas fallen, so muß ich noch folgendes kürzlich beybringen.

II. Gesetzt (Fig XXV) das Bild eines entferntern Gegenstandes, den ich M nennen will, liege in der Weite $cw = \lambda$, und das Bild eines nähern Gegenstandes N, in der Weite $cz = L$ hinter dem Objectivglasse —

Weil

Weil man nun, um die Objecte M, N, jedesmahl vollkommen deutlich in dem Fernrohre zu sehen, die Röhre des Ocularglases so weit in die Röhre des Objectivs schieben muß, bis des Oculars Brennpunkt, an die Stellen w, z, hinfällt, wo der Objecte Bilder sich befinden, so erhellet, daß auch die Schrauben des Micrometers sich jedesmahl an den Stellen der Bilder w, z befinden werden, indem sich diese Schrauben im Brennpunkte des Oculars befinden, mithin sich mit der Röhre des Oculars zugleich verschieben.

Man gedenke sich also bey w, z, die Weite eines Schraubenganges wυ=zy; so gehöret der wυ eine scheinbare Grösse υcw der yz aber eine scheinbare Grösse ycz zu. Da nun wυ=zy aber cz > w, so wird auch der Winkel υcw grösser seyn als zcy, und zwar ohne merklichen Irrthum in dem Verhältnis cz : cw oder L : λ. Woraus also erhellet, daß der Werth eines Schraubenganges, oder einer Umdrehung, d i die dem Schraubeng. zugehörige scheinbare Grösse ycz, oder υcw, von dem Orte der Bilder z, w, hinter dem Objektive, abhänge

Benennet man also die scheinbare Grösse υcw, oder den Werth eines Schraubenganges υw, der in der Weite cw=λ vom Objective abstehet, mit dem Buchstaben γ, und den Werth ycz eines Schraubenganges yz der sich an der Stelle ei-

nes um cz=L vom Objektive entfernten Bildes z befindet, mit dem Buchstaben δ, so ist γ : δ = L : λ daher $\delta = \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma$

III. Gesetzt also bey dem Versuche (I) habe das Bild qp (Fig XXII) des Stabes PQ in der Weite cr=λ hinter dem Objektive gelegen, und der Werth eines an der Stelle dieses Bildes befindlichen Schraubenganges sey $\gamma = \frac{\text{m. } 206264}{\text{b. n}}$ gefunden worden, (I) so wird der Werth eines Schraubenganges an dem Orte eines um den Abstand L vom Objective entfernten Bildes, $= \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma$ seyn; woraus man also gar leicht, wenn man nur jedesmal die Weite L des Bildes vom Objective weis, an der Stelle dieses Bildes den Werth eines, und folglich auch einer jeden Zahl von Umdrehungen finden kan, vorausgesetzt daß man durch einen Versuch wie in (I) ein für allemahl den Werth γ eines Schraubenganges weis, der in der Weite = λ vom Objective liegt.

IV. Gegenstände die sehr weit wegliegen, deren Bilder fallen in den Brennpunkt des Objectivs, für die ist also L = l wenn l die Brennw. bedeutet — Also ist der Werth eines Schraubenganges, an dem Orte der Bilder sehr weit ent-

entlegener Gegenstände $= \frac{\lambda}{l} \cdot \gamma$ den ich $= r$ nennen will.

Bey dem Versuche (I) habe nun das Objekt oder der Stab PQ um b Zolle vor dem Objektivglase gestanden, so ist $\lambda = \frac{bl}{b-l}$ (§. 171. VI) also $r = \frac{b}{b-l} \cdot \gamma = \frac{m\ 206264}{n\ (b-l)}$ Secunden. (III) Aus dieser Gleichung findet man also vermittelst eines Gegenstandes, der in der Weite b vor dem Objective stehet, den Werth r eines Schraubenganges, für Bilder sehr weit entlegener Gegenstände, für Bilder also, die in den Brennpunkt fallen.

Ex. Bey dem Fernrohre §. 173. hatte Hr. H. Kästner Astron. Abh. II Saml. p. 328) gefunden, daß auf einem verticalen um 15921,25 Leipziger Zoll von dem Objektivglase entfernten Stabe, eine Länge PQ von 110,6 Leipziger Zoll, ein Bild machte, dem in dem Fernrohre $14 + \frac{9,5}{12}$ Umdrehungen der Schraube zugehörten. Also ist bey diesem Versuche $m = 110,6$; $n = 14 + \frac{9,5}{12} = \frac{88,75}{6}$; $b = 15921,25$; $l = 78,66$ reinl. Zoll $= 87$ Leipz. Zoll; folglich $b - l =$ 15834,25 Leipz. Zoll, mithin

$$r = \frac{6.110,6.206264}{88,75 \cdot 15834,25}$$

dies giebt nach gehöriger Rechnung

den Logarithmen des Zählers = 8,1363485
des Nenners = 6,1477658

demnach log r = 1,9885827

mithin r = 97″,4 = 1′.37″,4 welches sehr genau mit dem Versuche des 173 §. übereinstimmt.

V. Man könte nun aus dem Werthe einer Umdrehung, für Bilder die in des Fernrohrs Brennpunkt fallen, gar leicht den Werth jeder Menge von Umdrehungen ein für allemahl berechnen, und davon eine Tafel verfertigen; Wenn man nun vermittelst des Fernrohrs, scheinbare Grössen sehr weit entlegener Gegenstände, messen wolte, so dürfte man nur, durch Verschiebung der Röhre des Oculars, die Schrauben in den Brennpunkt des Objectivs bringen, und dann zusehen, wie viel Umdrehungen dem Bilde des sehr weit entlegenen Objekts zukämen — Die gefundene Menge von Umdrehungen in der Tafel aufgesucht, gäbe sogleich ohne weitere Rechnung die zugehörige scheinbare Grösse.

Es verstehet sich, daß man nicht nöthig hat, mehrere Vielfache einer Umdrehung zu berechnen, als erfordert werden, den grösten Winkel zu erhalten, den man etwa im Fernrohre übersehen kan.

VI.

VI. Da diese Tafel nur die scheinbaren Grösſen der Bilder giebt, die in des Fernrohrs Brennpunkt fallen, also in der Weite = l vom Objektive liegen, so hat man noch eine besondere Rechnung nöthig, wenn nahe liegender Gegenstände, deren Bilder also nicht in den Brennpunkt fallen, scheinbare Grösſen gemeſſen werden sollen.

Wenn der Werth eines Schraubenganges für ein Bild im Brennpunkte, r heiſt, so ist der Werth w eines Schraubenganges, an dem Ort eines Bildes, das die Entfernung L vom Objektive hat $= \frac{l}{L} r$. Wenn also das Bild eines nahe vor dem Fernrohre liegenden Objekts, die Weite L hinter dem Objektive hat, und μ Umdrehungen auf dasselbe gehen, so ist ihr Werth oder die zugehörige scheinbare Grösſe

$= \mu . w = \frac{l}{L} . \mu . r$

D. h. Man hat nur nöthig, den Werth dieſer gefundenen Menge von Umdrehungen in der Tafel (V) aufzusuchen, und denselben mit dem Bruche $\frac{l}{L}$ zu multipliciren, um die scheinbare Grösſe des Objekts zu finden, deſſen Bild nicht in den Brennpunkt fällt.

VII. Eine Schwürigkeit scheinet es zu seyn, in jedem Falle ein leichtes Mittel zu haben, den Ort des Bildes also die Weite L zu finden — dieses Mittel bestehet nun darinnen.

Man untersuche, und bestimme ein für allemahl durch ein an die Röhre des Fernrohrs (Fig XXII) bey h gemachtes Zeichen, wie weit man die Röhre des Oculars in die Röhre des Objektivs schieben muß, um unendlich weite Gegenstände (z. E. die Sonne) vollkommen deutlich und begränzt zu sehen. In diesem Falle fällt das Bild in den Brennpunkt des Objektivs, und die Schrauben kommen durch die geschehene Verschiebung der Ocularröhre, gleichfalls an diese Stelle.

Da man nun in dieser Stellung der Gläser, nahe Gegenstände nicht vollkommen deutlich sehen wird, sondern die Röhre des Oculars weiter herausschieben muß, so untersuche man um wie viel die Röhre des Oculars weiter heraus geschoben werden muß, um ein nahes Objekt z. E. PQ, dessen scheinbare Grösse man messen wolte, vollkommen deutlich zu sehen — Man darf also nur zusehen, wo sich bey i die Röhre des Oculars endigt, nachdem sie zureichend herausgezogen worden, nnd den Raum ih messen, so drükt ih aus, um wie viel das Bild eines nahen Gegenstandes weiter vom Objektive fällt, als

das

das Bild eines sehr weit entfernten. Nennt man also ih $= x$ die Brennweite des Objectivs $= 1$, so ist $L = 1 + x$ also in (VI) $\mu . w = \frac{1}{1+x} . \mu . r$.

VIII. Ist das Objekt dessen scheinbare Grösse durch die Menge von Schrauben Umdrehungen gemessen werden soll, nur einigermassen weit vom Objektive entfernt, so kan man ohne merklichen Fehler in (VI) $L = 1$ also $\frac{1}{L} = 1$ setzen, folglich ohne weitere Multiplication die scheinbare Grösse sogleich aus der Tafel (V) nehmen.

Eine andere Vorrichtung die Grössen der Bilder, oder vielmehr ihre zugehörigen scheinbaren Gr. zumessen.

§. 175. I. Es sey Fig XXVI xuyz ein messingener Ring, oder eine Röhre, die ein eben geschliffenes Glas umfasset. Diese Röhre kan in die Röhre des Ocularglases geschroben werden, so daß die Ebene des Glases xuyz in den Brennpunkt des Oculars zu liegen kömmt, und übrigens auf der Axe des Fernrohrs senkrecht stehet.

Auf diesem ebengeschliffenem Glase, ist nun ziemlich nahe nebeneinander, eine ganze Reihe von sehr zarten Parallellinien gezogen, die

von

von einer senkrechten vz durch den Mittelpunkt c durchschnitten werden. Die Entfernungen dieser Parallellinien müssen mit aller möglichen Vorsicht einander gleich seyn.

So erhellet, daß diese gleichweit von einander abstehenden Parallellinien, eben das mit geringerer Mühe leisten werden, was uns im vorhergehenden die Schraubengänge nützten. Man wird nemlich, nachdem dieses Glas mit Parallellinien durch gehörige Verschiebung der Ocularröhre, an den Ort gebracht worden, wo sich die Bilder entlegener Objekte versammlen, durch die Menge dergleichen Theile, die ein solches Bild wie qp auf dem Glase xuyz einnimmt, die diesem Bilde zugehörige scheinbare Grösse finden, vorausgesetzt daß man weiß, wie viel Minuten und Secunden, dem Abstande zwoer nächstauf einander folgenden Parallellinien zugehören Gesetzt zwischen q, p fielen 20 gleiche Theile, und einem Theile auf dem Glase, gehöre eine scheinbare Grösse von 1' zu so würde dem Bilde qp, und folglich dem zugehörigen Objecte eine scheinbare Grösse von 20 Minuten zukommen. Kleinere Theile, als diejenigen sind, welche unmittelbar auf dem Glase verzeichnet worden, muß man nach dem Augenmaaße schätzen, welches einem einigermasen geübten nicht schwer seyn wird, da ohnedem die Abtheilungen durch das Oculargias vergrössert erscheinen.

II. Es kömt also nur darauf an, den Abstand zwoer nächsten Parallellinien zu finden, nemlich in Minuten und Secunden.

Hierzu kan man sich nun völlig eben der Methoden bedienen, die wir in vorhergehenden §§ bey Untersuchung des Werthes eines Schraubenganges, gelehrt haben. Man darf nur in obigen §§ statt der Wörter **Schraubenumdrehung, Menge von Schraubenumdrehungen**, nur die Wörter **Zwischenraum oder Abstand zwoer nächsten parallelen; Menge von Zwischenräumen** u. s. w. setzen, so wird man gar leicht einsehen, wie alle vorhergehenden Regeln, sich auch auf diese Parallellinien anwenden lassen.

III. Es bedeute die Linie ik den Abstand der beyden äussersten Parallelstriche, l die Brennweite des Objectivs, so gehört dieser Weite ik eine scheinbare Grösse von $\frac{ik}{l}$. 206264 Secunden zu, die ich $= \alpha$ nennen will. In wie viel gleiche Theile muß man ik theilen daß einem Theile eine scheinbare Grösse von β Secunden zukomme? Man nenne die unbekannte Zahl der Theile $= x$ so soll seyn $\frac{\alpha}{x} = \beta$, oder $\frac{ik}{l.x}$. 206264 $= \beta$; dis giebt $x = \frac{ik}{l.\beta}$ 206264.

Er-

Ex. für $\beta = 60'' = 1'$ wäre $x = \frac{ik.3438}{l}$

dis dient also gleich anfangs bey Verzeichnung eines solchen Micrometers, dem Zwischenraume zwoer nächsten Parallelen ohngefähr eine scheinbare Grösse von 1 Minute zu verschaffen, und dis ist eine schickliche Grösse für den Abstand zwoer nächsten Parallelen, so bald das Fernrohr nicht unter 5 Fuß ist. Bey einer geringern Grösse des Fernrohrs kommen aber die Parallelstriche zu nahe neben einander, wenn ihr Zwischenraum nur eine Minute betragen soll.

Es verstehet sich daß neben die Parallellinien Zifern zu stehen kommen, damit man jedesmahl, ohne sich zu irren, die Anzahl der Zwischenräume zählen kan, welche ein Bild einnimt.

Anmerkungen über die bisherigen zwo Gattungen von Micrometern.

§. 176. 1. Die erste Gattung von Micrometern, bey der man sich der Schrauben bedienet, die dem Bilde eines Objeckts zugehörige scheinbare Grösse zu finden, rühret von Christfried Kirch einem deutschen Astronomen her, der es zuerst in den Misc. Berolinensibus bekannt gemacht hat. Die Vorrichtung ist zwar sehr einfach, aber das Umdrehen der Schrauben, das Zählen der Umdrehungen u. s. w. verursacht,

wenn

wenn man sich nicht dabey irren will, einigen Zeitverlust

II. Die letztere Art von Micrometern mit Parallellinien, ist von meinem Vater zuerst in den Kosmograph. Sammlungen bekannt gemacht worden, und ist ohnstreitig in der leichteren Behandlung, und auch in Absicht der Kosten, dem Kirchischen vorzuziehen Anitzt verfertigt dergleichen Glasmicrometer in sehr grosser Vollkommenheit, Hr. Mech. Brander in Augspurg, und bringt sie auch in die Fernröhre an Winkelmessern an, wo man vermittelst ihrer, einen Vernier oder Micrometerschraube an der Alhidadenr ersparen kan. Bey Horizontalvermessungen wird nemlich ein solches Micrometer in das Fernrohr des Winkelmessers so angebracht, und gestellt, daß die Linie uz Fig. XXVI mit der Ebene des Werkszeugs parallel ist, und folglich die Parallelen des Glasmicrometers, in dem Fernrohre als Verticallinien erscheinen, nachdem das Werkzeug horizontal gestellet worden ist Gesetzt also bey Ausmessung eines Horizontalwinkels CAB Fig. XXI habe bey der Richtung CA des Fernrohrs, der Index auf dem Rande 0° gewiesen; nachdem aber die Alhidadenregel herumgedrehet, und die Mittellinie xy des Micrometers Fig. XXVI, genau nach dem Objecte B Fig XXI gerichtet worden, weise der Index auf dem Rande 60° + einer gewissen Anzahl

zahl von Minuten ꝛc. Um diese Zahl von Minuten zu finden, so bringe man durch eine sanfte Verrükkung der Alhidadenregel, den Index genau an den Theilstrich 60°, und sehe dann zu, hinter welcher, oder zwischen welchen Parallelen des Glasmicrometers alsdann das Objeckt B in dem Fernrohre erscheinet. Ich will setzen B erschiene nach der geschehenen Verrückung der Alhidadenregel, alsdann hinter einer Parallele, die um 8 Zwischenräume von der Mittellinie des Micrometers entfernt wäre, so würde, wenn jeder Zwischenraum 2 Minuten betrüge, der Winkel CAB = 60° + 2.8 Min. = 60° 16′ seyn.

Auf diese Art ersparet Hr. Brander an einem Winkelmesser sowohl den Vernier als Micrometerschraube: es haben aber dergleichen Micrometer vorzüglich noch ihren Nutzen in der Lehre vom Nivelliren, und den dabey gebräuchlichen Instrumenten.

IV. Die nothwendigste Erforderniß ist nur daß 1) die Linien auf dem Glase vollkommen parallel, 2) überal gleich weit von einander sind, und 3) so zart auf dem Glase verzeichnet sind, daß ihre Dicke nicht nachtheilig ist.

Durch diese drey Vollkommenheiten zeichnen sich die Branderischen Micrometer vorzüglich aus.

V.

V. Die zwote Bedingung, daß die Zwischenräume der Parallelen vollkommen gleich seyn müssen, ist indessen nicht unumgänglich nothwendig; nur muß man vermittelst eines Zirkels oder anderer Vorrichtungen, die kleinen Ungleichheiten der Zwischenräume zu entdecken suchen, und eine Tafel darüber verfertigen. Die beste Art dieses zu bewerkstelligen ist folgende. Es sey Fig. XXVI. ki die eingetheilte Mittellinie des Micrometers, und ka, ab, bc u. s. w. die Zwischenräume der Parallelen. Man messe nach einem sehr genau eingetheilten Maasstabe, die Weiten ka, kb, kc, kd u. s. w. so ist kb — ka = ba; kc — kb = bc, u. s. w. Diese Unterschiede werden demnach zeigen, ob die Zwischenräume ba, bc ꝛc. einander gleich sind. Nun verfertige man eine Tafel, für die denen Zwischenräumen ka, kb, kc u. s. w. zugehörige Menge von Minuten und Secunden. Dies geschiehet, wenn man nach der Ordnung die Weiten ka, kb, kc u. s. w. mit des Objectivs Brennweite dividiret, und die herauskommenden Quotienten mit der Zahl 206264 multipliciret. Nachdem nun die Zahlen gehörig geordnet worden, so wird man vermittelst dieser Tafel die richtige scheinbare Gröſſe eines Bildes auf folgende Art finden. Gesetzt auf dem Micrometer nehme ein gewisses Bild den Raum bd ein, oder erschiene zwischen den beyden Parallelen durch b u. d. Man suche aus der Tafel, die denen

Zwischenräumen kb, kd, entsprechende Menge von Minuten und Secunden. Ich will setzen die Tafel gäbe kb = 8′ 20″; kd = 21′ 4″, so wäre der Unterschied kd — kb = bd = 12′.44″ = der scheinbaren Grösse des Bildes.

VI, Die erste und dritte Bedingung eines guten Micrometers (IV) ist aber desto wichtiger und erfordert alle Aufmerksamkeit des Mechanici. Man kan zwar versuchen vermittelst einer Diamantspitze, oder eines Splitters von einem Feuersteine die Parallelen auf das Glas zu reissen. Allein da die Linien durch dieses Verfahren fast immer unrein werden, so hat mein Vater den Vorschlag gethan die Linien bloß mit Tusche auf das Glas zu verzeichnen. Es wird zu dieser Absicht die eine Seite eines Glases mit feiner Tusche überall gleichförmig bestrichen, und nachdem es troken geworden, mit Wachs auf einem Tische befestigt, so daß die geschwärzte Seite oben zu liegen komme. Hierauf werden mit einem Federkiele, der wie zum Schreiben, aber ohne Spalt geschnitten ist, längst eines angelegten Parallellinials Streifen von der erwähnten Tusche dergestalt weggenommen, daß sehr feine Parallellinien von Tusche, so weit von einander, als die Spitze der Feder es mit sich bringt, stehen bleiben.

Ich habe bey Verfertigung solcher Micrometer das Glas nie ganz mit Tusche überstrichen, sondern nur mit einer guten Reisfeder, die

mit

etwas dicke angemachter Tusche gefüllt war, erst Linien, so zart es angieng, auf das Glas gerissen, und dann, wenn einige etwas zu dick ausgefallen seyn solten, mit dem oberwähnten Federkiel, wieder so viel Tusche von ihnen weggenommen, daß sie die gehörige Feinheit erhielten. Man muß aber beym Ziehen der Linien, mit der Reisfeder etwas geschwind längst des Linials herfahren, und nicht zu stark aufdrücken; dann wird dieses Verfahren oft so zarte Linien geben, daß es kaum nöthig ist, Tusche wieder davon wegzustreichen.

Die Tuschlinien hängen übrigens an dem Glase ziemlich fest, daß man nicht zu besorgen hat, daß sie sich so leicht wieder wegwischen, wenn man nur das Glas vor Feuchtigkeit aufbewahrt.

VII. Die Linien die Hr. Mech. Brander, vermöge eines ihm eigenen Kunstgrifs auf das Glaß reisset, sind so fein, daß ihre Breite kaum $\frac{1}{200}$ einer Linie beträgt, und daher dem bloßen Auge kaum sichtbar sind. Dies läst vermuthen, daß diese Linien wohl schwerlich mit einem Diamant oder Feuersteinsplitter ins Glas gerissen werden. Ich vermuthe vielmehr daß Hr. Brander etwa mit einer scharfen Spitze von gehärteten Stahl, oder sonst auf eine ähnliche Art, so breit als die Linien werden sollen, nur dem Glase die Politur benimmt.

Ich habe mit einem bloßen Federmesser, das aber nicht wie gewöhnlich sich in eine Spitze endigt, sondern durchaus gleich breit ist, dessen Klinge von feinem Stahle und sehr scharf geschliffen ist, in Ermangelung anderer Vorrichtungen die feinsten und reinsten Linien auf folgende Art aufs Glas gezogen. Nachdem ich ein Linial gehörig aufs Glas gelegt hatte, so bestrich ich die Stelle des Glases, wo die Linie längst des Linials eingerissen werden solte, mit angefeuchteten Kaput mortuum, oder auch mit derjenigen feinen Masse, welche sich von einem zarten Schleifsteine abschleifet, wenn man ein Federmesser darauf abziehet; legte hierauf an das Linial genau die breite Seite des Federmessers, und fuhr, bey einem gelinden Druck, mit der scharfen Ecke des Federmessers längst des Linials immer langsam über das Glas hin und her, so aber daß die breite Seite des Messers immer genau an dem Liniale liegen blieb. Nachdem ich nun etwa 15 bis 20 mahl über das Glas hin und her gefahren hatte und das Glas abwischte, so hatte sich die feinste Linie, auf der polirten Ebene des Glases matt geschliffen. Die Uebung wird nun hiebey die nöthigen Vorsichten und Vortheile zeigen. Ich habe vermittelst dieses Verfahrens in ein Hrn. H. Kästner gehöriges Fernrohr auf dem Observatorio, ein Micrometer verfertigt, welches an Feinheit der Linien, den Branderischen Micrometern nichts nachgiebt.

Bey

Bey Verfertigung solcher Micrometer, hatte ich anfangs die Parallelen, die auf das Glas kommen solten, in Ermangelung anderer Vorrichtungen blos auf Papier verzeichnet, das Glas über diese Linien mit Wachs befestigt und dann die durchs Glas scheinenden Linien des Papiers nach der gewiesenen Methode, auf die polirte Ebene des Glases gebracht. Da aber wegen einer Parallaxe, die durchs Glas scheinenden Linien auf das Glas selten in vollkommen gleicher Weite gezogen werden können, so habe ich mich nachher eines Instruments bedient, das sich auf dem hiesigen Observatorio befindet, und von der Einrichtung ist, daß über die Ebene, worauf das Glas gekittet wird, vermittelst einer guten Micrometerschraube, ein Linial, sich beständig parallel, und um jeden kleinen Raum genau fortgeschoben werden kan.

Uebrigens muß man bey dem bisher gewiesenen Verfahren hauptsächlich einen gleichförmigen Gang des Messers beobachten, und davor sorgen, daß sich das Linial nicht verrücket (zu welcher Absicht es gut ist, demselben gehörige Unterlagen zu geben). Auch muß man vor dem Einschleifen jeder folgenden Linie, dem Messer wieder die nöthige Schärfe geben — alsdenn wird man gewis mit wenig Mühe und Kosten ein sehr gutes Micrometer erhalten.

VIII. Die Kürze in die ich mich einschränken muß, erlaubt mir nicht, mich umständlicher in die Lehre von Micrometern, zum Gebrauche der Feldmeskunst, einzulassen. — Man kan aber die vollständige Theorie davon, wie auch alle nöthige Vorsichten dabey, weitläuftiger und mit der Hrn. H. Kästner eigenen Gründlichkeit in dessen Astronomischen Abh. II Saml. VII Abh. auseinander gesetzt finden.

XV. Kapitel.

Von Ausmessung zugänglicher und unzugänglicher Linien auf dem Felde.

§. 177. Die Ausmessung gerader Linien, die ich im ersten Theile gezeigt habe, beziehet sich nur auf solche Entfernungen, an die sich ohne beträchtliche Hindernisse, der Maasstab anlegen läst.

Es kan aber sehr oft vorkommen, daß entweder die auszumessenden Linien zu lang sind, folglich die Messung zu weitläuftig würde, oder daß sich Hindernisse vorfinden, die keine unmittelbare Anlegung des Maasstabes zulassen. — In diesem Falle reicht uns die Geometrie gute Hülfsmittel dar, auch ohne würkliche Anlegung

des

des Maaßstabes, dergleichen unbequeme Linien zu messen.

Hierzu dienet nun besonders die Lehre von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke, die ich bey meinen Lesern voraussetze — und da es gut ist, daß Anfänger sich vorher in Messung der Weiten üben, ehe sie zu zusammengesetzten Operationen fortgehen, so werde ich in diesem Kapitel unterschiedene Methoden beybringen, wie dergleichen einfache Operationen vorzunehmen sind.

Es ist klar, daß ich hier nur die wichtigsten Fälle vortragen kan, und die in der Ausübung besonders oft vorkommen. — Es würde eine unendliche Arbeit seyn, alle Fälle die sich auf dem Felde gedenken lassen, abzuhandeln. Indessen wird man sich leicht in allen Schwierigkeiten zu helfen wissen, wenn man sich die Vorschriften des gegenwärtigen Kapitels wohl bekant gemacht hat.

Es braucht wohl keines Beweises, daß eine und dieselbe Aufgabe sich auf sehr viele Arten auflösen läst. Es wird aber nach Verhältniß der Umstände bald diese bald jene Auflösung vorzüglich bequem seyn. So ist es in manchen Fällen vortheilhaft sich bloß der Meßkette zu bedienen; in andern Fällen ist die Auflösung vermittelst des Meßtisches, des Astrolabii, der

Boussole, u. s w. vorzuziehen, und die mit einer Aufgabe verbundenen Nebenumstände müssen entscheiden, welche Auflösung die beste und leichteste ist.

Die Hauptsache bey Messung der Weiten auf dem Felde, kömt darauf an, daß man sich ein Dreyeck oder eine andere Figur gedenkt, von der die zu messende Entfernung ein Stück ist, daß man nun an diesem Dreyecke oder Figur so viele Dinge misset, als man nöthig hat, daraus die unbekante Grösse, entweder durch Konstruction oder Rechnung ausfindig zu machen.

Da man nun oft keine andern Werkzeuge, als Maaßstäbe oder eine Meßkette bey sich hat, so will ich fürs erste zeigen, wie man allerhand unzugängliche Weiten, bloß durch Hülfe dieser beyden Werkzeuge ausfinden und messen könne, und obgleich die hieher gehörige Aufgaben, in den meisten Anleitungen zur Feldmeßkunst vorkommen, so habe ich doch nicht vor undienlich erachtet auch hie kürzlich das vornehmste davon beyzubringen, weil sie zugleich die Gründe von andern geometrischen Aufgaben enthalten.

Von Ausmessung der Weiten vermittelst der bloßen Kette und Maaßstäbe.

§. 178. Aufgabe. A, B, Fig. XXVII. sind zwey Objecte, die sich in einer Horizontalebene befin-

befinden, man soll ihren Abstand AB finden, der sich wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses F nicht unmittelbar messen läst: vorausgesetzt, daß von einem Dritten willkürlich angenommenen Punkte, C, ein freyer Zugang nach A, B, verstattet ist.

Aufl. Man setze in C ein Stab senkrecht ein, und messe die Weiten AC, BC, mit den Maaßstäben, oder der Meßkette; die gemessenen Weiten, AC, BC, trage man in den Verlängerungen von AC, BC, rückwärts von C nach a, und von C nach b, dergestalt daß Ca = CA und Cb = CB werde; messe dann die Entfernung ba, so wird dieselbe = AB seyn.

Der Beweis ist aus Gleichheit der Dreyecke ABC, bCa, so klar, daß es unnöthig ist, ihn hier vorzutragen.

Zus. I. Dieses Verfahren setzt zum voraus, daß sich die Weiten AC, BC, ungehindert auf einer horizontalen Ebene, rückwärts tragen lassen. Dieses verstattet aber oft der Raum nicht, besonders wenn AC, BC, beträchtlich groß sind. In solchen Falle trage man nur die Hälfte, den dritten vierten ꝛc. Theil der Weiten AC, BC rückwärts, von C nach α, und von C nach β; alsdenn, aber wird die Weite $\alpha\beta$ auch nur die Hälfte, der dritte oder vierte Theil, der unbekanten Weite AB seyn. Denn wenn z. E.

$C\alpha = \frac{1}{3}$ CA, und $C\beta = \frac{1}{3}$ CB genommen worden wäre, so ist $C\alpha : C\beta$ = CA : CB, da nun auch der Winkel $\beta\alpha$ = ACB, so ist das Dreyeck $C\beta\alpha$ dem ACB ähnlich, mithin auch AC : $C\alpha$ = AB : $\alpha\beta$, folglich weil $C\alpha = \frac{1}{3}$ AC, auch $\alpha\beta = \frac{1}{3}$ BA.

Zus. II Lassen sich die den Weiten CA, CB, Proportionale Stücken $C\alpha$, $C\beta$ nicht rückwärts tragen, so trage man sie in den geraden Richtungen CA, CB, vorwärts von C nach m, von C nach n, so wird auf eben die Art auch mn der AB proportional seyn.

Zus. III. Bey diesem Verfahren (Zus. I II.) muß man sich aber alle Mühe geben, die mn oder $\beta\alpha$ sehr genau zu messen; denn ein kleiner Fehler auf mn oder $\beta\alpha$, vervielfältigt sich, wenn man AB daraus finden will.

Gesetzt man habe Cm = $\frac{1}{8}$ CA; Cn = $\frac{1}{8}$ CB genommen, so ist auch mn = $\frac{1}{8}$ AB; wäre daher z. E. mn = 4 Ruthen gefunden worden, so wäre AB = 8 . 4 R. = 32 R. Hätte man aber mn um 1 Zoll fehlerhaft gemessen so betrüge dieses auf AB einen 8 mahl grössern Fehler.

Zus. IV. Oft kan man sich bey Auflösung der bisherigen Aufgabe auch folgendes Hülfsmittels bedienen, wo z. E. Fig. XXVIII. AB wegen

eines

eines dazwischen liegenden Flusses nicht gemessen werden könte, bey M sich aber eine Brücke befände; da hier das Rückwärtstragen nicht statt findet, so nehme man in der Verlängerung von AB, ein paar willkürliche Stücken Aa, Bb; an a, b, setze man ein paar Perpendicularlinien (§. 58) am, bn, so lang, daß man über die Brücke M, von m nach n wegmessen kann. Um nun aus den gemessenen Stücken am, bn, mn, die Weite AB zu finden, so gedenke man sich durch n mit AB oder ab eine parallele pn, so ist pn = ab, und das Dreyeck mnp rechtwinklicht, wo pm = am — bn, folglich $pn = \sqrt{(mn^2 - (am - bn)^2)} = ab$, mithin auch AB = ab — Aa — Bb gefunden werden kan.

Dieses Verfahren kan in ähnlichen Fällen oft mit Nutzen gebraucht werden.

§. 179. **Aufgabe.** Die Weite AB Fig. XXIX, die sich nicht unmittelbar messen läst, zu finden, wenn man von dem willkürlichen Standpunkte D, nur nach B aber nicht nach A hinkommen kan.

Aufl. Man verlängere AB, und nehme auf deren Verlängerung eine Länge BC, von zureichender Grösse; von D messe man die Weiten BD, DC, und trage sie in geraden Linien, rückwärts; BD von D bis b, und DC von D bis c, setze bey b, c, Stäbe

Stäbe ein, und gehe mit einem andern Stabe in der geraden Richtung cb, bis d fort, wo ein Stab d mit D, A, in gerader Linie stehen würde. Die bd messe man demnach, so wird bd = AB seyn. Gleichfalls wegen Gleichheit der Dreyecke ABD, bDd; die sich gar leicht erweisen läst.

Zus. I. Es erhellet, daß man wie in vorhergehender Aufgabe, gleichfalls nur nöthig hat, proportionale Stücken rückwärts zu tragen.

Zus. II. Auch hätte man, wenn man Dd mässe, des Standpunktes D Weite von A, weil Dd = DA.

Zus. III. Eine andere Auflösung der vorgelegten Aufgabe zeigt sich Fig. XXX, wo vorausgesetzt wird, daß man vermittelst einer Meßschnur oder einer Kette im Stande ist, einen Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man messe erstlich die Weite BD bis an den angenommenen Standpunkt, und trage sie rückwärts von D nach b, so daß bDB eine gerade Linie sey. Bey α stecke man einen Stab in die gerade Linie BA, und bey δ einen in die gerade Richtung BD, und messe nun in dem kleinen Dreyecke αBδ, die drey Seiten Bα, Bδ, αδ;

Dieses kleine Dreyeck trage man nun an den Punkt b, so, daß der Winkel B an b komme. Man nehme also auf der geraden Richtung bD,

die

die Linie ba = Bδ Fasse nun auf einer Meßschnur oder Kette, eine Länge so groß als die Summe der beyden Linien Bα, αδ; befestige die beyden Enden dieser Schnurlänge, bey a, b, und spanne sie nach den Richtungen bd, ad so aus, daß bd = Bα und ad = αδ werde, so erhält man bey b einen Winkel = B. Man stecke nun bey C einen Stab ein, so daß er sowohl mit b und d, als auch mit A und D in gerader Linie stehe, so wird die Weite bC die man hierauf messen kan = AB seyn, wie gleichfalls aus der Gleichheit der beyden Dreyecke bDC, ADB erhellet.

Es wird bey diesem Verfahren gut seyn, die Längen Bα, Bδ nicht gar zu klein, sondern z. E. einige Ruthen lang zu nehmen.

Noch besser und bequemer ist es, Bα = Bδ, zu nehmen, damit das Dreyeck αBδ gleichschenklicht werde.

Zus. III. Aus den gemessenen Seiten des kleinen gleichschenklichten Dreyecks Bαδ, läst sich der Winkel B durch trigonometrische Rechnung finden. Wenn man nun auf eben die Art auch bey D, nach den Richtungen DB, DA, die Längen De = Dε willkürlich annähme, und dann εε mäse, so liesse sich aus den Grössen De, Dε, εε, auch der Winkel D berechnen. Aus den beyden solchergestalt gefundenen Winkeln

B,

B, D, und aus der gemessenen Seite BD, findet sich alsdann die unbekante Weite AB durch trigonometrische Rechnung. Dieses Verfahren zeigt also, wie blos durch Hülfe der Meßkette, und der damit verbundenen Rechnung die Weite AB gefunden werden könte ohne daß man nöthig hat, auf dem Felde selbst die Seite BD rückwärts, und den Winkel B an b zu tragen.

Nimt man die Längen Bα, Bδ, Dε, De durchaus von gleicher Grösse, und z. E. 5 Ruthen lang, so sind für den Halbmesser 5°, die Linien αδ, εe, Chorden der gesuchten Winkel B, D, und wenn man ein für allemahl für den Halbmesser 5° oder 5000 Lin. die Chorden berechnet, und eine Tafel davon verfertigt hat, so findet man aus derselben, sogleich ohne weitere Rechnung, die denen Chorden αδ, εε, zugehörigen Winkel. Man vergleiche hiemit §. 138. III. Diese Messungsart, indem man die Winkel durch Kette und Schnur, und einer Chordentafel bestimmt, ist von vielen Feldmessern empfohlen worden, und die Anwendung davon auf sehr viele Fälle hat Hr. Jetze (gemeinnützige Praxis auf dem Felde und Papier ꝛc.) umständlich auseinander gesetzt.

§. 180. Aufg. Eine Weite AB Fig. XXXI zu messen zu deren keinem Endpunkte A oder B man bequem hinkommen kan.

I Aufl. Man setze bey C einen Stab ein in gerader Linie mit A und B. An C mache man einen rechten Winkel BCD §. 58, und nehme CD von beliebiger Länge. Aus dem Standpunkte D trage man auf CD von D nach c eine andere willkürliche Länge z. E. einige Ruthen, und setze an c abermahls einen rechten Winkel, damit die Richtung cε mit CA parallel werde. In diese Richtung cε setze man bey b, und a, in die geraden Linien DB, DA, ein Paar Stäbe ein, so ist, weil abc mit ABC parallel läuft

$$AB : ab = BD : bD = CD : cD; \text{ also}$$

$$AB = \frac{ab \cdot CD}{cD}$$

Misset man also ausser den willkürlich angenommenen Längen CD, cD, auch noch die ab, so findet sich daraus die unbekante Entfernung AB.

C, c brauchen nicht rechte Winkel zu seyn, wenn sie nur sonst von gleicher Grösse sind — die Hauptsache kömt nur darauf an, daß die Richtung cε, der CA parallel werde.

Hat man in der Richtung CA, ein sehr weit entlegenes Objekt, so läst sich die Richtung cε, auf eine sehr leichte Art nach §. 60, der CA parallel machen.

II Auflös. Ein anderes Verfahren die unzugängliche Weite AB zu finden zeigt sich Fig. XXXII.

Man nehme bey D einen willkürlichen Standpunkt an, und setze dann bey F einen Stab mit D und A, und bey E einen Stab mit D und B in gerader Linie;

Setze demnächst bey G einen Stab mit B und F in gerader Linie, und alsdann in die gerade Richtung GD, bey H einen Stab, auch mit E und A in gerader Linie, so ergiebt sich durch diese Verzeichnung auf dem Felde ein Viereck HG EF; darinnen kan man messen EH, HD, DG, GF, FE, ED, DF.

Um nun die unbekante Weite AB zu finden, so verzeichne man auf dem Papier nach dem verjüngten Maaßstabe eine kleinere Figur ehdgfe, welche der EHDGFE auf dem Felde ähnlich ist. Dergestalt daß die kleinen Dreyecke ehd, edf, fdg, in eben der Ordnung und Verhältniß auf dem Papiere, wie auf dem Felde, gegen einander liegen.

Verlängere hierauf die Seiten eh, fd, und ed, fg, bis erstere sich in a, und letztere in b durchschneiden, messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit das kleine Viereck aufgetragen worden, die Weite ab; so viel Ruthen

Fusse

Fusse ꝛc. man für dieselbe findet, eben so viel Ruthen Fusse ꝛc. wird die Seite AB würklich halten, wenn man sie mit der Meßkette messen könte.

Bew. Weil die kleinen Dreyecke hde, edf, fdg, denen HED, EDF, FDG ähnlich gemacht worden, so sind die Winkel hed = HED; def = DEF. also hed + def = HED + DEF oder der Winkel hef = HEF; nun ist auch efd = EFD, folglich in den Dreyecken AEF, aef, die Winkel an den Grundlinien EF, ef einander gleich, nemlich AEF = aef; EFA = efa; daher die beyden Dreyecke AEF, aef einander ähnlich; auf gleiche Weise sind auch die Dr BEF, bef, ähnlich. Dies giebt also folgende Proportionen

AE : EF = ae : ef
EF : EB = ef : eb

Also AE : EB = ae : eb
Aber auch AEB = aeb
Daher Dr. AEB ∽ Dr. aeb.
Mithin AE : AB = ae : ab
Aber auch EF : AE = ef : ae

---

folglich EF : AB = ef : ab
oder EF : ef = AB : ab.

D. h. weil nach dem verjüngten Maaße, ef so viel Ruthen Fusse ꝛc. hält, als EF auf dem Felde nach der Meßkette, so wird auch ab nach dem

verjüngten Maaße so groß seyn, als AB nach der Meßkette.

Uebrigens ist es bey diesem Verfahren vortheilhaft die Standlinie EF auf dem Felde nicht zu kurz anzunehmen.

III. Auflös. Ein anderes Verfahren die unzugängliche Weite AB Fig. XXXIII zu finden, ist folgendes. Man wähle bey C einen willkürlichen Standpunkt, und setze in mäßiger Entfernung von C, bey E, D, ein paar Stäbe in die geraden Richtungen CB, CA; in den Verlängerungen von CE, CD, DE, nehme man EG = CE, HD = CD, EF = ED = DI. Setze bey G, F, H, I, Stäbe ein. Hierauf bringe man bey L einen Stab hin, so, daß er sich sowohl mit G, F, als auch mit A, E, in geraden Richtungen befindet, so wird GL = CA seyn, wie sich leicht erweisen läst. Auf eben die Art setze man bey K einen Stab, in die gemeinschaftlichen geraden Richtungen HK, BDK so wird auch HK = BC seyn. Man messe also die beyden Längen HK, GL, und trage erstere, in die Verlängerung von AC, von C nach b, die andere GL, in die Verlängernng der BC von C nach a, so wird die Weite ab, die man nun messen kan der AB gleich seyn.

Dieses Verfahren gehet auf dem Felde, wenn man nur Platz zum Rückwärtstragen hat gleichfals

fals sehr bequem von statten, und ist weit leichter, als das ähnliche Pentherische S. dess. pract Geometrie § 383, und weit weniger zusammengesetzt, als dasjenige welches Hr Jetze (Gemein. Praxis auf dem Felde ꝛc. p. 33) vorträgt.

IV. Aufl. Gebrauch entfernter Objekte

Wenn man auf dem Felde eine freye Aussicht nach sehr weit entlegenen Gegenständen haben kan, so kan man sich derselben mit Vortheil auf folgende Art zu Ausmessung unbekanter Entfernungen bedienen.

Es sey Fig. XXXIV AB die auszumessende Weite.

Man nehme eine willkürliche Standlinie CD an; und bemerke bey C, auf welchen Gegenstand l des entlegenen Horizontes die Richtung CA hintrift Dc sey nun ein beliebiger Theil der Standlinie DC. Man begebe sich nach c und lasse bey i einen Stab in die Richtung cl nach dem entlegenen Objekte, einsetzen. Auf gleiche Weise treffe die Richtung CB auf das Objekt K am entlegenen Horizonte, und man lasse auch bey k einen Stab in die Richtung cK einsetzen. Hierauf gehe man mit zweenen Stäben in der Richtung ci, vorwärts, (welches geschiehet, wenn man mit den Stäben c. i, immer in gerader

Linie bleibt,) und setze bey a einen Stab so ein, daß ein Gehülfe bey D, ihn in der geraden Linie DA siehet. Auf gleiche Weise gehe man auch mit dem andern Stabe in der Richtung cK vorwärts bis nach b, wo der Gehülfe D ihn in der geraden Linie DB siehet; solchergestalt stehet also a in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden Linien cI, DA, und b in dem Durchschnitte der beyden Richtungen cK, DB. Man messe hierauf die Weite ab, so wird dieselbe ein solcher Theil von AB seyn, als cD von der Standlinie CD ist.

Denn weil die Objekte I, K sehr weit entlegen sind, so kan man ohne grossen Fehler die Stücken ca, CA; cb, CB, als parallel ansehen §. 60, mithin die Winkel ACD = acD; CDB = Db, BCD = bcD, folglich die Dreyecke ACD dem acD, und BCD dem bcD ähnlich setzen. Daher hat man

DA : Da = DC : Dc
BD : bD = DC : Dc

also DA : Da = BD : bD

folglich wegen des gemeinschaftlichen Winkels ADB das Dr. ABD ∽ abD mithin

AB : ab = BD : bD = DC : cD

folglich ist ab ein solches Stück von AB, als cD von CD.

Es verstehet sich daß diese Methode desto weniger fehlerhaft ist, je weiter die Gegenstände I, K am Horizonte hinaus liegen.

Hr Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geom. lehret diesen Gebrauch entfernter Gegenstände, und man kan in manchen Fällen, wo die auszumessende Entfernung Aß nicht gar zu groß ist, oder von der Standlinie zu weit wegliegt, sich dessen gar wohl bedienen.

Anmerkung

§ 181. Das bisherige mag zureichen, Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in Messung geradrr Linien auf diese Art zu üben. Man wird aber indessen gar leicht wahrnehmen, daß, wenn die auszumessenden Weiten entweder zu groß sind, oder von der Standlinie, oder den Standpunkten zu weit wegliegen, die gegebenen Auflösungen theils unzulänglich theils auch wegen vorkommender Hindernisse und Mangel des Raumes gar nicht ausgeübt werden können, oder zu weitläuftig ausfallen. Wenn aber diese Einschränkungen nicht vorhanden sind, so kan man sich ihrer oft mit Vortheil bedienen. Uebrigens kömt die Richtigkeit des Verfahrens auch auf eine geschickte Auswahl der Standlinie, oder der Standpuncte an, wo man die Vorsicht gebrauchen muß, daß an denselben nicht gar zu spitze oder stumpfe Winkel zum Vorschein kommen.

Auch wird es zur Erleichterung der Arbeit, wie auch Verwirrung zu vermeiden, gut seyn, wenn man sich von der Auflösung einer Aufgabe, vorher einen Entwurf auf dem Papiere macht, ehe man die Operation auf dem Felde selbst vornimt.

Eine andere Einschränkung der bisherigen Methoden, ist, daß die auszumessende Weite sowohl, als auch die willkürlich angenommenen Standpunkte oder Standlinien sich in einer einzigen Ebene befinden müssen; in bergigten Gegenden, würden daher die gegebenen Auflösungen selten anwendbar seyn.

Wir müssen also auf andere Hülfsmittel bedacht seyn, und hierzu werden uns, der Meßtisch, das Astrolabium, die Bussole ꝛc. vortrefliche Dienste leisten.

Messung der Weiten an die sich der Maaßstab nicht unmittelbar bringen läst durch Hülfe des Meßtisches Astrolabii ꝛc.

§ 182. Aufg. A, B, Fig. XXXV Tab. III sind zwey dergleichen Objekte, man soll ihren Horizontalabstand AB, durch Hülfe des Meßtisches finden, vorausgesetzt, daß man von einem willkürlichen Standpunkte C, gerade zu, nach B und A hinmessen kan.

Auf-

Aufl. I. Man bringe den Meßtisch über den Standpunkt C, stelle ihn horizontal (§. 113) und bestimme auf ihm einen Punkt c, der lothrecht über C liegt (§. 128 IV). An c lege man das Diopterlinial, visire nach A, B, und ziehe dahin die Richtungslinien cm, cn, so hat man den Winkel ACB auf dem Felde, aufs Meßtischgen gebracht (§. 128.). Man messe nun die Weiten CA, CB, und trage erstere CA nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Meßtischgen von c nach a, die andre CB aber, auf die entsprechende Richtung cn von c nach b. Messe demnächst auf dem Meßtische die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird solche der AB gemäß oder ähnlich seyn, d. h. nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca, cb, aufgetragen hat, so viel Ruthen, Schue, und Zolle halten, als AB nach der Meßkette halten würde, weil wegen des Winkels ACB = acb, und der Proportion AC : CB = ac : cb, das Dreyeck acb auf dem Meßtische, dem großen Dreyecke ACB ähnlich seyn wird.

II Aufl. Vermittelst des Astrolabii, AB zu finden, messe man den Winkel ACB (§. 132) und die beyden Seiten AC, BC; berechne hieraus in dem Dreyecke ACB die Seite AB nach der gewöhnlichen Weise, oder nach (Trig. S. XVII).

Wolte man nicht so genau verfahren, so trüge man vermittelst eines geradlinigten Transporteurs, den gemessenen Winkel aufs Papier, und setzte auf beyde Schenkel, die gemessenen Weiten CA, CB, so erhielte man, wie auf dem Meßtische ein kleines Dreyeck, das dem großen ACB ähnlich wäre ꝛc.

§. 183. Aufg. Die Weite AB (Fig. XXXVI) zu finden, wenn man von einem willkürlichen Stande C nur nach A hinmessen kan.

Aufl. I. Man bringe wie vorhin (§. 182) den Meßtisch über C, und bestimme auf demselben, den Winkel mcn = ACB; messe die Weite CA und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie cn, von c nach a.

Man nehme nun den Meßtisch über C weg, und trage ihn über A, dergestalt, daß der Punkt a über A, und durch gehörige Verrückung und Wendung des Meßtisches, die Richtung ac in die gerade Linie AC, oder vielmehr in die über AC eingebildete Verticalebene zu liegen komme, so, daß man durch die Dioptern des längst ac gelegten Linials, das bey dem ersten Stande C zurückgelassene Signal bedeckt siehet — so wird die bey der ersten Station C auf dem Meßtische gezogene Linie cn, bey der zweyten Station über A, die Lage cn, die mit der cn der erstern Station parallel seyn wird, bekommen.

Man

Man lege nun an a die dioptrische Regel, visire nach B, und ziehe auf dem Meßtische die Richtungslinie ar; wo dieselbe, die Richtung cn durchschneidet, da wird sich ein Punkt b ergeben, welcher gegen a, c, eben die Lage haben wird, die B gegen A, C hat; denn vermöge des Verfahrens ist das Dreyeck auf dem Meßtische nemlich abc dem großen ABC ähnlich, weil die Winkel acb = ACB, cab = CAB sind. Die Linie ab auf dem Meßtische, wird also nach dem verjüngten Maaßstabe, der AB, gemäß seyn.

Es verstehet sich, daß, während man auf dem Meßtische die Linien neben der Regel herziehet, der Meßtisch unterdessen in unverrückter Lage erhalten werden müsse.

Aufl. II. Mit dem Astrolabio messe man die beyden Winkel C, A, und finde, aus C, A, AC, die Seite AB durch Rechnung, nach der bekanten Proportion

sin B : AC = sin C : AB; wo B = 180° — A — C

mithin

log AB = log AC + log sin C — log sin (180° — A — C)

Anmerk. Es pflegt sich unterweilen zuzutragen, daß wegen Wahl eines zu grossen verjüngten Maaßstabes, oder weil der Punkt c auf dem Meßtische nicht bequem angenommen worden, die Richtungslinie ar die cn auf dem Meßtische

nicht durchschneidet, sondern daß der Durchschnitt b ausserhalb des Meßtisches fällt. In diesem Falle, welcher Fig. XXXVII vorgestellet ist, wo ar die Richtung cn in b ausserhalb des Meßtisches schneidet, nehme man entweder einen kleinern verjüngten Maaßstab an, womit man die Weite AC von c nach a aufträgt; oder wenn man denselben Maaßstab beybehalten will, so halbire man bey γ die Linie ac, oder nehme $a\gamma = \frac{1}{4}$ ac oder $\frac{1}{4}$ ac, nachdem man es für gut befindet, und ziehe durch γ mit cn eine parallele $\gamma\beta$, welche die Richtungslinie nach B, in β durchschneidet, also in einem Punkte der auf dem Meßtische liegt. Messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca aufgetragen hat, die Weite $a\beta$. Hätte man nun $a\gamma = \frac{1}{2}$ ac genommen, so wäre $a\beta = \frac{1}{2}$ ab; für $a\gamma = \frac{1}{3}$ ac, wäre $a\beta = \frac{1}{3}$ ab u. s. w. Man würde also die der AB gemässe Weite ab, dennoch vermittelst der $a\beta$ finden, obgleich b ausserhalb des Meßtisches fiele.

Beym Gebrauche des Astrolabii ist man solchen Vorfällen wie eben gewiesen worden, nicht ausgesetzt, weil man da die AB durch Rechnung findet.

Wenn die Weite AB sehr groß ist, so wird der Durchschnitt b sehr oft ausserhalb des Meßtisches fallen, oder man müste einen sehr kleinen

verjüngten Maaßstab annehmen. Da könte man sich aber keine große Genauigkeit versprechen. Deswegen ist bey Messung sehr großer Weiten immer das Astrolabium vorzuziehen.

Einige practische Schriftsteller, rathen ein Brett A von guten trocknen Lindenholze, wie Fig XXXVIII ausweist, das etwa 6 bis 8 Zoll breit, und eben so lang und dick der Meßtisch ist, bey w, r, mit zwoen eingeschnittenen Nuthen zu versehen, die man demnächst an ein paar Leisten i, k. welche etwa durch Schrauben an die untere Fläche des Meßtisches Fig. XXXVII befestigt werden können, anschiebet, so, daß das Brett A mit der Ebene des Meßtisches genau einer einzigen Fläche liege. Da man solchergestalt durch das angesetzte Brett einen größern Raum auf dem Meßtische erhält, so kan man sich dadurch aus der Verlegenheit helfen, wenn ein Durchschnittspunkt wie b Fig XXXVII außerhalb des Meßtisches fallen solte; weil man alsdann den Durchschnitt b auf dem angesetzten Brette erhalten wird, wenn anders b nicht gar zu weit außerhalb des Meßtisches fällt.

Aufl. III. Da man bey der vorgelegten Aufgabe nöthig hatte, den Meßtisch von dem ersten Standpunkt C nach A zu bringen, und dieses Tragen des Meßtisches von einem Orte zum andern, mit einigen Unbequemlichkeiten wie

auch

auch mit Unrichtigkeiten verbunden seyn kan, wenn man bey der zwoten Station über A, den Meßtisch nicht gehörig einrichtet, so kan man sich durch folgendes Hülfsmittel, das Forttragen des Meßtisches ersparen. S Fig XXXIX. Man stecke nemlich, nachdem der Meßtisch über C gestellet worden, bey D und O, in beliebiger Weite von C ein paar Stäbe ab, die mit B in gerader Linie stehen. Nun ziehe man auf dem Meßtische aus dem lothrecht über C liegenden Punkte c, nach den vier Objecten A, B, O, D die unbestimmten Richtungslinieu ct, cw, cn, cm; die gemessenen Weiten CA, CO, CD, trage man nach dem verjüngten Maaße, auf die entsprechende Richtungslinien ct, cn, cm, von c nach a, von c nach o, von c nach d. Ziehe durch die Punkte d, o, auf dem Meßtische die gerade Linie dob, welche die nach B zulaufende Richtung cw in b schneidet, messe dann die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird man die Grösse der AB in Ruthen Fussen und Zollen finden, weil ab der AB gemäß seyn muß.

Denn wegen des gemeinschaftlichen Winkels OCD = ocd, und weil man oc : cd = CO : CD gemacht hat, ist der Triangel cod ∽ COD. also der Winkel cdo = CDO folglich auch der Triangel bcd ∽ BCD, weil die Winkel in beyden einerley sind,

folg-

folglich eb : CB = cd : CD Es ist aber auch
er Constr.) ca : CA = cd : CD

---

also cb : CB = ca : CA
Auch d. Winkel ACB = acb
folgl. d Dreyeck ACB ∽ acb
Mithin ca : CA = ab . AB

d. h. weil man nach dem verjüngten Maaße ca der CA gemäß gemacht hat, so wird nach eben dem Maaßstabe auch ab der AB gemäß seyn.

Dieses Verfahren, ist in der That zu empfehlen, ob man gleich die Linien CO, CD, ausser der CA, auch noch messen muß; dadurch erspart man sich aber das Fortragen des Meßtisches, wie auch die gehörige Stellung über A wozu gewis mehr Zeit erfordert wird, als zur Messung der Linien CO, CD.

§. 184. Aufg. Eine Weite AB Fig. XL. zu messen, zu deren keinem Ende A oder B, man aus willkürlichen Standpunkten hinkommen kan.

Aufl. I. Man nehme eine willkürliche nicht zu kleine Standlinie CD an, bringe den Meßtisch über C, stelle ihn horizontal, und bestimme auf demselben den Punkt c, der über C lothrecht liegt.

An

An c lege man die Regel, visire nach A, B, D, und ziehe die Richtungslinien cm, cn, cr. Messe nun die Standlinie CD. und trage sie verjüngt, auf die zugehörige Richtung cr, von c nach d, so stellet der Punkt d auf dem Papiere den Punkt D auf dem Felde, vor.

Hierauf bringe man den Meßtisch mit den daraufgezogenen Linien cm, cn, cr, nach der zwoten Station über D; dergestalt, daß 1) der bey der ersten Station erhaltene Punkt d, lothrecht über D und 2) die Linie dc bey der zwoten Station wieder längst DC zu liegen komme, dergestalt daß man durch die Dioptern der längst dc angelegten Regel, die bey C zurückgelassene Fahne erblickt.

In dieser Lage bleibe der Meßtisch unverrückt.

Man richte die Dioptern nach A und B, und ziehe aus d längst des Diopterlinials die Richtungen da, db, oder, ohne diese Linien da, db würklich auszuziehen, bemerke man blos deren Durchschnitte a, b, auf den Richtungslinien cm, cn, die bey der erstern Station des Mestisches, nach den Objekten A, B. hingezogen worden, so wird man auf dem Meßtische die Weite ab finden, welche der AB nach demverjüngten Maaßstabe womit man dc aufgetragen hat, gemäß seyn, mithin die auf AB gehende Menge von Ruthen u. s. w. anzeigen wird.

Bew.

Bew. Weil der Winkel acd = ACD und adc = ADC so ist das Dreyeck acd dem Dreyecke ACD ähnlich — dies giebt folgende Proportionen

AC : ac = CD : cd
BC : bc = CD : cd
also AC : ac = BC : bc
oder AC : BC = ac : bc

da nun auch der Winkel ACB = acb, so ist das Dreyeck acb dem ACB ähnlich mithin AB : ab = AC : ac = CD : cd oder AB : CD = ab : cd d. h. wenn cd die Weite CD nach dem verjüngten Maaßstabe ausdrückt, so wird auch ab die AB nach diesen Maaßstabe ausdrücken.

Zus. Diese Aufgabe ist sehr wichtig, und, so wie die Linie AB auf dem Felde durch ab auf dem Meßtische entworfen worden, so dienet diese Aufgabe selbst ganze Figuren auf dem Papiere zu entwerfen, wovon in der Folge mit mehrerem Unterricht gegeben werden soll.

Die wichtigste Vorsicht ist 1) den Meßtisch in unverrückter Stellung zu erhalten, während man die Linien auf demselben ziehet, und 2) bey der zweyten Station des Meßtisches, durch gehörige Wendung des Tisches, die Linie dc genau längst DC einzurichten.

Wenn letzteres geschiehet, so werden die Linien ca, cb, oder cm, cn, die man über der

erstern

erstern Station auf dem Meßtische erhalten hatte, bey der zwoten Station desselben über D, genau mit den correspondirenden Linien auf dem Felde, d. h. mit CA, CB parallel seyn weil der Winkel acd = ACD; bcd = BCD u. s. w.; Auch ab wird mit AB parallel werden, dergestalt, daß also über der zwoten Station alle Linien, ac, ab ꝛc. denen zugehörigen AC, AB gleichlaufend seyn werden.

Zus. 1. Man kan auch, ohne bey der zwoten Station des Meßtisches, dc längst DC durchs Zurückvisiren einzurichten, den gehörigen Stand des Meßtisches, durch Hülfe einer guten Magnetnadel erhalten.

Da nemlich die Richtungen der Magnetnadel ohne merklichen Fehler als parallel angenommen werden können, wenn die Oerter nicht zu weit von einander entfernt sind (§. 118 6) so ziehe man, nachdem bey der ersten Station die Linien cm. cn, cr, gezogen worden, bey unverrückter Stellung des Meßtisches, auf demselben die Richtung der Magnetnadel μν. (§. 121)

Damit nun bey der zwoten Station des Meßtisches über D, die Linien cm, cn, denen CA CB parallel werden, und übrigens auch dc längst DC zu liegen komme, so bringe man durch gehörige Wendung des Tischblattes erstlich den Punkt d lothrecht über D, und dabey die Linie dc

nur

nur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße in die Richtung DC; nachdem dieses geschehen ist, lege man die dioptrische Regel an die bereits bey der ersten Station gezogene Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, wende demnächst den Meßtisch horizontal herum, bis die Magnetnadel wieder genau über der auf dem Boden des Magnetkästgens gezogenen Nordlinie einspielet, so wird alsdann die Linie $\mu\nu$ über der zwoten Station, der $\mu\nu$ über der erstern parallel werden. Mithin werden auch die Richtungen cm, cn, bey der Station 2, mit CA, CB die gehörige parallele Lage erhalten, und wenn d über D liegt so wird auch dc längst DC fallen. Mithin wird man durch Hülfe der Magnetnadel eben das erhalten, was sonst bey der zwoten Station durchs Zurückvisiren nach der erstern erreicht wird.

Dabey wird aber zum vorausgesetzt, daß D von C nicht gar weit wegliege, weil es sonst ohne einigen Fehler nicht verstattet ist, die Richtung der Nadel bey D, mit der Richtung derselben bey C, als gleichlaufend anzunehmen.

Dieses Verfahren, durch Hülfe der Magnetnadel, an jeder folgenden Station, den Meßtisch so zu stellen, daß die auf demselben bereits bey der ersten Station erhaltenen Linien, wieder mit den correspondirenden auf dem Felde parallel werden, hat auch sonst in vielen Fällen, großen

Nutzen. Auch wird es bey der Vermessungsart gebraucht, der sich Hr. Hogreve (S. dess. Landesvermessungen) bey der topographischen Aufnahme eines Landes bedient.

Bey der Aufgabe des gegenwärtigen §, wolte ich aber doch allemahl lieber rathen, sich bey der zwoten Station des Zurückvisirens nach der erstern zu bedienen, weil dasselbe nicht denen Fehlern unterworfen ist, die wegen der zufälligen Unvollkommenheiten der Magnetnadel so oft zu befürchten sind (§. 120).

II. Auflösung.

Man kan auch ohne den Meßtisch in die zwote Station D zu bringen, sogleich bey der ersten Station C die Weite AB finden; nur muß man sich die Mühe geben noch einige Linien mehr zu messen. S. die XXXIX Figur.

Nachdem man nemlich den Meßtisch gehörig über C gestellet hat, so lasse man bey D, O, ein paar Stäbe mit B in die gerade Linie DB, und bey I einen Stab in die gerade Linie DA einsetzen. Ziehe nun auf dem Meßtische nach den Objekten A, B, D, O, I, aus c die Richtungen ca, cw, u. s. w. Messe demnächst die Weiten CD, CO, CI, und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungen cm, cn, cw, von c nach d, von c nach o, von c nach i, lege an d, o, und an

d,

d, i, ein Linial, so werden nach gehöriger Verlängerung der Linien do, di, dieselben auf denen nach A, B gezogenen Linien cw, ct, die Punkte b, a, abschneiden, und solchergestalt auf dem Meßtische die Weite ab bestimmen, welche der AB gleich seyn wird.

Der Beweiß hievon ist dem der III. Aufl. des 183 §. völlig ähnlich. Hier liegt I auch in der geraden Linie CB, es ist aber dieses nicht nöthig, wenn I nur in der geraden Linie DA liegt.

III. Auflösung.

Mit dem Astrolabio und durch Hülfe trigonometrischer Rechnung.

Man messe mit dem Winkelmesser bey C (Fig. XL) die Winkel ACD, BCD; hierauf bey D die Winkel CDA, CDB und dann die Standlinie CD, so wird sich durch Auflösung einiger Dreyecke, die Weite AB folgendergestalt berechnen lassen.

1. Man nenne die bekanten Winkel BCD $= \alpha$, ACD $= \beta$; CDA $= \gamma$, CDB $= \delta$, die Standlinie CD $=$ m; so sind erstlich in den Dreyecken ACD, BCD, die Winkel

CAD $= 180° - ACD - CDA = 180° - (\beta + \gamma)$

CBD $= 180° - BCD - CDB = 180° - (\alpha + \delta)$

bekant.

2. Man setze also der Kürze halber CAD = A; CBD = B so ist in den Dreyecken CDA, CDB

$$\sin A : m = \sin \gamma : AC$$

$$\sin B : m = \sin \delta : BC$$

Daher $AC = \frac{m \sin \gamma}{\sin A} = m \sin \gamma \operatorname{cosec} A$

$$BC = \frac{m \sin \delta}{\sin B} = m \sin \delta \operatorname{cosec} B.$$

3. Also sind die Seiten AC, BC des Dreyeckes ACB bekant.

4. Auch weiß man den eingeschlossenen Winkel $ACB = ACD - BCD = \beta - \alpha$ (1) daraus läst sich also die Weite AB trigonometrisch berechnen.

5. Die gewöhnliche Regel ist folgende.

Man nenne die halbe Summe der beyden Winkel CAB, CBA = S, ihre halbe Differenz = φ; so ist

$$\frac{180^\circ - ACB}{2} = S \text{ oder}$$

$$90^\circ - \tfrac{1}{2} ACB = S$$

Um die halbe Differenz φ zu finden, so schliesse man

$$BA + AC : BC - AC = \operatorname{tang} S : \operatorname{tang} \varphi$$

also

also $\text{tang}\,\varphi = \frac{BC - AC}{BC + AC}\,\text{tang}\,S$

$= \frac{BC - AC}{BC + AC}\,\text{cot}\,\frac{1}{2}\,ACB$

in welcher Formel die Seiten BC, AC, und der der Winkel ACB (2. 3. 4) bekant sind.

6. Wenn nun BC die grössere Seite bedeutet, so ist der gegenüberstehende Winkel CAB bekantermaaßen $= S + \varphi = 90° - \frac{1}{2}\,ACB + \varphi = 90° - (\frac{1}{2}\,ACB - \varphi)$
also auch CAB bekant.

7. Hiernächst wird also die Weite AB durch folgende Proportion gefunden

$\sin CAB : BC = \sin ACB : AB$
oder (6)
$\cos(\frac{1}{2}\,ACB - \varphi) : BC = \sin ACB : AB$

daher $AB = \frac{BC \sin ACB}{\cos(\frac{1}{2}\,ACB - \varphi)}$ oder wenn man Tafeln für die Secanten hat

$AB = BC \sin ACB \sec(\frac{1}{2}\,ACB - \varphi)$

8. Diese Auflösung kan durch Logarithmen bewerkstelligt werden. Aus (2) erhält man die Logarithmen der Seiten BC, AC; und folglich aus den Tafeln die Seiten BC, AC selbst. Um

den Winkel φ (5) zu finden, muß man vorher die Logarithmen von CB + AC und CB — AC, berechnen.

Damit man nun nicht nöthig habe erstlich aus den Tafeln die Seiten BC, AC, und dann die Logarithmen von BC + AC; BC — AC zu suchen, so kan man obige Rechnung noch etwas abkürzen, wie folget,

9. Weil aus (5) auch

$$\log \text{tang}\,\varphi = \frac{1 - \frac{AC}{BC}}{1 + \frac{AC}{BC}} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\,ACB \text{ ist}$$

so suche man einen Winkel $= \psi$ dessen Tangente $= \frac{AC}{BC}$ ist, so hat man

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{1 - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,\psi} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\,ACB$$

10. Wenn man aber in Trig. S. XII. 6 das dortige $\beta = 45°$ und $\gamma = \psi$, mithin tang β = tang $45° = \sin$ tot $= 1$ setzet, so wird

$$\text{tang}\,(45° - \psi) = \frac{1 - \text{tang}\,\psi}{1 + \text{tang}\,\psi}$$

11. Folglich (9)

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } (45° - \psi) \cot \tfrac{1}{2} ACB$$

$$= \frac{\text{tang } (45° - \psi)}{\text{taug } ACB}$$

15. Bringt man also das bisher beygebrachte in eine einzige Vorschrift, und bedienet sich überal der Logarithmen, so erhält man folgende

Regel.

Man suche erstlich nach (2) die Logarithmen der beyden Seiten BC, AC

Hierauf nach (9) einen Winkel ψ durch

$$\log \text{tang } \psi = \log AC - \log BC$$

Alsdann nach (11) einen Winkel φ durch

$$\log \text{tang } \varphi = \log \text{tang } (45° - \psi) - \log \text{tang } \tfrac{1}{2} ACB$$

so wird (7) log AB =

$$\log BC + \log \sin ACB + \log \sec (\tfrac{1}{2} ACB - \varphi)$$

13. Wenn man sich der gemeinen Formel (5) bedienen will, so muß man in dem Falle da AC, BC, die Gränzen der Tafeln überschreiten durch Proportionaltheile die Rechnung führen. Und da braucht man um den Winkel φ zu berechnen 4 Proportionaltheile, nemlich zween um die Werthe von BC, AC, und zween um die Logarithmen von BC + AC, BC — AC, zu erhalten.

Bedienet man sich aber der Vorschrift (12) so braucht man dazu nur zween Proportionaltheile, einen um den Winkel ψ bis auf Sekunden, und dann einen um log tang $(45° - \psi)$ zu berechnen.

Daher ist also die Formel (12) zur Berechnung ungleich bequemer als die gewöhnliche (5).

14. In den meisten Fällen ist es erlaubt die Sekunden in den Winkeln ψ; $45° - \psi$; φ wegzulassen; den Fall ausgenommen, da diese Winkel sehr klein sind. Hiedurch wird also wegen Ersparung der Proportionaltheile, die Rechnung noch leichter.

14. Die Formel (12) setzt zum voraus daß BC die grössere und AC die kleinere Seite des Dreyecks ACB ist. Es ist klar wenn AC die größere, BC aber die kleinere Seite wäre, alsdann

$$\log \text{tang } \psi = \log BC - \log AC$$

log tang φ wie vorhin bliebe, und $\log AB = \log AC + \log \sin ACB + \log \sec(\frac{1}{2} ACB - \varphi)$ würde.

16. Es ist ferner klar daß die Formel für log tang ψ eigentlich diesen Logarithmen für den Sinus tot $= 1$ giebt. Verlangt man aber den Logarithmen dieser Tangente für den Halbmesser

der

der Sinustafeln, so muß man eigentlich zu log AC — log BC die Zahl 10 addiren.

Ein gleiches ist in Absicht des Logarithmen der Tangente des Winkels φ zu bemerken.

17. wenn der Winkel $\varphi > \frac{1}{2}$ ACB gefunden wird, so ist eigentlich $\frac{1}{2}$ ACB — φ negativ; alsdann muß man aber statt cos ($\frac{1}{2}$ ACB — φ) (7) oder statt sec ($\frac{1}{2}$ ACB — φ) setzen cos (φ — $\frac{1}{2}$ ACB) oder sec (φ — $\frac{1}{2}$ ACB)

Dies erhellet daraus weil cos ($\frac{1}{2}$ ACB — φ) = cos (φ — $\frac{1}{2}$ ACB) ist, und eben dasselbe auch von den Secanten gielt.

Exempel.

18. Um den Gebrauch der in (12) beygebrachten Formel mit einem Beyspiele zu erläutern, so soll folgendes dazu dienen.

An einer Standlinie CD von 1517,7 Kalenb. Fuß = m maaß ich die Winkel

ACD = β = 63°. 38′; BCD = α = 49°. 44′
CDA = γ = 89°. 54′; CDB = δ = 95°. 13′.

Dies giebt die Winkel

A = 26° 28′. B = 35°. 3′. ACB = 13°. 54′
$\frac{1}{2}$ACB = 6 . 57′

Folglich

log m = 3,1811859
l sin γ = 9,9999993 — 10
l cosecA = 0,3509797

log AC = 3,5321649
l m = 3,1811859
l sin δ = 9,9981974 — 10
l cosecB = 0,2408679

l BC = 3,4202512
l AC = 3,5321649

log tang ψ = 9,8880863 also ψ = 37°.41'.53"
45° — ψ = 7.18.7.
log tang (45° — ψ) = 9,1076759
l tang ½ ACB = 9,0859996

l tang φ = 10,0216763
φ = 46°.25'.45"
φ — ½ ACB = 39°.28'.45" = 39°29' beyn.

Also endlich

l AC = 3,5321649
l sin ACB = 9,3806237 — 10
l sec (φ — ½ ACB) = 0,1124898

log AB = 3,0252784
AB = 1060 Kalenb. Fuß.

Dies

Dies ist die Weite des südlichen Johannikirchthurms in Göttingen, vom Observatorio. Die erwähnte Standlinie von 1517,7 Fussen war auf einer Wiese außerhalb der Stadt angenommen worden.

IV. Auflösung.

Wolte man vermittelst einer Zeichnung aus den mit dem Astrolabio gemessenen Winkeln α, β, γ, δ, die Weite AB auf dem Papiere bestimmen, so kan man sich zu dieser Absicht unterschiedener Methoden bedienen.

I. Man trage die gemessene Grundlinie CD, nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Papier, und mache also cd Fig. XLI der CD gemäß. Setze hierauf durch Hülfe des geradlinigten Transporteurs, oder vermittelst anderer Methoden (§. 139 u. f.) an c ein paar Winkel acd = ACD, bcd = BCD, und an d die Winkel cdb = CDB, cda = CDA, so werden sich auf dem Papiere die Linien ca, da, bey a, und cb, db, bey b schneiden, und solchergestalt die Weite ab bestimmen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe der AB gemäß seyn wird.

II. Man berechne in dem Dreyecke ACD, aus den bekanten Grössen ACD, ADC, CD die beyden Seiten CA, AD, und dann aus den Winkeln BCD, CDB und der Standlinie CD, in

in dem Dreyecke CDB die beyden Seiten CB, DB, welche Rechnung durch Logarithmen sehr geschwind von statten gehet. Beschreibe demnächst auf dem Papiere über cd (Fig. XLI) die man der CD gemäß nimt, das kleine Dreyeck cda, oder bestimme bloß den Punkt a, durch den Durchschnitt zweener Kreisbogen, die man aus c, d, mit den Halbmessern ca, da, welche man den berechneten Seiten CA, DA, gemäß nimt, beschreibt. Auf gleiche Weise wird auch mit den Weiten cb, db, die denen CB, DB gemäß gemacht worden, das Dreyeck cdb beschrieben, mithin der Punkt b, folglich auch die Weite ab bestimt.

III. Es wird sehr oft geschehen, daß die Längen ca, da, cb, db, so groß ausfallen, daß man sie mit einem Handzirkel von gewöhnlicher Grösse nicht bequem von dem verjüngten Maaßstabe abnehmen, folglich auch nicht die Dreyecke acd, cbd, beschreiben kan. In diesem Falle muß man sich entweder eines grössern Stangenzirkels bedienen, oder auf folgende Art zu Werke gehen.

Es sey Fig. XLII ABCD, noch immer das bisher betrachtete Viereck auf dem Felde. Man stelle sich von A, B, auf die Standlinie, die Perpendicularlinien AE, BF, herabgefället vor; und berechne in den rechtwinklichten Dreyecken

ACE,

ACE, BDF, die senkrechten Entfernungen AE, BF, und die Weiten CE, DF. Dies kann geschehen weil man die Seiten CA, BD, und die Winkel $ACE = 180° - ACD = 180° - \beta$, $BDF = 180° - CDB = 180° - \delta$ weiß.

Es ist nähmlich

$$\sin CAD : CD = \sin CDA : CA$$
$$\sin CBD : CD = \sin BCD : BD$$

also $CA = \frac{m \sin \gamma}{\sin A}$; $BD = \frac{m \sin \alpha}{\sin B}$

Mithin in den rechtwinklichten Dreyecken CAE, BDF, für den Sinus totus $= 1$

$$1 : \sin (180° - \beta) = AC : AE$$
$$1 : \cos (180° - \beta) = AC : CE$$
$$1 : \sin (180° - \delta) = BD : BF$$
$$1 : \cos (180° - \delta) = BD : DF$$

Man berechne also erstlich durch Logarithmen

$$\log CA = \log m + \log \sin \gamma - \log \sin A$$
$$\log BD = \log m + \log \sin \alpha - \log \sin B$$

so wird demnächst

$$\log AE = \log AC + \log \sin (180° - \beta)$$
$$\log CE = \log AC + \log \cos (180° - \beta)$$
$$\log BF = \log BD + \log \sin (180° - \delta)$$
$$\log DF = \log BD + \log \cos (180° - \delta)$$

Die

Die ganze Rechnung wird also sehr leicht durch Logarithmen geführt.

Hier in der XLII Figur, fallen beyde Perpendiculärlinien AE, BF, ausserhalb der Dreyecke ACD, CBD, und E liegt linker Hand C; F rechter Hand D. Man wird nun gar leicht aus einer roh entworfenen Zeichnung, oder auch selbst aus Beschaffenheit der Winkel an der Standlinie CD, beurtheilen können, welche Lage in jedem Falle die Punkte E, F, mithin auch die zugehörigen Perpendiculären AE, BF haben.

Nachdem man nun die Grössen CE, AE, BF, DF berechnet hat, so wird man auf dem Papiere gar leicht die Punkte a, b, Fig. XLI bestimmen können. Man nehme nemlich auf der Standlinie cd, die Weiten ce, df, denen berechneten CE, DF gemäß, errichte durch e, f, ein paar senkrechte Linien und nehme auf ihnen die Weiten ea, fb, denen EA, FB gemäß, so wird man die Weite ab auf dem Papiere erhalten welche der AB auf dem Felde gemäß seyn wird.

Um die Form der Berechnung zu übersehen, so will ich die Zahlen des obigen Beyspiels III Aufl. gebrauchen.

Diese

Diese geben demnach

log m = 3,18118
l sin α = 9,88255

13,06373
l sin B = 9,75913

log BD = 3,30460
l s(180° — δ) = 9,99819
l cos(180° — δ) = 8,95867

log BF = 3,30279
log DF = 2,26327
log m = 3,18118
l sin γ = 9,99999

13,18117
l sin A = 9,64902

log AC = 3,53215
l s(180° — β) = 9,95229
l cos(180° — β) = 9,64749

log AE = 3,48444
log CE = 3,17964

Dieß giebt also AE = 3051; CE = 1512
BF = 2008; DF = 183

Wobey

Wobey dann zu merken ist daß in diesem Beyspiele, der Punkt E rechter Hand C, und F gleichfalls rechter Hand D liegen muß, wonach man sich also bey der Zeichnung zu richten hat.

Diese Methode, die Punkte A, B, auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, hat in Absicht der gewöhnlichen, wobey man sich wohl gar des gemeinen Transporteurs zum Auftragen der Winkel bedienet sehr viele Vorzüge, ob sie gleich, wegen einiger Rechnung die aber in der That sehr leicht ist, etwas zusammengesetzter zu seyn scheint. Wenn man zum Auftragen der Winkel sich auch gleich des geradlinigten Transporteurs bedienen wolte, so wird man doch nie die Schärfe erhalten, welche man in Entwerfung der Punkte A, B, vermittelst der Perpendicularlinien EA, BF, erhält.

Wenn man ferner überlegt, wie unreine ein Riß wegen den vielen Kreisbogen die man beym Gebrauch des geradlinigten Transporteurs ziehen muß, ausfällt, wie vielen Unbequemlichkeiten besonders bey sehr stumpfen oder spitzen Winkeln der geradlinigte Transporteur unterworfen ist, wie wenig Genauigkeit man sich zu versprechen hat, wenn, wie es sehr oft zu geschehen pflegt, sich die verlängerten Schenkel der aufgetragenen Winkel,

bey

bey a, b, unter sehr spitzen Winkeln durchschneiden, und sich folglich sehr an einander fortschleifen, wie viel Fehler man überhaupt beym Auftragen der Winkel, noch aus sehr vielen andern Ursachen zu befürchten hat, so wird man gewis eine kleine Berechnung der Perpendiculärlinien, EA, CE, nicht scheuen, und da bey Entwerfung mehrerer Oerter in Absicht der Standlinie, einige derselben oft sehr weit von der Standlinie wegfallen, so wird man durch die Grösse der berechneten Perpendiculärlinien AE, CE u. s. w. schon ohngefähr einen Ueberschlag machen können, theils, wie man die Standlinie auf dem Papiere am bequemsten legen, theils auch wie groß man den verjüngten Maaßstab nehmen müsse, damit man alle Oerter auf der vorgegebenen Grösse des Papiers erhalte, und nicht einige ausserhalb desselben fallen. Uebrigens geschiehet es bey Vermessung ganzer Landschaften, sehr oft, daß man die Entfernung solcher Oerter die man schon zu Papiere gebracht hat, wieder zu neuen Standlinien und zur Bestimmung anderer Oerter gebraucht, und da ist es schlechterdings nothwendig auf ihre Verzeichnung alle mögliche Sorgfalt zu wenden, weil sich sonst Fehler auf Fehler häufen, und alle Arbeit vergeblich seyn würde. Nie wird man aber durch würkliche Auftragung der Winkel, die zu dieser Absicht nöthige Genauigkeit erhalten.

Anmerkungen die Standlinie betreffend.

§. 185. I. Wenn die Punkte A, B auf dem Felde sowohl unter sich als auch von der Standlinie sehr weit wegliegen, und es die Umstände nicht zulassen, die Standlinie CD sehr groß und bequem anzunehmen, so werden die Winkel CAD, CBD in solchem Falle oft sehr klein werden, und dieses verursacht, 1) daß sich die Linien CA, DA, CB, DB, sehr aneinander fortschleifen, wodurch also auf dem Meßtische, wo die gezogenen Linien eine körperliche Dicke haben, selten recht genau die wahren Durchschnittspunkte angegeben werden. 2) daß die Weite AB dennoch sehr unsicher gefunden wird, wenn man auch gleich die Winkel mit dem Astrolabio messen, und AB durch Rechnung finden wolte. Denn die Folge wird lehren, daß, wenn die Winkel CAD, CBD, sehr klein werden, folglich ACD + ADC oder BCD + BDC sehr nahe an 180° kommen, alsdann kleine Fehler, die man bey Messung der Winkel an beyden Standpunkten begehet, auf die gesuchte Weite AB, sehr großen Einfluß haben, und sie mit einer desto grössern Unrichtigkeit geben, je kleiner CAD, CBD sind.

Zur Richtigkeit des Verfahrens, muß man also 1) eine sehr kleine Standlinie vermeiden, 2) dafür sorgen, daß man an ihr nicht zu stumpfe

oder spitze Winkel erhält. Oft läst sich aber wegen der unbequemen Lage der Gegend, keine Standlinie unmittelbar messen die den erwähnten Bedingungen ein Gnüge leistet Wie wird man also bey solchen Umständen verfahren?

Es sey Fig XLIII. AB die auszumessende Entfernung; die Gegend verstatte es nicht eine größere und bequemere Standlinie als die CD unmittelbar zu messen. Da nun CD so liegt daß z. E. bey D ein paar sehr stumpfe Winkel CDA, CDB, vorkommen, und dieses der Richtigkeit in Bestimmung der Weite AB nachtheilig ist, so wähle man eine andere Standlinie CE, wenn man sie gleich nicht unmittelbar messen kan, und nehme sie von einer solchen Grösse, und Lage, wie nach den vorhergehenden Bedingungen erfordert wird. Da man sie aber nicht unmittelbar messen kan, so bediene man sich der erstern Standlinie CD, und bestimme aus ihr die zwote CE; hier würde man also z. E. bey C, D, die beyden Winkel DCE, CDE, messen, und in dem Dreyecke CDE, aus den erwähnten Winkeln, und der unmittelbar gemessenen CD, die neue Standlinie CE berechnen. Dieser Standlinie CE bediene man sich nun zur Bestimmung der Weite AB, indem man an ihr, die Winkel ACB, ACE, CEA, CEB misset ꝛc. so wird man AB gewiß viel richtiger finden, als es vermittelst der bloßen Standlinie CD geschehen könte.

Fände man, daß die neue Standlinie CE noch nicht groß genug wäre, oder gegen AB eine schickliche Lage hätte, so könte man aus der CE, abermahls eine neue Standlinie bestimmen, und auf diese Art so lange fortfahren, bis man für AB eine schickliche und gehörige Standlinie erhielte.

Dieses Mittel aus einer kleinen und unschicklichen Standlinie wie CD, immer zu größern und bequemern fortzugehen, lehret und empfiehlt Taquet (S. dessen Opera mathem. Antwerp. 1707. Geom. pract. lib. I. Cap. V. Probl. III.)

II. Wenn in den bisherigen Auflösungen der vorgelegten Aufgabe, die angenommene Standlinie horizontal ist, und die Winkel an ihr auch horizontal gemessen werden, so erhält man durch Rechnung oder Zeichnung, eigentlich den Horizontalabstand der Objekte A, B, und diesen verlangt man doch gewöhnlich, sowohl bey Entwerfung ganzer Landschaften, als auch, wenn man von der bloßen Entfernung der Gegenstände A, B, redet.

Die Winkel kan man nun in den meisten Fällen immer horizontal messen, wenn das Werkzeug mit einer Kippregel versehen ist, die man beym horizontalen Stande des Instruments, nach den erhabenen Gegenständen A, B, hinrichtet. Hat aber das Werkzeug keine Kippregel, so

BIBLIOTEKA SEMINARIUM

so muß man an den Standpunkten die schiefen Winkel messen, und aus den Neigungen ihrer Schenkel gegen den Horizont, welche man entweder nach dem Augenmaaße annehmen, oder auch selbst messen kan, die Horizontalwinkel nach den Vorschriften des X Kapitels durch Rechnung bestimmen.

Die Standlinie läst sich aber nicht immer genau horizontal annehmen u. messen. In diesem Falle muß man aus den Umständen beurtheilen, ob man ihre Schiefe, wenn sie nicht sehr beträchtlich ist, ausser Acht lassen kan, oder ob man genöthigt ist, ihre horizontale Grösse durch Nivelliren, oder nach andern Metoden wie z. E. nach den §§ 38. 41. 44 u. s. w. zu bestimmen.

III. Bey Entwerfung ganzer Landschaften, nimt man oft die Entfernung zwoer Bergspitzen, zweener Thürme u. s. w. zu Standlinien an. Diese Standlinien kan man selten unmittelbar messen, und selten liegen die Standpunkte in einer Horizontalebene. In diesem Falle werden nun dergleichen Standlinien nach der Methode (I) aus einer andern vorher durch Rechnung bestimt.

Aufgabe.

§. 186; A, B, C Fig. XLIV sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander bekant

kant ist; D ist ein vierter Ort; man soll finden, wie weit er von denen A, B, C, entfernt ist.

Aufl. Um die Lage der drey Objekte zu bestimmen, so seyen in dem Dreyecke ABC, gegeben, oder bekant, die Seiten AB = b, BC = c und der eingeschlossene Winkel ABC = β. Es erhellet, daß man auch andere Stücke des Dreyecks als gegeben ansehen könne, wenn sie nur das Dreyeck bestimmen.

II. Man messe nun an dem Orte D, die beyden Winkel ADB = δ, BDC = ε, so werden sich daraus die Entfernungen AD, BD, DC durch trigonometrische Rechnung finden lassen.

II. Man nenne den unbekanten Winkel BAD = x, so ist in dem Vierecke ABCD, der Winkel

$$\begin{aligned} BCD &= 360^\circ - ABC - BAD - ADC \\ &= 360^\circ - \beta - x - \delta - \varepsilon \\ &= \mu - x \end{aligned}$$

wenn man der Kürze halber

$$360^\circ - \beta - \delta - \varepsilon = \mu \text{ nennet.}$$

IV. Nun hat man in den beyden Dreyecken BAD, BDC

$$\sin ADB : AB = \sin BAD : BD$$
$$\sin BDC : BC = \sin BCD : BD$$

oder $\sin \delta : b = \sin x : BD$
$\sin \varepsilon : c = \sin(\mu - x) : BD$

also $BD = \frac{b \sin x}{\sin \delta}$; $BD = \frac{c \sin(\mu - x)}{\sin \varepsilon}$

folglich $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \frac{\sin(\mu - x)}{\sin x}$

Aber aus (Trig. S. XII. 2) folgt

$$\frac{\sin(\mu - x)}{\sin x} = \frac{\sin \mu \cos x - \sin x \cos \mu}{\sin x}$$
$$= \sin \mu \cot x - \cos \mu$$

also ist $\cos \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \sin \mu \cot x$

Mithin wegen $\frac{\cos \mu}{\sin \mu} = \cot \mu$ Der Werth von

$$\cot x = \cot \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu}$$

V. Ist nun auf solche Art der Winkel x gefunden, so hat man aus (IV) auch die Weite BD, und in den Dreyecken ABD, BCD ist genug bekant, um die Seiten AD, CD durch Rechnung zu finden.

VI. Bey Berechnung der Cotangents des Winkels x ist zu bemerken, daß alle trigonometrische Linien für den Sinus totus = 1 genom-

men werden müssen, und wenn für cot x ein negativer Werth herauskömt, so zeigt dieses an, daß der Winkel x stumpf sey. Man suche also in solchem Falle einen spitzen Winkel dessen Tangente eben den bejahten Werth hat, addire zu diesem Winkel 90°, so hat man den eigentlichen stumpfen Winkel x.

Ex. es sey $\beta = 115°$; $\delta = 25°$; $\varepsilon = 45°$; b = 1112 Fuß, c = 2000 Fuß, so wird $\mu = 175°$ mithin

	log b	= 3,0461048
	log sin ε	= 9,8994850 — 10
	log b sin ε	= 2,8955898
Ferner	log c	= 3,3010300
	log sin δ	= 9,6259483 — 10
	log sin μ	= 8,9402960 — 10
	l c sin δ sin μ	= 1,8672743 daher

$$l\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 1{,}0283155$$

welches die Grösse $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 10{,}67371$ giebt

Nun ist cot μ = cot 175° = cot (90°+85°) = — tang 85° (Trig. S. XXII) = —11,43005 dies giebt demnach

cot x = —11,43005 + 10,67371 = —0,75634

da

Da also hier cot x verneint wird so ist x stumpf.

Man suche also einen spitzen Winkel dessen Tangente 0,75634 ist — Man findet ihn in den Tafeln = 37° 6′ addire 90° dazu so wird x = 127° 6′.

Die Berechnung der Seiten AD, BD, CD, werde ich hier nicht vornehmen, denn sie ist, nachdem man den Winkel BAD = 127° 6′, mithin auch die übrigen Winkel ABD, DBC, BCD, gefunden hat, nach den Proportionen

sin δ : b = sin x : BD

sin δ : b = sin ABD : AD wo ABD = 180° — x — δ

u. s. w.

gar leicht durch Logarithmen anzustellen.

VII. So kan man, indem man bloß an dem Standpunkte D, die zween Winkel δ, ε misset, leicht die Weiten AD, BD, DC durch Rechnung, so genau man will finden. Man kan aber wenn es um keine sehr große Schärfe zu thun ist, die Weiten AD, BD, DC durch eine geometrische Konstruction finden.

Nachdem man in Fig. XLV ein Dreyeck abc, auf dem Papiere beschrieben hat, welches dem ABC auf dem Felde ähnlich ist, so beschreibe man ferner über der Seite ac einen Kreiß, der-

gestalt, daß ac die Chorde eines Bogens amc werde, der doppelt so groß ist, als das Maaß, des auf dem Felde observirten Winkels ADC. Nehme hierauf von a bis m die Chorde eines Bogens am der doppelt so groß ist als der auf dem Felde beobachtete Winkel ADB, ziehe durch m, b, eine gerade Linie mbd, so wird diese bey d im Umfange des Kreises einen Punkt bestimmen, der gegen die Punkte a, b, c eben so liegt, wie D auf dem Felde in Absicht der Oerter A, B, C; und die Weiten ad, bd, dc, werden denen AB, BD, DC auf dem Felde gemäß seyn.

Bew. Denn weil der Winkel adc am Umkreise zu seinem Maaße den halben Bogen amc hat, und der Bogen amc doppelt so viel Grade ꝛc. hält, als der Winkel DC auf dem Felde so ist klar, daß der Winkel adc = ADC seyn müsse.

Auf eben die Art ist auch der Winkel adb vermöge der Konstruction = ADB.

Es muß also der Punkt d gegen die drey a, b, c nothwendig eben die Lage haben, welche D gegen A, B, C, hat, weil durch das Dreyeck abc, und die beyden Winkel adb, adc, der Punkt d, völlig so bestimmt ist, so wie es D vermöge des Dreyecks ABC, und der beyden Winkel ADB, ADC ist.

Mithin

Mithin müssen die Weiten ad, bd, cd, nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man das Dreyeck abc aufgetragen hat, denen AD, BD, CD gemäß seyn.

VIII. Wegen der Ziehung des Kreises amcd, muß ich noch folgendes erinnern.

Um dessen Halbmesser zu finden bediene man sich des geradelinigten Transporteurs oder noch besser eines tausentheiligten Maaßstabes auf folgende Art.

Man verzeichne Fig. XLVI einen willkürlichen Winkel KIM, trage von I bis K, den Halbmesser des geradelinigten Transporteurs, oder tausend Theile des tausentheiligten Maaßstabes, von I bis L die Chorde oder Seite ac des Dreyecks abc, Fig. XLV, von I bis M die Chorde des doppelten Winkels ADC oder adc nach dem tausentheiligten Maaßstabe; (z. E. die Chorde von $2(\delta+\varepsilon) = 140°$ in dem Beyspiele VI) ziehe durch K, M, eine gerade Linie und durch L mit KM eine parallele, so wird, wie sich leicht übersehen läßt, IN der Halbmesser eines Kreises seyn, für welchen ac die Chorde von 2. adc $= 2(\delta+\varepsilon)$ ist. Man fasse also IN mit dem Zirkel, und beschreibe aus a, c, ein paar sich beyn durchschneidende Kreisbogen, so wird n der Mittelpunkt des zu ziehenden Kreises amcd seyn.

Um

Um die Chorde am einzutragen so trage man Fig. XLVI von l bis r die Chorde des doppelten Winkels ADB = δ, nach dem tausentheiligten Maaßstabe, und ziehe hierauf mit Kr, durch N eine parallele Np, so wird lp die Chorde eben dieses Winkels, für den Halbmesser des Kreises amed seyn, die man daher von a bis m in den Kreiß einzutragen hat.

Hrn. Mech. Branders mechanische Auflösung dieser Aufgabe.

§. 187. H. M. Br giebt dieselbe in seiner Beschreibung eines Meßtisches, am Ende seines Aufsatzes, und verfährt auf dem Felde folgendergestalt. Fig. XLVII.

Man bringe über den Standpunkt D das Meßtischgen und bestimme auf demselben den Punkt d, lothrecht über D. Aus d ziehe man auf dem Papiere nach den Objecten A, B, C, die Richtungslinien dα, dβ, dγ. Nun seyen OE, OF ein paar Liniale dergestalt mit einander verbunden, daß sie, wie die Figur ausweiset, um eine Axe bey O, ohngefähr wie die Schenkel eines Zirkels um ihren Kopf, beweglich sind und durch eine Schraube nach Gefallen in jeder Oeffnung festgehalten werden können.

Beyde

Beyde Liniale OE, OF, seyen bey i, k, mit ein paar Hülsen versehen, an denen sich sehr scharfe stählerne Spitzen, oder Stifte a, c, befinden, welche sich zugleich mit den Hülsen längst den Linialen verschieben lassen. Unter dem Umdrehungspunkt O, befinde sich eine dritte dergleichen Spitze b. So stellet also dieses Werkzeug gleichsam einen dreyspitzigten Stangenzirkel vor, und durch gehörige Verschiebung der Hülsen sowohl, als auch durch gehörige Oefnung der beyden Liniale wird man machen können, daß zwischen den drey Spitzen, a, b, c ein beliebiges Dreyeck enthalten ist. Um nun dieses Werkzeug zu gegenwärtiger Absicht zu brauchen, so fasse man auf einem verjüngten Maaßstabe, zwischen die drey Spitzen, a, b, c, die drey Seiten des Dreyecks ABC, so, daß die Weiten ab, bc, ac, denen AB, BC, AC gemäß werden. Setze nun den Stangenzirkel auf die gezogenen Richtungslinien $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dergestalt, daß jede Spitze a, b, c auf die entsprechende Richtungslinie $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ zu stehen komme, mithin das kleine Dreyeck abc auf dem Meßtische gegen den Punkt d, eben die Lage bekomme, die das Dreyeck ABC gegen D hat, so wird man auf dem Meßtische die Weiten da, db, dc erhalten, welche nach dem verjüngten Maaßstabe, denen DA, DB, DC gemäß seyn werden.

Die-

Dieses ist ein Verfahren, welches nach der Versicherung Hrn. Branders auf dem Felde sehr geschwind von statten gehet.

Statt eines solchen Stangenzirkels mit drey Spitzen könte man sich auch Handzirkel bedienen, die mit drey Schenkeln versehen sind, dergleichen man unterweilen in Reiszeugen antrift, und in **Leupolds Theatro Machinarum Geom.** beschrieben findet.

Zus. Weil die Entfernungen da, db, dc, ab, bc, denen DA, DB, DC, AB, BC gemäß sind, weil folglich in den Dreyecken dab, DAB da : ab = DA : AB und in den Dreyecken dbc, DBC, dc : cb = DC : CB ist, so sind die Seiten ab mit AB und bc mit BC und auf eben die Art auch ac mit AC parallel.

Anmerkungen.

§. 188. I. Diese Aufgabe, ist nicht nur, wie bisher gelehret worden, in Messung der Weiten von grossem Nutzen, sondern kan auch selbst bey Entwerfung ganzer Landschaften mit Vortheil angewandt werden.

Hr. **Clairaut** (Anfangsgr. d. Geom. aus dem Französischen von **J J Bierling** III. Theil §. XXII). und Hr. **Lambert** in seinen **Beyträgen zur practischen Geometrie** §. 109 behandeln die bisherige Aufgabe gleichfalls und empfehlen sie den Feldmessern.

II.

II. Bey Auflösung der bisherigen Aufgabe siehet man den Lothrecht über D liegenden Punkt d auf dem Meßtische als gegeben an, und bestimt die Weiten da, dò, dc, dadurch, daß man dem ganzen Dreyecke abc, seine gehörige Lage gegen d giebt. Die Auflösung würde aber ganz anders ausfallen, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische bereits vorgezeichnet wäre, und der Punkt d gesucht werden solte. In diesem Falle würde offenbar Hrn. Branders Auflösung einiger Abänderung bedürfen. Indessen ist aber die letztere Frage, ungleich wichtiger bey Entwerfung der Landschaften. Wenn es bloß darum zu thun ist, die Weiten DA, DB, DC auf dem Felde zu bestimmen, so kan man nach Hrn. Branders Art verfahren; Wenn aber A, B, C, drey Oerter auf dem Felde sind die man bereits durch a, b, c, auf dem Meßtische entworfen hat, und soll nun den Standort des Meßtisches D, durch den Punkt d auf dem Meßtische angeben, so daß d gegen die bereits verzeichneten Punkte a, b, c, eben die Lage bekömt, die D gen A, B, C, hat, so muß man offenbar auf eine andere Auflösung bedacht seyn.

Man siehet leicht, daß in dem letztern Falle die Hauptsache darauf ankomme, den Meßtisch so zu stellen, daß die Seiten ab, bc, ca, mit den zugehörigen AB, BC, AC, eine parallele Lage erhalten (§. 187. Zus.) denn unter solchen Umständen,

ständen, darf man nur an die Punkte a, b, c die dioptrische Regel legen, nach den Objekten A, B, C visiren, und die Richtungslinien αa, βb, γc, rückwärts verlängern, so werden sie sich insgesamt auf dem Meßtische bey d durchschneiden, und solchergestalt den verlangten Punkt d angeben, der gegen a, b, c, dieselbe Lage haben wird, die D gegen A, B, C, hat.

In der Folge werde ich nun zeigen, wie man bey D dem Meßtische eine solche Lage geben könne, daß ab, bc, ac den zugehörigen Linien auf dem Felde AB, BC, AC parallel werden.

III. In der bisherigen Aufgabe liegen die drey Punkte A, B, C nicht in einer geraden Linie; sie können aber auch wie in der Fig. XLVIII in einer geraden Linie liegen, und so ist dieses alsdenn ein besonderer Fall der allgemeinen Auflösung in §. 186 III. IV. Es ist alsdenn der dortige Winkel β hier $= 180°$, und der gesuchte Winkel x, hier der DAC.

Nicht gar zu große Weiten aus einem einzigen Stande zu messen.

§. 189. 1. Man hat verschiedene Werkzeuge ausgedacht, aus einer sehr kleinen Standlinie z. E. nur von einigen Fussen, dennoch mit erträglicher Genauigkeit, Entfernungen zu messen, und man nennet diese Messungsart, die Messung aus

aus einem einzigen Stande, weil man eine so kleine Standlinie, ohne sich weit von der Stelle zu bewegen, erhalten und messen kan. Um nun aus so kleinen Standlinien, Entfernungen zu messen, so sind die zu dieser Absicht erfundenen Werkzeuge vorzüglich dahin gerichtet, die sogenanten parallactischen Winkel mit grosser Schärfe zu messen.

2. Es sey Fig. XLIX AB eine sehr kleine Standlinie, und C ein Gegenstand, dessen Weite CA oder CB man finden soll, so heist der Winkel ACB, welcher der Standlinie AB gegenüber stehet, der parallactische Winkel, oder die scheinbare Grösse der Standlinie am Punkte C.

3. Nun erhellet, daß, wenn AB sehr klein, AC, BC, aber beträchtlich groß sind, auch der parallactische Winkel C sehr klein seyn werde.

4. Da eine so kleine Standlinie immer nach unserer Willkühr gelegt werden kan, so kan man AB so annehmen, daß der Winkel CAB ein rechter ist, oder wenigstens einem rechten sehr nahe kömt. Geschiehet dieses, so wird auch B beynahe ein rechter Winkel seyn; daher kan man ohne merklichen Irrthum ACB als ein gleichschenklichtes Dreyeck ansehen, und es erhellet, daß man aus der Grösse des parall. Winkels C und der Standlinie AB, die Weiten AC, BC durch Rechnung finden könne. Es wird nemlich

$\sin C : AB = \sin tot : BC$ oder $BC = AC = \frac{AB}{\sin C}$ weil ich $\sin tot = 1$ setze. Ist nun C sehr klein, mithin ohne merklichen Irrthum $\sin C = C$ (oder $= \frac{C}{206264}$ wenn C in Sekunden gegeben wäre), so findet sich

$$BC = AC = \frac{AB}{C} \cdot 206264$$

5. Es kömt also nur darauf an, den parallactischen Winkel C ausfindig zu machen. Am besten wäre es, wenn man würklich nach C hinkommen und diesen Winkel messen könte. Da dieser Winkel sehr klein ist, so würde man ihn bloß, ohne einen Winkelmesser, vermittelst eines Fernrohres, das mit einem Micrometer versehen wäre (§.182 u. f.) messen können, wenn man nemlich untersuchte, wie viel Schraubenumdrehungen, oder Abtheilungen eines Glasmicrometers, dem Bilde der Standlinie AB im Fernrohre bey C, zugehörten. Vorausgesetzt, daß des Fernrohrs Feld, die scheinbare Grösse ACB noch fasset.

6. Weil man aber auf solche Art, sich von dem Standorte bey A oder B wegbegeben müste, und die Absicht ist, bloß bey A oder B sogleich die Grösse des parallactischen Win-

Winkels C auszufinden, so hat man andere Werkzeuge und Hülfsmittel erfunden, diesen Endzweck zu erreichen.

7. Man könte denken, wozu sind neue Werkzeuge nöthig? Man messe mit dem Astrolabio bey A, B, die beyden Winkel A, B, so hat man auch $C = 180° - A - B$

8. Allein man überlege, daß, wegen der geringen Grösse der Standlinie AB, theils das Werkzeug nicht mit der gehörigen Genauigkeit gestellet werden kan, theils auch die geometrischen Winkelmesser von gewöhnlicher Grösse, bey weitem nicht die gehörige Schärfe, bey Ausmessung dieser Winkel verstatten. Denn man müste A, B, wenigstens bis auf einige wenige Sekunden genau messen können, wenn man den parallactischen Winkel so genau finden wolte, als beym Gebrauche einer so kleinen Standlinie nothwendig ist. Wie würde man aber dieses von Astrolabiis, die einen, oder wohl selbst $1\frac{1}{2}$ Fuß, im Durchmesser hätten, erwarten können? Andere Hindernisse zu geschweigen.

9. Man stelle sich Fig. L durch A, B ein paar parallele Linien, Am, Bn vor, die mit CA, CB, die kleinen Winkel mAC, CBn machen; auch durch C mit mA, nB, eine parallele Cr, so wäre der parallactische Winkel ACB bekannt, wenn man die kleinen Winkel mAC, CBn wüste. Denn hier

wäre z. E. ACB = ACr + rCB = mAC + cBn, weil die Linien parallel sind.

10. Oder man gedenke sich in Fig. LI durch A mit BC eine parallele Aw so hätte man gleich. falls den parallactischen Winkel, wenn man CAw messen könte.

11. Auf diese beyden letztern Sätze (10. 11) gründen sich nun die Werkzeuge, parallactische Winkel zu messen, ohne selbst nach C hinzugehen, und da die Winkel, wie mAC, nCB, (10) CAw (11) nur klein sind, so erhellet, daß zur Messung derselben kein eingetheilter Rand von vielen Graden nöthig sey;

12. Ob aber gleich dieses ein Vortheil, und eine Ersparung der Kosten zu seyn scheinet, so darf man doch nicht erwarten, dergleichen Werkzeuge, so kleine Winkel zu messen, für einen wohlfeilen Preis zu bekommen. Um hievon überzeugt zu werden, so will ich nur einen ganz kurzen Begrif, von dem zu dieser Absicht erfundenen Paceccianischen Pantometro beybringen.

13. Dieses Werkzeug bestehet Fig. LII aus zwoen hölzernen Tafeln A, B, die bey m, n durch Gewinde an einander hängen, und zusammengelegt werden können. OO, oo, sind zwey Fernröhre, wenigstens $1\frac{1}{2}$ Fuß lang, davon das oo unbeweglich ist, das andere OO aber, mit einer

einer Alhidadenregel, um das Centrum c, eben wie bey einem Winkelmesser gedrehet werden kan; de ist ein in die hölzerne Tafel A eingelassenes Stück Messing, worauf aus dem Mittelpunkt c einige Bogen gerissen sind, worauf sich Gradabtheilungen befinden, über die sich ein Index, bey Umdrehung der Alhidadenregel verschiebt; die sanften Umdrehungen des Fernrohres, erhält man aber vermittelst einer Micrometerschraube bey r.

Die Axen der beyden Fernröhre können nun vermittelst sehr weit entlegener Gegenstände, oder auf andere Arten, genau in eine parallele Lage gebracht werden, und wenn sie vollkommen parallel sind, so beträgt ihr Abstand Oo etwa 4 bis 5 Fuß, den man aber übrigens sehr genau abmessen muß, weil er bey Bestimmung der parallactischen Winkel, die Standlinie abgiebt.

14. Der Gebrauch dieses Instruments ist nun dieser.

Bey Ausmessung eines parallactischen Winkels C, Fig. LI bedeute AB, den Abstand der beyden parallel gestellten Fernröhre (13). Man bringe nun durch gehörige Stellung des ganzen Werkzeugs, das unbewegliche Fernrohr oo genau in die Richtung nach C. so wird das bewegliche OO weil es dem unbeweglichen parallel ist, die Richtung Aw, haben, die der BC gleichlaufend ist. Das

Objekt C, wenn es also in der Axe des unbeweglichen Fernrohrs erscheinet, wird nicht zugleich in der Axe des beweglichen erscheinen, sondern, um den parallactischen Winkel wAC = ACB davon abstehen. Drehet man also das bewegliche Fernrohr bis das Objekt C in dessen Axe erscheinet, so wird man sowohl durch Umdrehung der Micrometerschraube als auch durch Fortrücken des Indicis auf den Gradabtheilungen, die Grösse des parallactischen Winkels CAw erfahren.

15 Dieser ganz kurze Unterricht, wird nun schon einigermaaßen, zu erkennen geben, worauf es bey dergleichen Werkzeugen ankomme; zugleich wird man aber ohne Mühe bemerken, wie viele Beschwerlichkeiten, so wohl in Absicht der Stellung des Werkzeugs, als auch noch sehr vieler andern Ursachen, zu befürchten sind. Daß aber ein solches Werkzeug, wenn alle Theile desselben sehr fleißig und dauerhaft gearbeitet seyn, und alle nöthige Vollkommenheit haben sollen, um keinen geringen Preiß verfertigt werden könne, wird man leicht begreifen.

16. Man hat zwar noch andere Erfindungen, durch Hülfe einiger Spiegel, in Verbindung mit einem Fernrohre, parallactische Winkel zu messen; aber immer bleiben doch dergleichen Werkzeuge sehr kostbar.

Das

Das in (13) beschriebene Werkzeug rührt vom Grafen *Pacecco ab Ucedos* her und man hat davon eine Beschreibung unter dem Titel *Pantometrum Paceccianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione Distantia loci inaccessa* welche vom Hrn. P. Mayer zu Manheim 1767 herausgekommen ist. In dieser Schrift wird erwähnt, daß der Churfürst von der Pfalz für dieses Instrument 1000 Gulden bezahlt habe.

Wenn auch gleich dieses Werkzeug für einen wohlfeilern Preiß verfertigt werden könte, so sehe ich doch nicht ein, warum man, blos um Weiten aus einem einzigen Stande zu messen, die Kosten an ein solches, zu anderen Vermessungen, sonst unbrauchbares Werkzeug, verwenden will. Und dennoch geben sehr kleine parallactische Winkel, die Entfernungen nicht einmal mit erträglicher Schärfe; und wenn kömt eben der Fall vor, daß es nothwendig ist, aus sehr kleinen Standlinien Weiten zu messen? — Meistens wird man doch auf dem Felde, immer Standlinien von erträglicher Länge finden, mithin das bloße Astrolabium zu Messung der Winkel gebrauchen können.

Indessen hat doch die Societät der Wissenschaften in Koppenhagen, eine Preißfrage fürs Jahr 1778 aufgegeben, worin die beste Einrichtung solcher Instrumente Weiten aus einem

Stande zu messen, und dann die damit zu erhaltende Genauigkeit, verlangt wird. (S. die Leipz. Gelehrten Anzeigen 1777. das Stück vom 12 Jun.) Ich zweifle ob ein einfacheres, als das Paceccianische Pantometrum, die Frage beantworten wird.

XVI. Kapitel.

Von Ausmessung der Höhen.

§. 190. Aufg. Die Höhe KI Fig. LIII eines Objekts K, über der Horizontallinie IC zu messen; vorausgesetzt, daß man von einem angenommenen Stande C horizontal nach I hinmessen kan.

Aufl. Man bringe den Winkelmesser über C dergestalt, daß ein Loth aus des verticalgestellten Werkzeugs Mittelpunkt c gerade auf C treffen würde, und messe nach §. 155 den Verticalwinkel Kcw, wo cw eine Horizontallinie bedeutet. Da ich nun KI auf der Horizontalfläche senkrecht annehme, welches z. E. bey Thürmen u. s. w. statt findet, so ist Kwc ein rechtwinklichtes Dreyeck, und wc = CI. Man messe also CI, so kan man in dem Dreyecke Icw die Höhe Kw finden, wenn man schliesset cw oder CI : Kw =

sin

sin tot : tang Kcw. dies giebt für sin tot = 1, Kw = Cl. tang Kcw mithin KI = Kw + wI = Kw + cC = Cl tang Kcw + cC, wo cC die Höhe des Werkzeugs über dem Boden bedeutet, die man leicht messen kan.

§. 191. **Aufg.** Wenn man auf der Horizontalebene ICD, von dem angenommenen Standpunkte C, nicht nach I hinmessen kan, demohnerachtet die Höhe KI zu finden.

Aufl. In diesem Falle nehme man eine Standlinie CD an, dergestalt aber, daß CD, mit KI in einer und derselben Ebene KID liege.

Man messe hierauf, wie in der ersten Aufgabe, über C den Verticalwinkel Kcw, und bemerke zugleich den Punkt w, welchen an dem Objekte KI, das horizontalgestellte Fernrohr co bedecket.

Hierauf bringe man den Winkelmesser über D, erhöhe das Stativ so lange, bis man durch den horizontalgestellten Tubum γo, wieder das bey w bemerkte Zeichen wahrnimt; und messe demnächst den Verticalwinkel Kγw so wird man aus den beyden Verticalwinkeln Kcw = α Kγw = β, und der gemessenen Standlinie CD = cγ, = b, die Höhe Kw auf folgende Art berechnen.

In dem Dreyecke Kcγ ist der Winkel cKγ = α — β

Mithin

$\sin(\alpha - \beta) : b = \sin\beta : Kc$ also $Kc = \frac{b \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; Ferner $Kc : Kw = \sin tot : \sin\alpha$

mithin $Kw = Kc \sin\alpha = \frac{b \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

Also durch Logarithmen

$\log Kw = \log b + l\sin\alpha + l\sin\beta - l\sin(\alpha - \beta)$

Hat man Kw gefunden, so addiret man des Werkzeugs Höhe $cC = \gamma D$ hinzu, um die ganze Höhe Kl zu erhalten.

Zus I. Das bey w bemerkte Zeichen dienet eigentlich dazu, bey der zwoten Station D, dem Werkzeuge wieder genau dieselbe Höhe über dem Horizonte zu geben, die es beym ersten Stande hatte.

Läst sich bey w kein Merkmahl an dem Objekte Kl finden, so stecke man in einiger Entfernung von C, bey L einen Stab, in die Verticalebene des auszumessenden Winkels ab, und lasse auf ihm von einem Gehülfen den Punkt e bemerken, auf den die Axe des horizontalgerichteten Fernrohres co hintrift. Alsdann braucht man beym zweiten Stande D sich nur nach den Punkt e zu richten.

Zus.

Zus. II. In den meisten Fällen kan man an beyden Stationen C, D, die Höhen des Werkzeugs cC, γD, ausser Acht lassen, besonders wenn die Standpunkte C, D, einigermaassen weit von dem Objekte Kl entfernt sind. Denn es verursacht in Bestimmung der Höhe Kw keinen merklichen Irrthum, wenn gleich über dem Standpunkte D das Werkzeug z. E. einen halben Fuß höher oder niedriger stände, als bey C

§ 192. Aufg. Eine Höhe Kl Fig. LIV. Tab. IV zu finden, wenn man von einem angenommenen Standpunkt c, nicht horizontal nach l hinmessen kan, sondern genöthigt ist, die Standlinie cl schief anzunehmen.

I Fall, wenn c höher liegt als l.

Man bringe bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, das Fernrohr in eine horizontale Richtung co, welche verlängert bey m in das verticale Objekt Kl einschneide. Man richte nun das Fernrohr nach K, und dann nach l, und messe die beyden Verticalwinkel Kcm, mcl, so wird sich aus diesen beyden Winkeln Kcm = α, mcl = β, und der gemessenen schiefen Linie cl = a, die Höhe Kl auf folgende Art bestimmen.

In dem rechtwinklichten Dreyecke Kcm ist der Winkel K = 90° — Kcm = 90° — α

Man

Man schließe also in dem Dreyecke Kcl

$\sin K : cl = \sin Kcl : Kl$ oder

$\cos \alpha : a = \sin(\alpha+\beta) : Kl$

dies giebt also $Kl = \frac{a \sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha}$

II Fall, wenn, wie in Fig. LV, c niedriger liegt als l. Dann messe man die beyden Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, $mCl = \beta$, so ist jetzt in dem Dreyecke Kcl der Winkel $K = 90° - \alpha$ und $Kcl = \alpha - \beta$, und daher wegen $\sin K : cl = \sin Kcl : Kl$, wird jetzt

$$Kl = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

wo man sowohl im ersten, als zweiten Fall die gesuchte Höhe durch Logarithmen findet.

§. 193. Aufg. Eine Höhe Kl Fig. LVI zu finden, wenn man genöthigt ist, die Standlinie auf einer schiefen Ebene anzunehmen, und man von dem ersten Standpunkte c nicht, wie in vorhergehender Aufgabe, gerade zu, nach l hinmessen kan.

Aufl. Man nehme eine Standlinie $c\gamma$ an; und messe erstlich bey der Station c, wo cm die verlängerte Axe des horizontal gerichteten Fernrohres bedeutet, den Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, und Depressionswinkel $mcl = \beta$.

Hier-

Hierauf messe man an der zwoten Station, γ, wo γn, eine Horizontallinie bedeutet, auf gleiche Weise den Elev Winkel $n\gamma K = \gamma$, und Depress. Winkel $n\gamma I = \delta$.

Wenn nun die gemessene Standlinie $c\gamma = a$ heist, so wird die Höhe KI auf folgende Art berechnet.

Der Kürze halber benenne man den Winkel $K\gamma I = \gamma + \delta$, mit dem Buchstaben ε.

So ist in dem Dreyecke $Kc\gamma$ der Winkel

$$cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \beta - \varepsilon$$

und $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$ dies giebt

$$Kc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

Nun ist der Winkel $I = 90° - mcI = 90° - \beta$ und $\sin I : Kc = \sin KcI : KI$ oder

$$\cos \beta : \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)} = \sin (\alpha + \beta) : KI$$

also

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

mithin durch Logarithmen

$$\log KI = \log a + \log \sin \varepsilon + \log \sin (\alpha + \beta) - (\log \cos \beta + \log \sin (\alpha + \beta - \varepsilon)$$

Zus.

Zus. Die gegebene Auflösung gründet sich darauf daß die Punkte c, γ höher als I liegen, es ist keine Schwürigkeit auch eine Formel zu finden, wenn die Punkte niedriger liegen als I, wie in der LVII Figur.

Man nenne die Winkel in dieser Figur eben so wie in der LVI Fig. nemlich mcK $= \alpha$, mcI $= \beta$; Kγn $= \gamma$, nγI $= \delta$ jetzt aber den Unterschied $\gamma - \delta$, oder den Winkel KγI $= \varepsilon$ so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha - \beta - \varepsilon)}$$

Zus. In dem Dreyecke Kγc ist (Fig. LVI)

$$\sin (\alpha + \beta - \varepsilon) : a = \sin (\alpha + \beta) : K\gamma$$

also $K\gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$; dies giebt dann ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke Kγn die Erhöhung

$$Kn = K\gamma . \sin \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

$$\gamma n = K\gamma \cos \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

Auf eine ähnliche Art findet man auch an dem Stande c, die Werthe von Km, cm,

Sol-

Solchergestalt, findet man also durch Messung der oberwähnten Verticalwinkel, nicht allein, wie hoch der Punkt K des Objekts, KI, über denen durch γ, c, eingebildeten Horizontallinien γn, cm liegt, sondern, man weiß auch wie groß die Horizontalweiten, der beyden Standpunkte c, γ, von dem Objekte KI sind.

Auf diese Art dienen also auch Verticalwinkel, selbst zu Messung der Horizontalweiten.

Anmerkung.

§. 194. In vielen Fällen, ist es unbequem, Höhen aus einer schiefen Standlinie zu messen. Auch wird hiebey zum vorausgesetzt, daß die Standlinie cγ eine gerade Linie sey, oder wenigstens von ihr so wenig abweiche, daß man den Fehler ausser Acht lassen kan. Da nun wenn z. E. Icγ die abhängige Richtung eines Berges vorstellete, die letztere Bedingung, meistens nicht statt findet, also sehr selten, längst der Anhöhe, eine beträchtlich große, und gerade Standlinie angenommen werden kan, so wird folgende Aufgabe zu Ausmessung der Höhen bessere Dienste leisten.

§. 195. Aufg. Aus einer Standlinie, die nicht, wie in vorhergehenden Aufgaben, mit der auszumessenden Höhe, in einer und derselben Verticalebene liegt, die Höhe zu finden.

Aufl.

Aufl. Man nehme Fig. LVII für die auszumessende Höhe KI (z. E. eines Berges) eine willkührliche Standlinie CD an. Hier kan CD jede Lage gegen KI haben, wenn nur CD horizontal ist, oder nicht viel davon abweicht. Man messe CD und nenne sie = a.

Man stelle sich nun bey C oder D, eine horizontalebene vor, welche die Verticallinie von der Spitze des Berges, in I durchschneide.

Um nun diese Höhe KI, über der durch C oder D gehenden Horizontalfläche zu finden, so stelle man sich die beyden Horizontallinien CI, DI gezogen vor, und messe beym Stande C erstlich den Verticalwinkel KCI = α, und dann auch den Horizontalwinkel ICD = β nach der gewöhnlichen Weise (§. 132.).

Hierauf auch bey D den Horizontalwinkel IDC = γ. So wird man daraus die Höhe KI auf folgende Art berechnen können.

In dem Dreyecke CID ist der Winkel I = $180° - ICD - IDC = 180° - \beta - \gamma$ und folglich

$$\sin(180° - \beta - \gamma) : a = \sin\gamma : CI$$

also $$CI = \frac{a \sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$$

Fer-

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke KCI

$$1 : \text{tang}\,\alpha = CI : KI$$

daher $KI = CI \cdot \text{tang}\,\alpha = \frac{a \sin\gamma \,\text{tang}\,\alpha}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$

oder durch Logarithmen, $\log KI =$

$l\,a + l\sin\gamma + l\,\text{tang}\,\alpha - l\sin(180° - \beta - \gamma)$

woraus man also die gesuchte Höhe KI findet.

Diese Methode ist bey Höhenmessungen der Berge vorzüglich zu empfehlen; theils wegen ihrer Bequemlichkeit, weil man die Standlinie nach Gefallen annehmen kan, theils auch in Absicht der Genauigkeit, weil man nicht so viel spitze Winkel zu befürchten hat, besonders wenn man die Standlinie ziemlich groß annimt. Bey den vorhergehenden Aufgaben, wo die Standlinie mit der auszumessenden Höhe in einer Ebene lag, wurde nicht allein die Aufgabe dadurch eingeschränkt, sondern man hat, weil alle Winkel in einer Verticalebene gemessen werden, auch meistens sehr spitze Winkel zu befürchten, besonders bey Messung der Höhen, aus ziemlich grossen Entfernungen.

Ich habe zwar gesagt, daß man die Standlinie CD so viel als möglich horizontal annehmen müsse. Dies geschah nur wegen der Bequemlichkeit. Es erhellet aber leicht, daß diese Bedingung nicht nothwendig ist. Gesetzt D läge um die

Höhe Dd höher als C, so braucht man in obiger Auflösung eigentlich nicht die wahre Entfernung CD, sondern die auf den Horizont reducirte Cd, welche man durch Hülfsmittel, die wir bereits im vorhergehenden beygebracht haben, gar leicht finden kan;

Und wenn D gleich höher liegt als C, so wird man, wenn nur bey D der Winkelmesser horizontal gestellt wird, doch den Horizontalwinkel IdC finden.

In den meisten Fällen wird man aber gar leicht die Standpunkte C, D, so wählen können, daß man ohne merklichen Irrthum, beyde in einer Horizontalfläche annehmen, und die wahre Weite CD, der horizontalen Cd gleich setzen kan.

Zum Ueberfluß könte man auch bey D, den Elevationswinkel KDI messen, und solchergestalt, aus den beyden Winkeln ICD, IDC, der Standlinie CD, und dem Winkel KDI, die Höhe KI noch einmahl finden, sie mit der, welche man aus den Winkeln ICD, IDC, KCI fände, vergleichen, aus beyden ein arithmetisches Mittel nehmen, und so die Höhe KI weit genauer finden, als es durch eine Messung allein geschehen würde.

Wegen Messung der Horizontalwinkel ICD, IDC ist es nothwendig, daß das Werkzeug mit einem

einem Fernrohre versehen werden kan, das in einer Verticalebene auf und nieder beweglich ist. Ist aber das Werkzeug nicht mit einer dergleichen Vorrichtung versehen, so ist man genöthigt, statt der erwähnten Horizontalwinkel, die schiefen Winkel KCD, KDC zu messen, indem man das ganze Werkzeug neiget. Man wird aber demohnerachtet die Höhe KI finden können, denn in dem Dreyecke KCD, ist alsdann der Winkel K = 180° — KCD — KDC mithin auch durch die Proportion sin K : CD = sin KDC : KC die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks KCI bekant, woraus man alsdann die Höhe KI durch die Formel KI = KC sin KCI findet.

Anmerkung.

§. 196. Die bisherigen Methoden, Höhen zu messen sind diejenigen, von denen man in der Ausübung den meisten und sichersten Gebrauch machen kan. Es giebt aber noch eine sehr große Anzahl von Vorschriften, Höhen zu messen, die aber theils sich nur auf besondere Fälle erstrecken, theils auch oft nicht die gehörige Genauigkeit verstatten. Dergleichen Aufgaben wären z. E. Die Höhe eines Berges zu finden, aus der Höhe eines auf ihm befindlichen Thurms, ferner aus den bekanten Seiten, eines in einem Thale befindlichen Dreyecks, die Höhe eines Berges zu

finden, wenn man sich auf der Höhe selbst befindet u. s. w. dergleichen Aufgaben lassen sich in grosser Menge erdenken. Bey einigen derselben, wird so gar erfordert die Winkel mit sehr grosser Schärfe zu messen, in welchem Falle man sich der Fernröhre mit Micrometern bedienen muß.

Winkel die man auf einem Thurme u. s. w. nähme, könte man sehr bequem durch Hülfe solcher Werkzeuge messen, die mit Spiegeln versehen wären (§. 122)

Es wird übrigens, einem Geometer keine sonderliche Schwierigkeit verursachen, dergleichen Aufgaben aufzulösen, wenn er nur eine genaue Kenntniß derjenigen Stücke einer Figur hat, die man unmittelbar messen muß, um das unbekante daraus herzuleiten.

Dies wird mich also berechtigen, wenn ich nur wenige Aufgaben von Höhenmessungen beygebracht habe. Wer aber mehrere Methoden kennen lernen will dem können folgende Schriftsteller Unterricht geben.

1) *Riccioli*, *Geographia reformata*. *Lib.* 6.

2) *Ben. Hedraei*, *nova et accurata Astrolabii geometrici structura*. (Lugd. Bat. 1643) Membr. II.

Ferner

Ferner eine Abhandlung von einem ungenanten *de methodis montium altitudines demetiendi etc.* (Vermuthlich ist der Verfasser Hr Zeplichal der sich durch einige algebraische Schriften bekant gemacht hat.)

Ausser diesen trigonometrischen Methoden, hat man aber noch eine andere, physicalische, nemlich durch Hülfe eines Barometers, Höhen zu messen.

Es ist nemlich aus der Physic bekant, daß die Luft an Dichtigkeit und Elasticität beständig abnimt, auf je grössere Höhen man kömt. Da nun das Queckſilber im Barometer steigen muß, je grösser der Druck der Luft auf das Queckſilber ist, hingegen fallen muß, je geringer dieser Druck ist, so erhellet, daß auf Bergen das Queckſilber im Barometer niedriger stehen müsse als im Thale.

Die Naturlehrer haben sich nun von jeher immer damit beschäftigt, das Gesetz zu finden, nach welchem sich der Druck der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche richtet, und da die Queckſilberhöhe im Barometer mit dem Drucke der Luft bekantermaaßen das Gleichgewicht hält, so hat man gesucht ein Mittel zu finden, aus den gegebenen Barometerhöhen, sogleich die Höhe einer gewissen Station über einer andern zu entdecken.

Da es sich wohl der Mühe verlohnt, von einer so nützlichen und leichten Art, Höhen zu messen etwas beyzubringen, so soll folgendes dazu dienen.

Wie man aus der Höhe des Barometers an zweyen Orten, finden kan, um wie viel der eine höher liege als der andere.

§. 197. Um dieses zu leisten, so nehmen die Naturlehrer ein Gesetz an, welches wenigstens so weit statt findet, als man mit Barometern Versuche anstellen kan, nemlich **daß die Dichte der Luft an jeder Stelle über der Erdfläche sich verhalte wie die Kraft mit der sie zusammengepresset wird.**

Diese Voraussetzung hat sich durch würkliche Versuche, bey denen die Luft mit einer doppelten, dreyfachen Kraft, in die Hälfte, oder den dritten Theil, des vorigen Raumes zusammengepresset ward, bestätiget, und man kan füglich dieses Gesetz bis auf solche Höhen in unserer Atmosphäre annehmen, auf die sich die höchsten Berge erstrecken; denn auf den höchsten Bergen, die wir kennen, ist die Luft gewiß noch nicht um den dritten Theil so dünne als im Thale.

I. Man nehme also an, zwischen den parallelen am, bd, Fig. LIX, sey eine Luftsäule, von der Oberfläche der Erde bis ans äuserste Ende der Atmosphäre enthalten.

II.

II. Man stelle sich vor, die ganze Höhe am, sey in eine sehr große Anzahl kleiner Theile getheilet, die wie ac, cf, fh u. s. w. einander gleich sind; ce, fg, hi u. s. w. seyen Horizontalebenen, so werden solche, die ganze Luftsäule abmd, in lauter Schichten aceb, cfeg, u. s. w. theilen, die insgesamt von gleicher Grösse und Höhe sind.

III. Zugleich wird man ohne merklichen Fehler, wegen der geringen Höhe der Schichten, die Luft in jeder Schicht, als gleichförmig dicht annehmen können.

IV. Man setze also, es seyen

der Schichte acbe; cfeg, fhgi u. s. w.
Dichtigkeiten d d′ d″ u. s. w.
Gewichte P P′ P″ u. s. w.

Der Druck der gesamten Luftsäule, auf die untere Fläche ab heiße P, der Druck auf die Flächen ce, fg, hi, u. s. w. Q, R, S u. s. w. so erhält man folgendes.

V. Es ist $Q = P - p$ weil der Druck auf die Fläche ce um das Gewicht der Luft in der untern Schicht, kleiner ist, als der Druck auf die Ebene ab. Ferner, aus eben den Gründen

$R = P - p - p'$
$S = P - p - p' - p''$

u. s. w.

VI. Weil nun nach dem oben erwähnten Gesetze, die Dichtigkeiten der Schichte acbe, fcge u. s. w sich verhalten, wie die darauf drückenden Kräfte, so hat man

$$d : d' = Q : R = P - p : P - p - p'$$
$$d' : d'' = R : S = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
u. s. w.

VII. Weil aber die Schichte gleichen Raum haben, so verhalten sich ihre Gewichte, wie ihre Dichtigkeiten, demnach ist auch

$$d : d' = p : p'$$
$$d' : d'' = p' : p''$$
u. s. w.

VIII. Demnach aus VI. VII. auch

$$p : p' = P - p : P - p - p'$$
$$p' : p'' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
$$p'' : p''' = P - p - p' - p'' : P - p - p' - p'' - p'''$$
u. s. w.

Mithin, durch die bekante Verwandlung der Proportionen (antecedentes et Consequentes summando)

$$P : P - p = P - p : P - p - p'$$
$$P - p : P - p - p' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
u. s. w.

Oder

Oder aus (V) statt P — p, P — p — p' u. s. w. die Buchstaben Q, R u. s. w. substituirt

$$P:Q=Q:R \text{ also } R=\frac{Q^2}{P}=P.\frac{Q^2}{P^2}$$

$$Q:R=R:S \text{ also } S=\frac{R^2}{Q}=P.\frac{Q^3}{P^3}$$

u. s. w.

Hieraus erhellet also, daß die Pressungen der Luft auf die Flächen, oder Schichten, ab, cc, fg u. s. w. in einer geometrischen Progression fortgehen, wie folget.

P; Q; R; S u. s. w. oder

$$P;\ P.\frac{Q}{P};\ P.\frac{Q^2}{R^2};\ P.\frac{Q^3}{P^3} \text{ u. s. w.}$$

Der Exponente dieser geometrischen Progression ist $=\frac{Q}{P}$.

IX. Man setze also vw sey die mte Schicht über ab und xy die nte; man nenne den Druck der Luft auf vw = X, auf xy = Y
so ist vermöge der erwähnten geometrischen Progression,

$$X=P\,(\frac{Q}{P})^m\ ;\ Y=P.\,(\frac{Q}{P})^n$$

Mithin $\frac{X}{P} = (\frac{Q}{P})^m$; $\frac{Y}{P} = (\frac{Q}{P})^n$ oder wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt.

$$\log \frac{X}{P} = m . \log \frac{Q}{P} ;$$

$$\log \frac{Y}{P} = n \log \frac{Q}{P}$$

folglich $\log \frac{X}{P} : \log \frac{Y}{P} = m : n$

X. Nun verhalten sich aber m; n, wie die Mengen der gleichen Theile, die auf av, ax, gehen; d. h. n, m verhalten sich wie die Höhen ax, av, der beyden Schichte xy, vw, über der unteren ab. Ferner, die Pressungen P, X, Y der Atmosphäre auf die Schichten ab, vw, xy, verhalten sich wie die Queckſilbersäulen, die die Luft, bey a, v, x im Barometer erhalten kan. Nennet man also die Höhe av = h; ax = H, die Barometerhöhe bey a = B
bey v = b
bey x = β
so verwandelt sich die obige Proportion IX in nachstehende

$$h : H = \log \frac{b}{B} : \log \frac{\beta}{B}$$

oder

oder welches auf eines hinausläuft

$$h : H = \log \frac{B}{b} : \log \frac{B}{\beta}$$

Es verhalten sich also die Höhen der Stationen v, x, über der Horizontalfläche ab, wie die Logarithmen der Quotienten, wenn man die Barometerhöhe in der untersten Station a, mit den Barometerhöhen bey den Stationen v, x, dividiret.

Anwendung dieses Satzes auf Messung der Höhen.

XI. Es ist also klar, daß, wenn man bey einem gewissen Barometerstande B der untersten Station a, ein für allemahl durch eine Erfahrung ausgemacht hat, wie hoch man sich erheben muß, daß das Barometer um eine gewisse bestimte Größe sinket, man alsdann für jede gegebene Barometerhöhe an einer andern Station, finden könne, wie hoch diese Station, über der untersten liegt.

Ex. Die Erfahrung hat gelehret, daß wenn in der untersten Station a, die Barometerhöhe B = 29 pariser Zoll = 29 . 12 = 348 Linien ist, und man sich um die Höhe av = h = 12,497 Toisen, über der untersten Station erhebt, alsdann bey v die Barometerhöhe um

1 Linie

1 Linie geringer ist als bey a, daß folglich bey v die Barometerhöhe nur 347 Linien seyn werde.

Man setze also in obige Proportion statt, B, h, b, die gefundenen Werthe, so verwandelt sich diese Proportion in folgende

$$12{,}497 : H = \log \frac{348}{347} : \log \frac{348}{\beta}$$

Nun ist aber aus den Logarithmen Tafeln

$$\log \frac{348}{347} = \log 348 - \log 347 = 0{,}0012497$$

Mithin

$$12{,}497 : H = 0{,}0012497 : \log \frac{348}{\beta}$$

welches also folgende Gleichung giebt

$$H = \frac{12{,}497}{0{,}0012497} \cdot \log \frac{348}{\beta} \text{ oder}$$

$$H = 10000 \log \frac{348}{\beta} = 10000(\log 348 - \log \beta)$$

Auf diese Art erhellet also daß man die Höhe H einer Station x, bey der die Barometerhöhe = β Linien ist, über einer andern, wo die Barometerhöhe 348 Linien beträgt, finden werde, wenn man vom Logarithmen der Zahl 348, abziehet den Logarithmen der Zahl β, und den Rest mit 10000 mul-

multipliciret. Die Höhe der obern Station über der untern findet man aber durch dieses Verfahren in Toisen; und die Barometerhöhen müssen in pariser Linien ausgedrückt werden weil diese Maaße bey obigem Versuche zum Grunde liegen.

XII. Es heisse nun an einer andern Station r, die Barometerhöhe = b, und die Erhöhung dieser Station über der, wo die Barometerhöhe 348 Linien ist, = h, so ist auf eben die Art

$$h = 10000 \log \frac{348}{b}$$

XIII. Aus XI. XII. ist also

$$H - h = 10000 \left(\log \frac{348}{\beta} - \log \frac{348}{b}\right) \text{ oder}$$

$$H - h = 10000 \log \frac{b}{\beta}.$$

Hier drückt also der Unterschied H — h, die Höhe rx einer Station x, wo die Barometerhöhe ß Linien beträgt, über einer andern r, wo die Barometerhöhe b Linien groß ist, aus; und daher hat man allgemein folgende

Regel

Regel.

Man suche die Differenz der Logarithmen der Barometerhöhen an zwoen Stationen, multiplicire sie mit der Zahl 10000, so hat man die Höhe der einen Station über der andern in Toisen.

XIV. So erhellet also, wie die Barometerhöhen an jeder Stelle der Atmosphäre, auf eine sehr leichte Art, zu Ausmessung der Höhen, in der practischen Geometrie gebraucht werden können, und ich will nun die erwähnte sehr bequeme Regel, mit einem Beyspiel erläutern.

Gesetzt am Fuße eines Berges fände man die Barometerhöhe $b = 27$ Zoll 8 Linien $= 332$ Linien, auf der Spitze des Berges aber die Barometerhöhe $= 26$ Zoll 4 Linien $= 316$ Linien $= \beta$, so ist

$\log 332 = 2{,}5211381$
$\log 316 = 2{,}4996871$

Unterschied $= 0{,}0214510$

mult. mit 10000 giebt 214,51 Toisen. So hoch wäre die Spitze des Berges über den Fuß desselben erhaben. Auf die Decimalbrüche der Toisen, würde man sich aber wohl schwerlich verlassen können, weil in der Beobachtung der Barometerhöhen doch immer kleine Fehler vorfallen.

Man

Man kan also in der Höhe des Berges nur die ganzen Toisen beybehalten.

Anmerkungen über dieses Verfahren und nöthige Vorsichten in der Ausübung.

§. 198. I. Die bisherige Methode, Höhen durchs Barometer zu messen, würde in jedem Falle ganz genau die Höhe einer Station über der andern geben wenn das oben § 196 angenommene Gesetz, seine völlige Richtigkeit hätte, und nicht noch andere Umstände wären, die auf dasselbe einigen Einfluß hätten. In der That hat auch die Erfahrung gelehret, daß die durchs Barometer bestimten Höhen nicht vollkommen, mit der trigonometrischen Messung derselben übereinstimmen. Bouguer glaubt durch seine Erfahrungen gefunden zu haben, daß man, um die wahre Höhe zu finden, von derjenigen welche durchs Barometer gefunden wird, den 200ten Theil abziehen müsse, oder daß man die durchs Barometer gefundene Höhe mit $\frac{199}{200}$ multipliciren müsse, um die wahre Höhe zu finden. Ich will indessen die vornehmsten Umstände die auf obenwähntes Gesetz, Einfluß haben, hier auch kürzlich beybringen.

1) Ist klar, daß die Schlüsse des 197 §, woraus die Formel (§. 197 X) hergeleitet wurde voraussetzen, daß das Queckſilber im Barometer nur deswegen ſinke, wenn man höher ſteigt, weil

weil der Druck der Luft auf das Queckſilber, in gröſſerer Höhe abnimt, und es erhellet leicht, daß obige Schlüſſe einige Veränderung leiden würden, wenn in der untern Station a, ſich der Druck der Atmoſphäre P, oder die Barometerhöhe ſelbſt, veränderte, während man aus der untern Station in die höhere ſteigt.

Hätte nämlich, indem man ſich in eine höhere Station begiebt, unterdeſſen der Druck der Luft durchaus ſich verändert, dergeſtalt, daß ein anderes Barometer, das man in der untern Station zurückgelaſſen hätte, ſelbſt auch geſtiegen oder geſunken wäre, ſo iſt es nicht erlaubt, das Sinken des Barometers, welches man mit ſich aus dem Thale in die Höhe nimt, bloß dieſer Höhe zuzuſchreiben, ſondern wenn die Regel (§. 197. XII) ihre Richtigkeit haben ſoll, ſo muß die Barometerhöhe, oder der Zuſtand der Luft in der untern Station ſich nicht verändern, während man aus dem Thale in die Höhe ſteigt.

Um alſo recht ſicher zu verfahren, ſo würde man einen Beobachter mit einem andern Barometer in der untern Station zurücklaſſen, und ihn zu verſchiedenen Zeiten, den Stand des Barometers obſerviren laſſen, während man in der obern Station den Barometerſtand beobachtete. Es verſtehet ſich, daß die beyden Barometer, deren man ſich bey dieſem Verfahren bedienet

dienet mit einander übereinstimmen, d. h. in der untern Station, einerley Höhe des Queckſilbers anzeigen müſſen. Man muß alſo beyde vorher ſorgfältig mit einander vergleichen, und wenn ſie nicht vollkommen übereinſtimmen, den Unterſchied anmerken.

Aus dieſen zu unterſchiedenen Zeiten, in der untern Station beobachteten Barometerhöhen, wird ſich nun gar leicht zeigen, ob ſich, während man in der obern Station die Barometerhöhe beobachtete, der Zuſtand der Luft durchaus verändert hat oder nicht. Sind nun die Zeiten angegeben, in welchen man die Barometerhöhen, an beyden Stationen beobachtete, ſo wird ſich daraus ohne großen Irrthum berechnen laſſen, wie hoch in dem Augenblicke, da man in der obern Station, den Barometerſtand beobachtete, das Barometer in der untern Station geſtanden haben müſte.

Geſetzt Morgens um 8 Uhr habe man in der untern Station beyde Barometer mit einander verglichen, ſie vollkommen übereinſtimmend, und ihre Höhe = 27 Zoll 4 Linien gefunden. Um drey Uhr nachmittags habe der Beobachter in der untern Station, die Barometerhöhe = 27 Zoll 8 Linien beobachtet. Ich will nun annehmen der Beobachter auf der höhern Station, habe Nachmittags um 1 Uhr den Barometerſtand beobachtet, und ihn = 26 Zoll 2½ Linie gefunden.

So wird man, weil sich von 8 bis 3 Uhr in der untern Station die Barometerhöhe um 4 Linien, folglich, während daß man in die höhere Station stieg, sich der ganze Zustand der Luft verändert hat, gar leicht berechnen können, wie hoch um 1 Uhr Nachmittags, da oben die Barometerhöhe beobachtet wurde, das untere Barometer gestanden haben müste. Man schliesse nemlich nach der Regel de Tri, wie sich verhält die Zeit von 8 Uhr Morgens bis 3 Uhr Nachmittags, zur Zeit von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Nachmittags, so verhält sich der Unterschied der Barometerhöhen, die in der untern Station um 8 Uhr und 3 Uhr beobachtet worden, zum Unterschiede dieser Barometerhöhen, von 8 Uhr bis 1 Uhr. also

7 Stund.: 5 Stunden = 4 Linien: $2\frac{6}{7}$ Linien.

Da also um 3 Uhr das untere Barometer um 4 Linien höher stand, als um 8 Uhr, so würde es um 1 Uhr nur $2\frac{6}{7}$ Linien höher gestanden haben, als um 8 Uhr. Es würde also um 1 Uhr N. die Barometerhöhe = 27 Zoll 4 Linien + $2\frac{6}{7}$ L. = 27 Zoll 6 $\frac{6}{7}$ Linien gewesen seyn, in dem Augenblicke da man in der obern Station die Barometerhöhe = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ L. fand.

Diese beyden Barometerhöhen 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ L. und 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien, muß man nun gebrauchen, die Höhe der obern Station über der untern zu finden.

2) Muß man überlegen, daß die verschiedene Wärme sowohl in der obern als untern Atmosphä-

re,

re, den Zustand der Luft, und deren Druck auf das Queckſilber, mithin auch das oben §. 197 angeführte Geſetz, woraus wir unſere Formel hergeleitet haben, gar ſehr verändert. Die Geſetze nun nach denen die Elaſticität, mithin der Druck der Luft auf das Queckſilber durch die Wärme modificirt wird, ſind in der That ſehr vielen Schwierigkeiten unterworfen, und Hr. *de Luc* in ſeinem Werke *ſur les modifications de l'Atmoſphaere*, davon in Leipzig durch Hrn. D. Gehler eine Ueberſetzung geliefert worden, hat ſich ſehr viele Mühe gegeben, dieſe Geſetze ſo wohl durch Beobachtungen als Schlüſſe herauszubringen. Er hat auch würklich eine Regel gefunden, welche mit der Wahrheit näher übereinkömt, als die obige §. 197 XIII.

Ferner hat auch die Wärme, ſelbſt Einfluß auf das Queckſilber im Barometer, in ſo ferne ſie nemlich das Queckſilber ausdehnt, und alſo dadurch die Barometerhöhe verändert. In ſo ferne müſſen alſo auch, die in der obern und untern Station beobachteten Barometerſtände korrigiret werden.

Da man hier nicht verlangen kan, daß ich die Umſtände, wie Hr. de Luc auf ſeine verbeſſerte Regel gekommen iſt, aus einander ſetze, auch in Hrn. H. Käſtners Abh. vom Höhenmeſſen in deſſen Markſcheidekunſt alles hieher gehörige

sehr deutlich und gründlich ausgeführt ist, so werde ich mich begnügen Hr. de Lucs Vorschriften blos ohne Beweis herzusetzen, und also blos die Regel anzugeben, nach der die oben gefundene Regel §. 197 XIII, wegen des Einflusses der Wärme, sowohl auf die Ausdehnung der Queckſilbersäule, als auf den Druck der Luft, korrigirt werden müsse.

Hrn. de Lucs Regel.

II. 1. Es sey die in der obern Station beobachtete Barometerhöhe = β pariſ. Lin. und zu eben der Zeit die reaumürſche Thermometerhöhe über dem Eispunkt = t Grade.

2. Die in der untern Station beobachtete, und nach (I. 1) auf eben die Zeit (II. 1) reducirte Barometerhöhe = b pariſ. L; Thermometerhöhe = T Grad über dem Eispunkt.

3. Man korrigire, wegen der Ausdehnung des Queckſilbers durch die Wärme, die Barometerhöhe der obern Station um so viel Linien als die Grösse, $\frac{\beta.(t-10)}{4320}$ und die Barometerhöhe der untern Station, um so viel Linien, als die Grösse $\frac{b(T-10)}{4320}$ angiebt, und nenne solchergestalt die korrigirten Barometerhöhen in beyden Stationen, nemlich

β —

$$\beta - \frac{\beta.(t-10)}{4320} = \beta'$$

$$b - \frac{b\,(T-10)}{4320} = b'$$

4. Für diese korrigirten Barometerhöhen, suche man nun nach der Formel (§. 197. XIII) die Höhe der obern Station, über der untern, so wird dieselbe $= 10000 \log \frac{b'}{\beta'}$.

5. Man ziehe nun von $16\frac{3}{4}$ reaumürschen Graden über dem Gefrierpunkt, die halbe Summe der in beyden Stationen beobachteten Thermometerhöhen ab, und nenne den Rest C so ist $C = 16\frac{3}{4} - (\frac{T+t}{2})$.

6. Man multiplicire endlich die nach (4) herausgekommene Höhe der einen Station über der andern, mit der Größe $1 - \frac{C}{215}$, so erhält man die wahre korrigirte Höhe der obern Station über der untern
Es wird also in Toisen, die

$$\text{korrig Höhe} = (1 - \frac{C}{215})\ 10000\ \log \frac{b'}{\beta'}$$

III. Um diese Berechnung in einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in der untern Station stehe das Barometer auf 27 Zoll $4\frac{1}{2}$ Lin. $= b = 328{,}5$ Lin. das Thermometer auf 18 Grad $= T$. In der obern Station das Barometer auf 26 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. $= \beta = 314{,}7$ Lin. das Thermometer auf 7 Grad $= t$, so wird

$$\frac{\beta \cdot (t-10)}{4320} = -\frac{3 \cdot 314{,}7}{4320} = -0{,}2 \text{ Lin.}$$

$$\frac{b \cdot (T-10)}{4320} = +\frac{8 \cdot 328{,}5}{4320} = +0{,}6 \text{ Lin.}$$

Mithin die korrigirten Barometerhöhen

$\beta' = 314{,}7 + 0{,}2 = 314{,}9$ Linien
$b' = 328{,}5 - 0{,}6 = 327{,}9$ Lin.

Ferner wird $C = 16\frac{3}{4} - \left(\frac{18+7}{2}\right) = 16{,}75 - 12{,}5$

$= 4{,}25$ und $\frac{C}{215} = \frac{4{,}25}{215} = 4{,}25 \cdot 0{,}0046$

$= 0{,}019$ daher $1 - \frac{C}{215} = 1 - 0{,}019 =$

0,981 also die

korrig. Höhe $= 0{,}981 \cdot 10000 \log \frac{327{,}9}{314{,}9}$

$= 0{,}981 \cdot 10000 \cdot 0{,}0175687$

$= 172{,}34$ .. Toisen

$= 1034{,}04$ pariser Fuß.

Man

Man darf wohl nicht denken daß die Zehentheile eines Fußes in dieser Rechnung zuverläßig seyn werden, da kleine Fehler in den Beobachtungen die Höhe wohl selbst auf einige Fuße unsicher geben mögen.

IV. In diesem Exempel waren an beyden Stationen die Thermometerhöhen über dem Gefrierpunkt, folglich die Werthe von T, t, positiv. Für Thermometerhöhen unter dem Gefrierpunkt, muß man die Werthe von T, t, als negativ betrachten, und solchergestalt, so wohl bey Berechnung der korrigirten Barometerhöhen als auch des Werthes von C, sich hiernach richten.

V. Hr. de Luc hat auf diese Art, sehr viele Höhen durchs Barometer gemessen, sie mit der geometrischen Messung verglichen, und meistens nur einen sehr geringen Unterschied gefunden, wie man aus dem IVten Theile seines Werkes §. 624 u. f. ersehen kan.

Herr de Luc, bedienet sich aber, um desto sicherer zu verfahren, an jeder Station, zweyer Thermometer, von deren Einrichtung man die Gründe sowohl in seinem oberwähnten Werke, als auch in Hrn. Hofr. Kästners Abh. vom Höhenmessen in dessen Markscheidekunst, findet.

Das erste Thermometer befindet sich unmittelbar an dem Brette, an welchem das Barometer hängt; dem Barometer kan also nichts wiederfahren, was dem Thermometer nicht auch wiederführe, und so dienet dieses Thermometer, die Veränderungen und Korrectionen zu bestimmen, denen wegen der Ausdehnung des Queckſilbers durch die Wärme, die Barometerhöhen unterworfen ſind, die Grade dieſes Thermometers, werden alſo bey Berechnung der Werthe b', β' gebraucht.

Das andere Thermometer, dienet die Temperatur der Luftſäule zu beſtimmen, in der die Barometerhöhe beobachtet wird, und die Grade deſſelben werden bey der Berechnung des Werthes von C zum Grunde gelegt.

Da es aber wohl nicht eines jeden Sache iſt, die Scalen für dieſe Thermometer gehörig nach Hrn. de Luc's Vorſchrift einzutheilen, und es übrigens auch keinen großen Fehler verurſacht, wenn man ſich bey jeder Station nur eines einzigen Thermometers (welches aber neben dem Barometer, in freyer Luft und an einem ſchattigten Orte hängen muß) bedienet, ſo habe ich Hrn. de Luc's Vorſchriften auf den Gebrauch des reaumürſchen Queckſilberthermometers, das zwiſchen dem Eis und Siedepunkt 80 Grade hält, eingerichtet, weil dieſes Ther-

mometer sehr bekant ist, und zu gegenwärtiger Absicht einige Bequemlichkeiten hat.

Gebrauchte man ein Farenheitisches Therm. so müste man die beobachteten Grade desselben, über oder unter dem Gefrierpunkt, auf reaumürsche Grade reduciren, welches sehr leicht geschehen kan, weil $2\frac{1}{2}$ farenh. Grade einen reaumürschen betragen.

VI. Die übrigen Vorsichten, und Bemerkungen, bey dem bisherigen Gebrauche der Barometer, sind nun kürzlich noch folgende.

1) Es müssen sowohl Barometer als Thermometer in Absicht ihrer Eintheilungen die nöthige Genauigkeit haben. Das Queckſilber, muß, ehe man damit sowohl Barometer als Thermometer füllet, vorher wohl gereiniget, und durchs Feuer von Luft befreiet werden.

2) Gewöhnlich sind die Barometer so beschaffen, daß das offene Ende der hohen Glasröhre, unten in einem weitern Gefäße stehet, dergestalt, daß sich beym Fallen des Barometers, das Queckſilber in dieses Gefäß begiebt. Die wahre Barometerhöhe ist nun eigentlich die Weite von der Oberfläche des Queckſilbers im Gefäße, bis an das äuserste Ende des Queckſilbers in der Röhre. Nun ist klar daß wenn das Queckſilber in der engen Röhre sinket, die Oberfläche desselben in dem weitern Gefäße steigen,

hingegen fallen werde, wenn das Queckſilber in der Röhre ſteigt. Da man nun bey Meſſung der Höhen mit dem Barometer, die Höhe des Queckſilbers d. h die Weite zwiſchen den Oberflächen des Queckſilbers im Gefäße und in der Röhre, ſehr genau wiſſen muß; ſo muß die eingetheilte Scale des Barometers noch etwa $\frac{1}{2}$ Zoll bis unter die Oberfläche des Queckſilbers im Gefäße, reichen, damit man den Stand dieſer Oberfläche an der Scale bemerken könne. Die Zolle an der Scale müſſen übrigens wenigſtens bis auf Linien genau getheilt ſeyn; die äuſerſten Zolle kan man noch genauer eintheilen, wenn man um kleinere Theile als Linien zu beſtimmen, ſich nicht auf das Augenmaaß verlaſſen will.

Man ſiehet aus dem bisherigen, daß diejenigen Barometer wo ſich das Queckſilber in eine hölzerne Kapſel ſenket, die unten die Barometerröhre ganz umſchlieſſet, zu Höhenmeſſungen nichts taugen, weil man die Oberfläche des Queckſilbers in dieſer hölzernen Büchſe nicht ſehen, und ihren Stand an der Scale bemerken kan. Am beſten iſt es, wenn das Gefäß, in welchem die Glasröhre ſtehet, auch von Glas, und mit einer kleinen Oefnung in die die Luft dringen kan, verſehen iſt. Noch vorzüglicher und bequemer ſind aber diejenigen Barometer, welche wie Fig. LX ausweiſet, aus einer einzigen Glasröhre efhc beſtehen, die bey f wieder aufwärts, ſich in eine

weitere

weitere Röhre fbc krümmet. Diese weitere Röhre fbc vertritt die Stelle des gewöhnlichen Gefäßes, und wenn die Oberfläche e des Queckſilbers in der langen Röhre ſinket oder ſteigt, ſo ſteiget oder ſinket umgekehrt, die Oberfläche bc des Queckſilbers in der weitern Röhre. Es verſtehet ſich, daß nun ſowohl an der engen als weiten Röhre, ſich eine Scale befinden müſſe, und man wird leicht begreifen, wie dieſe Scalen eingerichtet werden müſſen, damit man in jedem Falle, genau die ſenkrechte Entfernung, der beyden Oberflächen bc und e erhalte. Die lange Röhre iſt übrigens wie gewöhnlich bey l genau verſchloſſen, die kurze fbc aber, bey i mit einer kleinen Oefnung verſehen, damit die Luft auf die Oberfläche bc drücken könne.

Was übrigens für Vorſichten beym Füllen der Barometer und Therm. und ſonſt noch bey deren Verfertigung zu beobachten ſind, davon muß man in beſondern Schriften Nachricht ſuchen, von denen vorzüglich das oberwähnte Werk des Hrn. de Luc, ferner Michaeli du Creſt's kleine Schriften von Thermom. u. Barometern aus dem franz. von J C Thenn (Augsp. 1770.) und Hrn Commiſſ. Strohmeyers Anleitung übereinſtimmende Thermometer zu verfertigen (Gött. 1775) u. ſ. w. zu empfehlen ſind.

Wie

Wie die Barometer besonders zu langen Bergreisen eingerichtet werden müssen, ertheilet ebenfalls Hr. de Luc den gehörigen Unterricht; auch Hrn. Branders Beschreibung zweyer besonderer und neuer Barometer, die zu Höhenmessungen vorzüglich zu gebrauchen sind, als ein Zusatz zu Hrn du Crest Saml. kleiner Schriften von Therm und Barometern (Augsp. 1772), ist zu dieser Absicht nützlich.

3) Bey Beobachtung der Barometerhöhen muß man ferner das Auge genau in der Fläche e oder bc halten, in der sich das Queckſilber endiget, damit man keine Parallaxe zu befürchten habe;

4) Die Barometer sowohl, als Thermometer, müssen so genau als möglich vertical hängen

Diese und ähnliche Vorsichten, werden jedem Geometer leicht von selbst einfallen, und wer überhaupt von allem dem bisherigen, ausführlichern Unterricht verlangt, der lese vorzüglich Hrn. Hofrath Kästners Abhandlung von Höhenmessungen durchs Barometer in dessen Markscheidekunst, in welcher nützlichen Schrift man noch andere Formeln und Regeln, Höhen durchs Barometer zu messen, ausgeführt findet. Meine Absicht verstattet nicht weitläuftiger zu seyn.

Noch

Noch einige Anmerkungen über die trigonometrische Messung der Höhen, sehr weit entlegener Gebirge.

§. 199. I. Wenn man die Höhe eines von den Standpunkten sehr weit entlegenen Berges, nach den vorhergehenden Methoden bestimmen will, so kan man fragen was die **Krümmung der Erde** auf diese Messungen für Einfluß habe.

Es sey also Fig. LXI, G der Mittelpunkt der Erdkugel, und CEB ein Stück eines grösten Kreises auf der Oberfläche der Erde.

A ein Objekt, z. E. die Spitze eines entfernten Berges, um die Höhe AB über der Erdfläche erhaben.

Weil AB eine Verticallinie seyn muß, so wird AB, verlängert, durch den Mittelpunkt der Erde gehen. (§. 4)

Gesetzt nun c sey ein Standpunkt, um die Höhe cC über der eigentlichen Erdfläche erhaben, so wird auch Cc die Verlängerung des Halbmessers GC seyn. Man gedenke sich durch c eine Horizontalebene co, so wird dieselbe auf Gc senkrecht stehen. (§. 11)

Der Winkel Aco, sey bey c der Elevationswinkel des Objekts A, über der durch c gehenden Horizon-

rizontalfläche, oder Horizontallinie co; und ein Perpendickel Ao, auf die durch c gehende Horizontalfläche wird die Höhe des Objekts A, über den Horizont des Beobachters c ausdrücken.

co wird die Horizontalweite des Objekts A von c seyn.

Nun erhellet, daß die vorhergehenden trigonometrischen Methoden, eigentlich nur allemahl, die Höhe Ao, über dem Horizont des Standpunktes, bestimmen, keinesweges aber die wahre Höhe des Objekts über der Erdfläche bey B, oder die Höhe AB.

Wolte man also die trigonometrisch gefundene Ao, für die wahre Höhe AB annehmen, so würde man einen Fehler begehen, der desto grösser ist, je weiter A von c liegt, je mehr also die Krümmung der Erdfläche, zwischen B und C beträgt.

Ich will nun zeigen, wie man aus der trigonometrisch gemessenen Höhe Ao, die wahre Höhe des Berges, AB, finden könne.

II. Es heiße also die Höhe Ao $= c$, der Elevationswinkel Aco $= \alpha$, die Krümmung der Erde zwischen C und B oder der Bogen CB, als Maaß des Winkels G $= \beta$.

Der

Der Halbmesser der Erde GC = GB = r, des Standpunkts c Erhöhung über der wahren Erdfläche, oder Cc = b. Wäre der Standpunkt c z E. selbst auf einer Bergspitze, so bedeutete Cc die Höhe dieses Berges.

Nun ist wegen der ähnlichen Dreyecke Gce, Aeo, der Winkel eAo = G = β mithin für sin tot = 1

Ao : Ae = 1 : sec β oder
Ae = c . sec β.

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke Gce

Gc : Ge = 1 : sec β also
Ge = (r + b) sec β.

daher Be = Ge — GB = (r + b) sec β — r
folglich Be + Ae oder AB = (r + b + c) sec β — r.

III. Man siehet also daß außer dem Halbmesser der Erde welcher 3272020 Toisen beträgt (§. 117 I Lehns.) auch die Größe des Bogens CEB = β bekant seyn müsse.

Diesen Bogen, welcher des Punkts B Weite von C ausdrückt (denn alle Weiten auf der Erdfläche, sind eigentlich Bogen gröster Kreise) muß man entweder aus geographischen Nachrichten als bekant annehmen, oder muß denselben selbst aus gemessenen Standlinien bestimmen.

Wenn

Wenn des Punkts A Weite von c, oder Ac bekant ist, welche man gar leicht aus angenommenen Standlinien bestimmen kan, so wird man dieselbe auch gebrauchen können, den Winkel G, oder den Bogen β zu bestimmen.

Ein gleiches würde man vermittelst der Horizontalweite co, der beyden Objekte A, c, bewerkstelligen können.

Wenn der Elevationswinkel Aco sehr klein ist, welches bey Höhenmessungen, aus sehr weit entlegenen Standpunkten immer statt findet, so kan man ohne merklichen Irrthum die aus Standlinien trigonometrisch gefundene Horizontalweite co, der wahren Weite cA gleichsetzen.

Ich kan also co = cA als eine bekante Größe annehmen, und will co = cA = a setzen.

IV. In dem Dreyecke GcA sind also die Größen Gc = r + b, cA = a, und der eingeschlossene Winkel GcA = 90° + α bekant. Daraus kan man also den Winkel G nach den bekanten Regeln ausfindig machen. Aber ohne den Winkel G zu suchen läst sich die Größe AB noch auf eine andere Art finden.

V. Man berechne aus denen in (IV) angenommenen bekanten Größen in den Dreyecke AcG, die Seite AG, ziehe davon ab GB = r, so hat man AB.

Wenn

Wenn man nach (Trig. S. XVIII) verfährt, und die dortigen a, b, hier cG, cA oder, r+b; a; bedeuten läst, und den dortigen Winkel $\varphi = 90° + \alpha$ setzt; so erhält man erstlich

$$\sin\psi = \frac{2\cos(45° + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a(r+b)}}{a+r+b}$$ und dann

$$AG = (a+r+b)\cos\psi.$$

Ex. Aus Cassini Abhandl. von der Figur und Größe der Erdkugel, (aus dem franz. von Aldr. Klimm).

Im X Kapitel dieses Buches giebt Hr. Cassini die trigonometrische Messung verschiedener Höhen des Pyrenäischen Gebürges, und fand z. E. für den Canigou, einen der höchsten des erwähnten Gebürges, den Elevationswinkel $Aco = \alpha = 2° 37'$, und die aus einer gewissen Standlinie gefundene Weite $Ac = a =$ 28767 Toisen. Der Standpunkt c war nahe an der Oberfläche des Meeres, so, daß cC oder b nur 9′ betrug, eine Größe die man ohne merklichen Fehler hier = o setzen kan. Dies giebt also hier $\sin\psi = \frac{2\cos(45° + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a.r}}{a+r}$,

und $AG = (a+r)\cos\psi$

Mithin $\log 2 = 0{,}3010300$
$l \cos (45° + \frac{1}{2}\alpha) = 9{,}8393380$
$\frac{1}{2}(l a + l r) = 5{,}4868551$

$15{,}6272231$
$l(a+r) = 6{,}5186175$

$\log \sin \psi = 9{,}1086056$
$\psi = 7° .22' .40''$
$\log \cos \psi = 9{,}9963892$
$l(a+r) = 6{,}5186175$

$\log AG = 6{,}5150067$
daher $AG = 3273457$
abgezog. $GB = 3272020$

Höhe des Kanigou = 1437 Toiſ. = AB

Hr. Caſſini findet 1441 Toiſen, dis rühret aber daher, weil er den Halbmeſſer der Erde etwas anders annimmt, wie ich.

Um nun zu zeigen, was man für einen beträchtlichen Fehler begehet, wenn man Ao für AB annehmen wolte, ſo will ich in dem rechtwinklichten Dreyecke cAo, auch noch Ao berechnen,

log

log Ac = l a = 4,4588949
log sin Aco = 8,6594748

log Ao = 3,1183697
Ao = 1313 Toisen.

Mithin AB — Ao = 1437 — 1313 = 124 Toisen.

Man würde also einen Fehler von 124 Toisen begehen.

Es erhellet also, daß man, wenn nicht die Krümmung der Erde in Betrachtung gezogen wird, sehr großen Fehlern ausgesetzt ist, wenn man die Höhen sehr weit von den Standpunkten entlegener Gebürge, nach der gewöhnlichen trigonometrischen Weise, berechnen will.

VI. Wenn man sich durch C eine Tangente, oder Horizontallinie C ε vorstellet, die in die Verticallinie GBA bey ε einschneidet, so ist Bε, der verticale Abstand dieser Horizontallinie, von der Erdfläche bey B, oder Bε drückt aus, um wie viel der, um den Bogen BC von C entfernte Punkt B, unter der Horizontallinie durch C liegt, und daher nennet man Bε auch das Gefälle.

Dieses Gefälle kömt nun sowohl, bey Messung sehr weit entlegener Gebürge, als auch beym Nivelliren vor, wo man besonders im letzten Falle, sehr nöthige Rücksicht auf dieses Gefälle nehmen muß.

Man siehet übrigens gar leicht daß dieses Gefälle mit in obiger Formel (II) für die Höhe des entfernten Gebürges, enthalten ist.

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke $GC\varepsilon$ ist $G\varepsilon = r \sec \beta$ folglich $B\varepsilon = r \sec \beta - r$.

Nun war (II)

$$AB = (r + b + c) \sec \beta - r \text{ oder}$$
$$AB = r \sec \beta - r + (b + c) \sec \beta$$

also $AB = B\varepsilon + (b + c) \sec \beta$

woraus also erhellet, daß in Bestimmung der Höhe AB, in der That das Gefälle $B\varepsilon$ mit enthalten ist.

VII. Um dieses Gefälle in jedem Falle sehr leicht berechnen zu können, so überlege man daß auch $B\varepsilon = r (\sec \beta - 1) = r.(\frac{1}{\cos \beta} - 1)$ $= r(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta})$ ist. Weil nun selten der Bogen CB auf der Erdfläche, viel über $\frac{1}{2}$ Grad betragen wird, mithin der Winkel β nur immer von geringer Größe ist, so kan man ohne merklichen Fehler $\cos \beta = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ (Trig. S. X) setzen; dies giebt also das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} r . \beta^2}{1 - \frac{1}{2}\beta^2},$$

oder

oder ohne merklichen Irrthum

$B\varepsilon = \frac{1}{2} r \beta^2$

weil man das Glied $\frac{1}{2} \beta^2$ im Nenner des vorhergehenden Werthes, wegen seiner Unbeträchtlichkeit in Vergleichung der 1, weglassen kan.

Bey dieser Formel $B\varepsilon = \frac{1}{2} r \cdot \beta^2$ muß man nun überlegen daß die Größe β eigentlich das Maaß des Winkels G in Decimaltheilen des Sinus totus, der = 1 gesetzt worden, ausdrücke. Ist also der Winkel β in Sekunden gegeben, so muß man in unserer Formel statt β den Werth $\frac{\beta}{206264}$ setzen; dies giebt daher das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2}.$$

Weil nun r = 3272020 Toiſ. = 19632120 pariſer Fuß iſt, so wird $\frac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2} \cdot \beta^2$; berechnet man nun die Größe $\frac{1}{2} \cdot \frac{19632120.}{206264^2}$ durch Logarithmen, so findet man dieselbe = 0,0002307 daher iſt $B\varepsilon = 0{,}0002307 \cdot \beta^2$ welche Formel also das Gefälle in Pariſer Fußen giebt, wenn der Winkel β in Sekunden ausgedrückt wird

Ex. Es sey $\beta = 1' = 60''$ so ist
$B\varepsilon = 0{,}0002307 . 60^2 = 0{,}83..$ Par. Fus.

VIII. Es kan aber auch geschehen, daß die Entfernung BC nicht in Secunden, sondern in Längenmaaße gegeben würde. In diesem Falle muß man erst berechnen wie viel Sekunden der Bogen CB hält; und diese Anzahl von Sekunden alsdann statt β in obige Formel setzen.

Man kan aber noch kürzer auf folgende Art dazu gelangen. Gesetzt der Bogen CB, dessen Gefälle man berechnen soll, halte a Pariser Fuß.

Weil nun 1 Grad auf der Erde 57107,5 Toisen, oder 342645 Par. Fuß hält, so kommen auf eine Minute $\frac{342645}{60}$ oder 5710,7 par. F. Auf eine Sekunde 95,2 par. F. Um also die Anzahl von Sekunden $= x$ zu finden, die auf a Fuß gehen, so schliesse man nach der Regel de Tri

$$95{,}2 : a = 1'' : x'' \text{ ; also } x'' = \frac{a}{95{,}2}$$

Sekunden; diesen Werth setze man statt β in die obige Formel so wird

$$B\varepsilon = \frac{0{,}0002307}{(95{,}2)^2} . a^2$$

oder $B\varepsilon = 0{,}00000002545 . a^2$

IX.

IX. Diese beyden Formeln, die man in jedem Falle gar leicht durch Logarithmen berechnet, (wenn man nemlich zu den beständigen Logarithmen von 0,00000002545 und 0,0002307 die Logarithmen von a^2 oder β^2 addiret) werden nun zeigen, unter welchen Umständen, bey Ausmessung der Höhen, das Gefälle beträchtlich ist oder nicht. Vorzüglich sind diese Formeln, auch in der Lehre vom Nivelliren brauchbar.

Man hat übrigens auch Tafeln berechnet, aus denen man das einem gewissen β oder a, zugehörige Gefälle sogleich herausnehmen kan. Eine dergleichen Tafel für reinl. Maaß, findet sich in Picards Abhandl. vom Wasserwägen, mit Hrn. Lamberts Beyträgen ꝛc. Eine andere für franz. Maaß in Caßinis oberwähnten Buche. Da aber diese Tafeln nicht für jeden Werth von β oder a, das Gefälle enthalten, und man für solche β, oder a, die nicht in diesen Tafeln genau zu finden sind, auf eine etwas mühsame Art durch Proportionaltheile, das Gefälle suchen muß, so kan man sich statt dieser Tafeln weit bequemer der gegebenen Formeln bedienen, besonders wenn man die Rechnung durch Logarithmen führet.

Korrection der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen der Brechung der Lichtstrahlen.

§. 200. I. Es ist aus der Erfahrung bekant, daß, wenn ein Lichtstrahl aus der Luft, in

Wasser, Glaß, oder sonst in eine durchsichtige dichtere Materie, fährt, derselbe von seiner gewöhnlichen geraden Richtung, nach der er fortgehen würde, abgelenket wird, so bald er die Oberfläche des Wassers oder Glases berührt. Die Erfahrungen wodurch dieser Satz bestätigt wird, finden sich in allen dioptrischen Anfangsgründen (z. E. gleich im ersten Artickel der Kästn. Dioptrick in dessen angewandten Math.)

Dieser Satz will so viel sagen, wenn AB Fig. LXII z. E. die Oberfläche eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, oder eines gläsernen Würfels ABEF vorstellet, so wird ein Lichtstrahl cd, der auf dieselbe bey d auffällt, nicht den geraden Weg cde, fortsetzen, sondern bey d, durch das Wasser oder Glaß, nach einer ganz anderen Richtung df fortgehen, dergestalt, daß die neue Richtung df, mit der cde, einen gewissen Winkel edf macht.

Diese Aenderung des natürlichen Weges der Lichtstrahlen geschiehet allemal, so oft ein Lichtstrahl aus einer dünnern durchsichtigen Materie, in eine dichtere fährt; eben dieses würde auch einem Lichtstrahle wiederfahren, der z. E. aus einer dünnern Luft in eine dichtere führe.

II. Man setze durch d auf die brechende Fläche AB ein Perpendickel mn, so lehret ferner die Erfahrung daß 1) der gebrochene Strahl df, das

das Perpendikel mn, und der einfallende Strahl cd, in einer einzigen Ebene liegen, 2) daß der gebrochene Strahl df mit dem Perpendikel mn einen kleinern Winkel fdn machet, als der einfallende Strahl cde, daß also der einfallende Strahl gegen das Perpendikel gebrochen oder gelenket wird 3) daß der Winkel mdc oder edn, welchen der einfallende Strahl, mit dem Perpendikel mn machet, gegen den Winkel fdn, den der gebrochene Strahl df mit dem Perpendikel mn machet, ein bestimtes Verhältniß hat, welches von den Dichtigkeiten der beyden durchsichtigen Materien abhängt, in denen sich der Lichtstrahl cdf fortbewegt. So z. E. wenn der Lichtstrahl cd, aus Luft in Wasser fährt, so verhält sich ohne merklichen Fehler, der Sinus des Winkels mdc, zum Sinus des Winkels fdn = 4 : 3, oder wie 3 : 2 wenn der Strahl aus Luft in Glas fährt.

Sind die Winkel mdc, fdn, klein, so ist das Verhältniß der Sinusse ohne großen Fehler dem Verhältniß der Winkel gleich, dann verhalten sich also die Winkel mdc, fdn, selbst wie die Zahlen 4 : 3 oder 3 : 2.

III. Der Winkel fdn heist der gebrochene Winkel, und edn, oder mdc der Neigungswinkel; der Unterschied dieser beyden Winkel, oder der edf heist aber der Refractionswinkel.

IV. Eine Folge aus dem bisherigen ist nun diese:

Wenn der Lichtstrahl cd von einem gewissen Objekte c herkäme, und sich bey f ein Auge innerhalb der dichtern Materie befände, so würde dieses Auge das Objekt c nicht an seiner rechten Stelle c sehen, sondern weil es vom Objekte c, den Lichtstrahl nach der Richtung df bekömt, so würde es das Objeckt c, in der Verlängerung von fd zu sehen glauben, und es z. E. bey γ hinsetzen, so wie es hingegen, wenn die dichtere Masse ABEF nicht da wäre, das Objekt c nach der geraden Richtung fc sehen würde.

Eben dieser Umstand findet nun in der That auch bey unserer Atmosphäre statt. Man stelle sich statt c die Spitze eines entlegenen Berges vor, das Auge f aber irgendwo im Thale. Weil nun auf den Bergen die Luft immer dünner ist als im Thale, so erhellet daß das Auge f, den Lichtstrahl, der von der Spitze des Berges herabfährt, nicht unmittelbar nach einer geraden Richtung fc bekömt, sondern nach einer ganz andern fdγ, welche mit der wahren fc einen gewissen Winkel γfc machen wird; diese Ablenkung von dem wahren natürlichen Wege fc rühret nun bloß daher, weil der Lichtstrahl aus einer dünnern Luft, in die untere dichtere Atmosphäre fällt, und daher also eine gewisse Brechung leidet,

welche

welche von dem Verhältniß der verschiedenen Dichtigkeit der Luft abhängt.

V. Man gedenke sich nun durchs Auge f eine Horizontallinie fo, so ist der Winkel, welchen cf mit fo macht, der **wahre Elevationswinkel** der Bergspitze, am Auge des Beobachters f, und über der durch f gehenden Horizontallinie.

VI. Weil aber der Beobachter f, das Objekt c nicht in der wahren Richtung cf, sondern nach einer ganz andern γf siehet, so wird derselbe bey Messung des Elevationswinkels, eigentlich nicht den wahren cfo, sondern den **scheinbaren Elevationswinkel** γfo erhalten, mithin wenn er in der trigonometrischen Berechnung der Höhe co den scheinbaren Elevationswinkel γfo statt des wahren cfo braucht, so wird nicht die wahre Höhe des Berges co, sondern die scheinbare γo herauskommen; er wird also einen Fehler = γc begehen, der desto beträchtlicher seyn wird, je mehr der scheinbare Winkel γfo, von dem wahren cfo unterschieden ist.

Dies zeigt, daß, wenn man in Messung der Höhen entlegener Objekte, keinen Fehler begehen will, man vorher den scheinbaren gemessenen Elevationswinkel, in den wahren verwandeln müsse, welches geschehen würde, wenn man von dem Winkel γfo, den γfc, welchen man die **Refraction** nennet, abzöge.

Allein

Allein wie findet man in jedem Falle die Größe dieser Refraction γ &c, mithin die nöthige Korrection des beobachteten Elevationswinkels? Ich werde sogleich zeigen, wie man dieselbe jedesmahl bestimmet. Ich muß aber vorher noch folgende Erläuterungen zum vorausschicken.

VII. Eigentlich ist der Weg eines Lichtstrahls durch unsere Luft, eine krumme Linie; denn weil die Dichtigkeit der Luft von oben herab beständig grösser wird, so ist klar, daß ein Lichtstrahl, der von der Spitze eines entlegenen Berges herabfährt, immer in dichtere und dichtere Luftschichten kömt, mithin immer mehr und mehr von seinem Wege abgelenkt wird, und alle diese einzelne Brechungen des Lichtstrahls in jeder Luftschicht, werden verursachen, daß der ganze Weg desselben eine gewisse zusammenhängende krumme Linie bilden wird. Den ausgeführtern Beweiß hievon lese man in Hrn. Hofr. Kästners Astron. §. 136 in dessen Angew. Mathem.

Die wahre Gestalt dieser krummen Linie ausfindig zu machen, haben sich von jeher die Naturforscher beschäftigt; sie hängt offenbar von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dichtigkeit der Luft von der Erdfläche bis auf eine gewisse Höhe verändert. — Da aber dieses Gesetz noch nicht vollkommen bekant ist, so weiß man auch noch nicht völlig genau die wahre Gestalt dieser krummen Linie.

VIII. Indessen läst sich darthun, daß 1) diese krumme Linie in einer Verticalebene liegt die durchs Auge, und durchs Object gehet, 2) daß diese krumme Linie, gegen die Erdfläche zu, hohl ist, und 3) daß sie wenigstens nicht sehr merklich, von einem Kreisbogen abweichet, dessen Halbmesser ohngefähr 7 bis 8 mahl grösser ist als der Halbmesser der Erde. Den Beweiß hievon findet man in Hrn. Lamberts Eigenschaften der Bahn des Lichts (Berl. 1772) in III Abschnitt.

Es sey also Fig. LXIII fn ein Stück eines grösten Kreises auf der Erdfläche, C der Mittelpunkt desselben; also fC der Halbmesser der Erde.

Bey f ein Beobachter auf der Oberfläche der Erde, c ein Objekt um die Höhe cn über der Erdfläche erhaben.

Man beschreibe nun in der Ebene fCe mit einem Halbmesser fL, der ohngefähr 7 bis 8 mahl grösser ist als fC, einen Kreisbogen fec, durch die beyden Punkte f, c, so daß dieser Kreisbogen gegen die Erdfläche fn hohl ist, so wird fec die Bahn oder krumme Linie seyn, in der sich das Licht von c bis f bewegt.

Man stelle sich bey f ein paar Tangenten fm, fγ, vor; fm für den Kreisbogen fn, und fγ für den Kreisbogen fec; so ist fm die Horizontallinie des Orts f.

Die

Die Tangente fγ, wird aber die Richtung vorstellen, welche ein unendlich kleines Stückgen fi des Bogens fec, bey f hat; da also der Lichtstrahl ceif bey f, unter der Richtung if das Auge rühret, so erhellet, weil fγ die Verlängerung von fi ist, daß ein Auge bey f, das Objekt c, nicht an seinem wahren Orte, sondern in der Richtung der Tangente fiγ, sehen wird;

Da also fγ die scheinbare Richtung, nach der das Objekt gesehen wird, und fc die wahre Richtung ist, so ist eben so wie vorhin, cfm der wahre Elevationswinkel, γfm aber der scheinbare, der also um die Refraction γfc grösser ist, als der wahre.

Man siehet also, daß wegen der krummen Linie, in der sich das Licht durch die Luft beweget, das Objekt c immer höher zu liegen scheinet, als es in der That lieget, daß man also statt der wahren Höhe nc, die scheinbare nγ bekommen würde, wenn man nicht den gemessenen Elevationswinkel mfγ durch die Refraction cfγ corrigirte.

VIII. Um nun die Refraction in jedem Falle zu erhalten, überlege man folgendes.

Weil der Winkel fCn immer nur sehr klein ist, und z. E. wenn n von t auch 7 bis 10 Meilen entfernt wäre, der Bogen fn oder der Winkel C kaum 40 bis 50 Minuten beträgt, so kan

kan man, wie eine kleine Ueberlegung zeigen wird, ohne merklichen Irrthum die Weite fc, der beyden Objekte, f, c, der Länge des Bogens fn gleich setzen.

Aber fc ist die Chorde des Bogens fec, und da ebenfalls der Bogen fec nur eine geringe Anzahl von Minuten halten wird, so wird auch ohne merklichen Fehler, die Länge des Bogens fec der Chorde fc gleich seyn. Folglich wird auch ohne beträchtlichen Irrthum der Bogen fec mit dem Bogen fn gleiche Länge haben.

Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, daß, wenn zween Kreisbogen, die mit verschiedenen Halbmessern beschrieben worden, gleiche Länge haben, sich die Mengen von Minuten die auf jeden Bogen gehen, umgekehrt, wie der beyden Bogen Halbmesser verhalten.

Man nenne also die Menge von Minuten oder Secunden die der Bogen fn oder der Winkel C hält $= \beta$, die auf den Bogen fec gehen $= \alpha$, den Halbmesser fC $=$ r und den Halbmesser fL des Bogens fec $=$ R, so ist

$$\alpha : \beta = r : R .$$

aber $r : R = 1 : 8$ folglich auch

$$\alpha : \beta = 1 : 8$$

oder $\alpha = \frac{1}{8} \beta$.

d. h. der Bogen, der den Weg des Lichtes zwischen zweyen Objekten f, c, vorstellet, oder auch der diesem Bogen, an seinem Mittelpunkte zugehörige Winkel L, enthält nur den 8ten Theil der Anzahl von Minuten, welche auf den Winkel L, oder den Bogen fn gehen, der zwischen der Höhe cn, und dem Orte des Beobachters f, auf der Erdfläche enthalten ist.

Dieser merkwürdige Satz, dienet nun die Refraction γfc auf folgende Art zu finden

Weil $f\gamma$ eine Tangente des Bogens fec, fc aber eine Chorde desselben ist, so hat der Winkel γfc zu seinem Maaße den halben Bogen fec, wie gleichfalls aus der Geometrie bekant ist. Da nun $fec = \alpha = \frac{1}{16}\beta$ ist, so wird seyn der Winkel $\gamma fc = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\beta = \frac{1}{16}\beta$.

Die Refraction beträgt also den 16ten Theil des Winkels fCn, dessen Maaß der Bogen β oder fn ist.

X. Auf diese Art kan man also in jedem Falle sehr leicht die Größe der Refraction finden, wenn man weiß wie viel Minuten oder Sekunden, auf den Bogen fn gehen, der zwischen dem Beobachter f, und der auszumessenden Höhe cn enthalten ist.

Gesetzt

Gesetzt der Bogen fn sey 30 Minuten, so ist die Refraction $\gamma f c = \frac{30}{16}$ Minuten $= 1'.52''$, wäre also der scheinbare gemessene Elevationswinkel $mf\gamma = 1° 15'$ so wäre der wahre Elevationswinkel $cfm = 1°15' - 1'52'' = 1°.13'.8''$.

XI. Die Anzahl von Minuten und Sekunden die aber in einem gegebenen Falle auf den Bogen fn gehen, kann man finden, wenn der Bogen fn in Längenmaaße bekant ist; da nun die Länge dieses Bogens ohne merklichen Fehler der Weite fc gleich ist, so ergiebt sich auch die Refraction, wenn man weiß, wie weit das Objekt c von dem Orte f weglieat. Man sehe fc als einen Bogen auf der Erdfläche an, verwandle ihn in Minuten und Sekunden, u. nehme den 16ten Theil davon, so hat man die Refraction.

Man setze also die Weite fc, die aus der trigonometrischen Messung bekant ist $= a$, so ist auch $fn = a$ und daher in Sekunden der Winkel $C = \frac{a}{r} . 206264$, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet. Setzet man also $r = 3272020$ Toisen so ist die Refraction $= \frac{1}{16} C = \frac{a . 206264}{16 . 3272020} = 0{,}003938 . a$ Sekunden; in welcher Formel a in Toisen gegeben seyn muß.

XII. Man siehet leicht, daß, wenn die auszumessende Höhe cn, von dem Standpunkt f nicht gar weit wegliegt, ohne merklichen Irrthum die Refraction für Null angesehen werden kan. Gesetzt der Bogen fn betrüge z. E. nur 3 Minuten, oder in Längenmaaße 17132 pariser Fuß, so wäre die Refraction nur $\frac{3}{170}$ einer Minute oder etwa 10″; man könte sie daher ohne beträchtlichen Irrthum weglassen; allein bey Messung der Höhen, aus sehr weit entfernten Standpunkten, darf man die Refr. nie aus der Acht lassen.

XIII. Die beygebrachte Regel, daß die Refraction den 16ten Theil des Winkels fCn beträgt, ist eigentlich auf die Voraussetzung gegründet, daß des Kreisbogens fec Halbmesser 8 mahl größer ist, als des Kreisbogens fn Halbmesser. Weil aber die krumme Linie des Lichtstrahls von dem Zustande der Luft abhängt, mithin der Kreisbogen fec bald flächer bald erhabener seyn muß, je nachdem der Zustand der Luft durch Wärme oder Dünste u. d. g. verändert wird, so erhellet daß auch des Kreisbogens fec Halbmesser nicht immer vollkommen einerley Größe haben wird. Dies zeigt also daß auch die Refraction, nicht beständig $\frac{1}{170}$ des Winkels C, sondern bald etwas größer, bald etwas kleiner, seyn werde. Indessen wird aber doch die Refraction nie viel von $\frac{1}{170}$. C abweichen; wenn

sich

sich auch der Zustand der Luft sehr merklich verändert.

Da der Zustand der Luft, von der Veränderung ihrer Dichtigkeit abhängt, und diese durch den Stand des Barometers und Thermometers angezeigt wird, so erhellet, daß die Refraction von dem Stande des Barometers und Thermometers bey f abhängen muß. Wenn ich überhaupt setze, daß die Refraction $\frac{1}{m}$ des Winkels C betrage, so habe ich nach einer von der Wahrheit nicht sehr entfernten Hypothese gefunden, daß, wenn in der untersten Station f das Barometer auf 28 Zoll stehet, die Werthe des Bruchs $\frac{1}{m}$ für verschiedene Grade des reaumürschen Thermometers folgende sind

Stand d. Therm.	der Werth von $\frac{1}{m}$
— 10°	$\frac{1}{15,6}$
0	$\frac{1}{16,4}$
+ 10	$\frac{1}{17,2}$
+ 20	$\frac{1}{18,1}$

Jeder Werth dieser Tafel muß aber nun noch in dem Verhältniß größer oder kleiner genommen werden, in welchem die Barometerhöhe bey f, größer oder kleiner ist als 28 Zoll.

Ex. Was für ein Theil des Winkels C wird die Refraction seyn, wenn beym Standpunkte f, das Thermometer 10 Grad über dem Gefrierpunkt, das Barometer aber auf 27,5 Zoll stände?

Weil für + 10° des Therm. der Werth von $\frac{1}{m} = \frac{1}{17,2}$ ist so schliese man

$$28 : 27,5 = \frac{1}{17,2} : x$$

so wird $x = \frac{1}{17,7}$ also wird bey einem solchen Zustande der Luft, die Refraction $\frac{1}{17,7}$ des Winkels C seyn.

XIV. Eigentlich hängt die Refraction auch etwas von dem Elevationswinkel $\gamma f m$ ab, allein der Einfluß dieses Winkels auf die Refraction, ist fast in allen Fällen so unbeträchtlich, daß man ihn völlig außer Acht lassen kan.

XIV.

XIV. Außer der in VIII erwähnten Schrift, können zu weiterer Nachlesung noch folgende Schriften dienen.

Memoires de l'Ac. de Paris. 1749. p. 101.

Meines Vaters *Tob. Mayeri Programma de refractionibus objectorum terrestrium Goett.* 1751.

XVII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen.

§. 201. Da wir auf dem Felde, diejenigen Stücke, welche zur Bestimmung der unbekanten Größen dienen, nie vollkommen genau messen können, sondern bey allen Messungen immer gewisse Fehler, die nach dem Verhältniß der Güte eines Werkzeugs, und der Sorgfalt des Beobachters, bald mehr bald minder erheblich sind, zu befürchten haben, so ist es die Pflicht eines Geometers, die Umstände zu bestimmen, unter welchen die Fehler in den gemessenen Stücken, auf die Bestimmung der unbekanten, einen großen oder geringen Einfluß haben; diese Lehre von der Berechnung der Folgen der Fehler wird ihm in vielen Fällen Anleitung geben, eine glückliche Auswahl der

zu messenden Stücke auf dem Felde zu treffen. Ich habe nun in den vorhergehenden Aufgaben, um den Vortrag nicht zu zerstreuen, nichts von dieser nothwendigen Berechnungsart beygebracht; ich werde aber das, worauf die Sache hauptsächlich ankomme, nun kürzlich im Zusammenhange vortragen können.

§. 202. Die Fehler die bey würklicher Messung der Linien vorfallen, habe ich meistens schon im III Kapitel beygebracht.

Bey Messung der Winkel sind aber die unvermeidlichen Fehler weit mannichfaltiger, sie hängen sowohl von dem eingetheilten Rande des Werkzeugs, als auch von dessen Stellung (X Kap.) der richtigen Bewegung des Fernrohres (XI Kap.) und noch mehreren Umständen ab; dergestalt daß es bey einem ausgemessenen Winkel, weit schwerer ist, den muthmaßlich begangenen Fehler, anzugeben, als es bey Messung gerader Linien geschehen kan.

Bey Bestimmung der Winkel auf dem Meßtische, setzt Marinoni (de Re ichnographica Lib. I. Cap. V. num. 5) die Möglichkeit des zu begehenden Fehlers auf 5 Minuten, vorausgesetzt, daß man nur ein gewöhnliches Diopterlinial zum Visiren braucht, und sonst mit aller möglichen Vorsicht zu Werke geht. Er bestätigt dieses auch durch würkliche Versuche die man a. a. O. selbst nachlesen kan.

Bey Messung der Winkel, mit einem Astrolabio von gewöhnlicher Größe, nemlich von ohngefähr einem Fuße im Durchmesser, das sonst übrigens mit möglichster Sorgfalt des Mechanici verfertiget und mit einem Fernrohre versehen ist, will ich den gröſten Fehler, der auch bey aller Aufmerksamkeit und Vorsicht, unvermeidlich ist, auf 2 bis 3 Minuten ansetzen, wovon ich mich durch die Erfahrung überzeugt habe, indem ich einerley Winkel zu verschiedenen Zeiten maaß, und die Resultate mit einander verglich. Denn wenn gleich in den Abtheilungen des Randes vielleicht keine Fehler von dieser Größe sind, oder wenn man dieselben auch gleich durch Prüfungen ausfindig gemacht hätte, und dem ausgemessenen Winkel die daher rührende Korrection gäbe, so können doch andere Umstände, z. E. eine etwas unrichtige Stellung des Werkzeugs, eine etwanige Excentricität, die Unvollkommenheit des Gesichts u. s. w. zusammen genommen bey einem so kleinen Instrumente, gar leicht einen Irrthum von 2 bis 3 Minuten hervorbringen, und ob zwar gleich in vielen Fällen die Beträchtlichkeit des Fehlers nicht von der angegebenen Größe seyn mögte, so muß man doch in der Theorie von den Folgen der Fehler ein für allemal etwas bestimmtes festsetzen, und hierzu muß man allemal den gröſten unvermeidlichen Fehler annehmen,

der sich von der Natur und Größe eines Werkzeugs erwarten läst.

Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Bousolen, wird man bey Messung eines Winkels mit diesem Werkzeuge, einen Fehler von 15 bis 20 Minuten, wohl schwerlich vermeiden können; daher werde ich bey den Bousolen den grösten unvermeidlichen Fehler auf 15 bis 20 Min. ansetzen.

§. 203. Die Fehler welche in einem ausgemessenen Winkel zu befürchten sind, können nun entweder den Winkel zu groß oder zu klein angeben, d. h. wenn man den ausgemessenen Winkel $= A$, die Größe des unvermeidlichen Fehlers $= \alpha$ nennet, so ist der wahre Winkel entweder $A - \alpha$ oder $A + \alpha$. Welches nun von beyden in einem besondern Falle statt findet, läst sich nicht entscheiden, sondern man muß beydes annehmen, und die Folgen davon berechnen.

Da solchergestalt die begangenen Fehler bald positiv bald negativ sind, so erhellet daß es zur Richtigkeit einer Messung gar vieles beytrage, wenn man die Größen zu wiederholtenmahlen misset, und aus allen das Mittel nimt. Wenn daher z. E. ein Winkel mit einem Astrolabio viermahl gemessen würde, und man aus allen vier Resultaten ein Mittel nähme, so würde man den Winkel mit einer viermahl geringern Unrich-

tig-

tigkeit finden, als wenn man ihn z. E. nur einmahl mäße.

Da es aber auf dem Felde eine sehr große Verzögerung der Arbeit seyn würde, alle Grössen zu wiederhohltenmahlen zu messen, so läst man es meistens, wenn nicht eine ausserordentliche Schärfe erfordert wird, bey der einmahligen Messung bewenden, und nimmt an, daß man einem so großen Fehler ausgesetzt sey, als man von der Natur des gebrauchten Werkzeugs zu befürchten hat, und sucht nun die Folgen desselben, d. h. dessen Einfluß auf die unbekanten Grössen zu berechnen.

§. 204. Setzt man nun muthmaßlich ein für allemahl einen gewissen Fehler fest, so wird es gar sehr auf die Lage der bekanten Grössen gegen die unbekanten ankommen, ob die in den gemessenen Linien und Winkeln begangene Fehler, auf die Bestimmung der unbekanten Stücke einen beträchtlichen Einfluß haben, oder nicht. Um hievon nur in einer Zeichnung einen ohngefähren Begrif zu geben, und den Grund zu folgenden Untersuchungen zu legen, so will ich annehmen B Fig. LXIV sey ein Object auf dem Felde, dessen Weite von A man aus der gemessenen Standlinie AC und den beyden Winkeln BAC, BCA bestimmen wolte.

Gesetzt nun, der Winkel BCA und die Standlinie AC seyen richtig gemessen worden, den Winkel BAC habe man aber um den kleinen Winkel BAb falsch gemessen, dergestalt daß also BAC den wahren Winkel, bAC den falsch gemessenen vorstellet, so erhellet, daß man aus dem Winkel C der Standlinie AC, und dem unrichtigen Winkel bAC nicht die wahre Weite AB, sondern eine ganz andere Ab finden würde, weil man statt des wahren Dreyecks ABC, das unrichtige AbC erhielte. Um so viel also Ab kleiner oder größer ist als AB, so viel beträgt in Absicht der Weite AB, die Folge des Fehlers, den man in Messung des Winkels BAC begangen hat.

Hier in der Figur ist nun die Standlinie AC so angenommen, daß das Dreyeck BAC ohngefähr gleichschenklicht ist.

Man setze aber, die Weite AB zu bestimmen, hätte man nicht die Standlinie AC sondern eine andere Ac angenommen, welche mit AB einen sehr stumpfen Winkel cAB macht. Ich will völlig wie vorhin annehmen, Ac, und der Winkel c seyen richtig, der Winkel an A aber, nemlich cAB, wieder um den kleinen Winkel BAß falsch gemessen worden, und will setzen daß BAß = BAb sey, so erhellet, daß man dadurch eigentlich nicht das wahre Dreyeck cAB, sondern wieder

das

das unrichtige cAβ, mithin auch nicht, die wahre Weite AB, sondern Aβ finden würde. Nun wird man aber schon aus der bloßen Zeichnung sehen, daß wegen Ac = AC, und βAB = BAb der Unterschied AB — Aβ weit beträchtlicher seyn werde, als der Unterschied AB — Ab.

Diese Unterschiede drücken aber den Fehler aus, welchen man in der Seite AB zu befürchten hat, wenn man selbige entweder aus der Standlinie Ac, oder AC bestimmen will. Es ist also klar, daß wenn man gleich in Messung des Winkels A an beyden Standlinien einerley Fehler begienge, derselbe dennoch bey Auswahl der Standlinie Ac, die Weite AB mit einer größern Unrichtigkeit geben würde, als bey Wahl der Standlinie AC und man siehet leicht, daß dies daher rühren müsse, weil bey Annehmung der Standlinie Ac, der Winkel cAB sehr stumpf ist, hingegen CAB an der Standlinie AC eine mäßige Größe hat. Es ist hieraus zureichend begreiflich, daß die richtige Bestimmung der unbekanten Stücke (wie z E AB) sehr von einer schicklichen Auswahl der willkürlichen oder bekanten Größen abhänge, daß gleichgroße Fehler in den gemessenen Stücken, gar verschiedenen Einfluß auf die Bestimmung der unbekanten haben können. Woraus dann ferner folgt, daß ein schlechteres Instrument, bey einer schicklichen Auswahl der willkürlichen Standpuncte und Linien, oft eben

so

so gute Dienste leistet, als ein gutes Werkzeug, bey schlimmern Umständen; und daß z. E. ein Fehler von 10 Minuten, bey Messung der Winkel an der Standlinie AC, vielleicht nicht so gefährlich ist, als ein Fehler von 1 Minute, in den Winkeln an der Standlinie Ac.

Dieses gegebene Beyspiel wird nun einigermaaßen den Nutzen zeigen, den man von der Theorie und Berechnung der Folgen der Fehler zu erwarten hat.

Die allgemeine Theorie hievon bloß synthetisch vorgetragen, findet sich in Hrn. Marinoni obenwähnten Werke, im zweiten Theile. Sein Vortrag ist aber so weitläuftig, und mit so beschwerlichen Demonstrationen und Figuren begleitet, daß man gar leicht dabey ermüdet. — Und am Ende siehet man doch nicht ein, worauf eigentlich die Sache ankomme.

Ich werde nun diese Theorie nicht synthetisch, sondern analytisch behandeln, und mich hierzu der Trigonometrischen Sätze bedienen, die ich im vorhergehenden bereits beygebracht habe, weil hiedurch diese Lehre theils allgemeiner theils sehr viel kürzer und weniger ermüdend, vorgetragen werden kan. Diejenigen, welche sich vor etwas Buchstabenrechenkunst fürchten, dürfen freylich dieses Kapitel nicht lesen, allein diese würden

auch

auch Hrn. Marinoni verwickelten synthetischen Beweise nicht einsehen.

Da nun auf dem Felde die unbekanten Stücke, durch ein oder mehrere Dreyecke, an denen man eine zureichende Anzahl von Seiten und Winkeln misset, bestimmt werden, so erhellet, daß die Theorie von den Folgen der Fehler in zusammengesetzten Figuren, sich auf die Theorie derselben in einzeln Dreyecken gründe. Ich werde also erstlich zeigen, worauf die Sache bey bloßen Dreyecken ankomme, und dann auch von zusammengesetztern Fällen einige Beyspiele geben, woraus man denn gar leicht sehen wird, wie man in jedem Falle verfahren müsse.

Theorie von den Folgen der Fehler in einzeln Dreyecken.

§. 205. Bekantermaaßen ist ein Dreyeck durch drey gegebene Stücke bestimmt, vorausgesetzt, daß es nicht lauter Winkel sind. Die Lehre von den Folgen der Fehler kömt nun darauf an.

Wenn die drey gegebenen Stücke eines Dreyecks etwas falsch gemessen werden, also etwas größer oder kleiner genommen würden, als sie in der That sind, zu berechnen, in wieferne eines von den gesuchten Stücken des Dreyecks, dadurch verändert oder unrichtig werde. Diese

Ver-

Veränderung heist dann die **Folge** der in den gemessenen Stücken vorgefallenen Fehler, in Absicht des unbekanten Stückes.

Man könte die Frage schon durch die gemeine Trigonometrie auflösen, und so mögen auch diejenigen verfahren, die mit der Buchstabenrechnung nicht zurecht kommen können.

Gesetzt die Grundlinie eines Dreyecks wäre 100 Ruthen und die beyden Winkel an ihr 50°; 128°; man wolte berechnen, was in einer von den beyden übrigen Seiten z. E. derjenigen welche dem Winkel von 50° gegenüberstehet und die ich a nennen will, für ein Fehler entstände, wenn man statt der wahren Grundlinie von 100 R. z E. eine von 100 R. 8 Fuß, statt der wahren Winkel 50°, 128°, die falsch gemessenen 50° 4'; 128° 5', annähme, und also zum voraussetzte, daß in Messung der Grundlinie ein Fehler von 8 Fußen, in dem einen Winkel ein Fehler von 4', und in dem andern ein Fehler von 5' begangen worden wäre, und zwar daß man die erwähnten Grössen um so viel zu groß gemessen hätte; so könte man auf folgende Art verfahren.

Man berechne erstlich die Seite a, aus den Grössen 100 R. 8 Fuß; 50° 4'; 128° 5'. Und hierauf diese Seite a aus den Grössen 100 R.; 50°; 128°. Beyde Resultate ziehe man von ein-

einander ab, so wird alsdann der Rest, die Folge der in der Grundlinie und den Winkeln, begangenen Fehler, in Absicht auf die Seite a anzeigen.

Wenn ich erstlich aus 100 Ruthen 8 Fuß, 50° 4′; 128° 5′ die Seite a berechne, so finde ich dieselbe = 23942 Fuß
Aber aus 100R.;50°;128°;wird sie = 21950 Fuß

Unterschied = 992 Fuß.

Hieraus erhellet also, daß die Seite a um 992 Fuß ungewiß wäre, wenn man in den Winkeln an der Grundlinie, nur einen Fehler von 4 bis 5 Minuten begangen hätte, und der Fehler der Grundlinie selbst nur 8 Fuß betrüge.

Auf diese Art würde man nun auch in andern Fällen, bloß durch gemeine Trigonometrie, die Folge der begangenen Fehler berechnen. Allein da man theils immer zwey Dreyecke, nemlich das fehlerhafte und das wahre auflösen muß; und übrigens auch in vielen Fällen die Rechnung solchergestalt zu weitläuftig ausfällt, so will ich diese Methode bloß denenjenigen überlassen, die nicht mit der Buchstabenrechnung zu rechte kommen können, und nun zeigen, wie man weit bequemer und allgemeiner durch algebraische Formeln zum Endzweck gelangt.

§. 206.

§. 204. Wenn eines Dreyecks PQR Fig. LXV, Seiten PR = q; QR = p; PQ = r, und die gegenüberstehenden Winkel, Q, P, R, genennt werden, so hat man für die Auflösungen der Dreyecke, folgende zwo allgemeine trigonometrischen Formeln

I) $p \sin R = r \sin P$

II) $q^2 + r^2 - 2qr \cos P = p^2$ (Trig. S. XVII)

Diese beyden Auflösungen enthalten fast alle vorkommenden Fälle, und wenn man in jeder dieser Formeln, allemahl drey Größen als bekant ansiehet, so läst sich daraus die 4te durch Rechnung finden.

Es scheinet, zwar, der Fall, wo aus den zween Winkeln P, Q, und der dazwischen liegenden Seite r, das übrige gesucht würde, nicht mit unter diesen beyden Formeln enthalten zu seyn. Allein wenn man einiges Augenmerk auf die erste Formel richtet, so wird man finden, daß dieser Fall auch in ihr begriffen ist. Denn wenn man die beyden Winkel P, Q, von 180° abziehet so hat man den Winkel R; man setze also nur in die Formel I statt R den Werth $180° - P - Q$ so hat man die Auflösung für den Fall, wo aus zween Winkeln, und der dazwischen liegenden Seite das übrige gesucht wird.

Ferner

Ferner ist auch der Fall, wo aus den beyden Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, einer von den beyden übrigen Winkeln gesucht würde, nicht mit unter den beyden Formeln begriffen. Ich habe aber denselben mit Fleiß ausgelassen, weil es auf dem Felde sehr selten vorkömt, daß man einen Winkel sucht.

Da nun solchergestalt, diese Formeln allgemein die Verhältnisse, zwischen den bekanten und gesuchten Grössen eines Dreyecks ausdrücken, so erhellet, daß man vermittelst derselben auch allgemein bestimmen könne, um wie viel sich die gesuchten Grössen verändern, wenn man die bekanten Grössen, etwas falsch gemessen hätte, und sie also etwas anders annähme, als sie würklich sind.

Da man ferner die in den gemessenen Grössen begangenen Fehler, als Veränderungen dieser Grössen ansehen kan, weil sie etwas grösser oder kleiner angenommen werden, als sie würklich sind, so siehet man leicht, daß die Untersuchung darauf ankomme, zu finden, um wie viel sich obige beyde Formeln verändern, wenn man jede Grösse ihr, sich etwas verändern läst.

Aus dem vorhergehenden (Trig. S. XXVII) ist bekant daß wir die Veränderung einer Grösse mit dem davor gesetzten Buchstaben d bezeichnen.

Die Ausdrückungen dp, dq, dr, dQ, dP u. s. w. werden also die Werthe bezeichnen, um die des Dreyecks Seiten p, q, r oder Winkel Q, P u. s. w. grösser oder kleiner genommen werden als sie würklich sind, und werden folglich die vorgefallenen Fehler in den Seiten oder Winkeln andeuten, dergestalt, daß wenn p, q, Q u. s. w. die wahren Grössen sind, $p + dp$; $q + dq$; $Q + dQ$ u. s. w. die fehlerhaften darstellen.

Es erhellet, daß, wenn die falsch gemessenen Stücke grösser sind als die wahren, die Werthe von dp, dq u. s. w. positiv sind; hingegen negativ, wenn die Grössen zu klein gemessen worden:

Wir wollen nun untersuchen, wie man auf eine bequeme Weise, in jedem Falle das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder zwischen den Werthen von dp, dq, dQ u. s. w. in einem Dreyecke bestimmen könne; und da dp, dq, dQ u. s. w in Absicht der Grössen p, q, Q, selbst, als sehr geringe angenommen werden, so können wir dazu, die zu Anfange dieses Buches beygebrachten Formeln, für die Aenderungen, der Producte, Quotienten u. s. w. mit Nutzen gebrauchen.

Aufgabe.

§. 207. In einem Dreyecke PQR sind gemessen worden; die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, man verlangt zu wissen, um

wie

wie viel sich eine von den beyden übrigen Seiten z. E. p verändere, wenn die Grössen P, Q, r etwas falsch gemessen worden.

Aufl. I. Man verlangt also in dem Dreyecke PQR, das Verhältniß zwischen den Werthen dp, dQ, dP, dr.

II. Um dasselbe zu finden, suche man erstlich die Gleichung zwischen den Grössen P, Q, r, p;

III. Sie ist nach der 1 Formel des 206 §. folgende

$$p \sin(180° - P - Q) = r \cdot \sin P \text{ oder}$$
$$p \sin(P + Q) = r \sin P.$$

IV. Man überlege nun, daß, wenn in dieser Formel sich die Grössen p; r; P; Q um etwas verändern, sich auch die Producte $p \sin(P+Q)$; $r \sin P$; verändern, und weil diese Producte gleich sind, so werden auch ihre Aenderungen gleich seyn.

V. Ich suche nun erstlich die Aenderung des Products $p \sin(P+Q)$ wenn ich annehme, daß sich p um dp, P um dP, Q um dQ verändert.

VI. Dies finde ich nach der Formel Trig. S. XXXIV. indem ich das dortige $x = p$, das dortige $y = \sin(P+Q)$ setze; so wird wegen $d(xy) = xdy + ydx$ hier

$$d(p \sin(P+Q)) = pd \sin(P+Q) + \sin(P+Q)dp.$$

Nun ist aber d sin (P+Q) die Veränderung eines Sinus, und kan daher nach (Trig. S. XXVIII) berechnet werden, wenn man das dortige a = P+Q setzet; dies giebt demnach wegen da = dP+dQ (Trig. S. XXXI) den Werth von

$$d \sin (P+Q) = (dP+dQ) \cos (P+Q)$$

Mithin wird die Veränderung des erwähnten Products

$$= p(dP+dQ)\cos(P+Q)+\sin(P+Q)\,dp.$$

VII. Auf gleiche Weise suche ich die Veränderung des Products r sin P, wenn sich nemlich r um dr, P um dP ändert.

Man setze also in die Formel (Trig. S. XXXIV) jetzt x = r, y = sin P so wird

$$d(r \sin P) = r\,d\sin P + \sin P\,dr$$

Aber $d \sin P = dP \cos P$ daher

die Veränderung des Produkts r sin P

$$= r\,dP\cos P + \sin P\,dr.$$

VIII. Die beyden Werthe für die Veränderungen der erwähnten Producte einander gleich gesetzt, geben nun eine Gleichung zwischen den Grössen, dP, dQ, dr, dp, d. h. eine Gleichung zwischen den Fehlern, in den Winkeln und Seiten eines Dreyecks, und es erhellet leicht, wenn drey von diesen Grössen z. E. dP,

dQ,

dQ, dr, gegeben wären, man die 4te dp durch Rechnung finden könne, wodurch also angezeigt würde, was die in den beyden Winkeln, P, Q, und der Standlinie r begangenen Fehler für einen Fehler in der Seite p hervorbringen.

Allein da die Gleichung welche sich aus (VI. VII) ergiebt, etwas weitläuftig ausfällt, und wir noch einige Reductionen vornehmen müsten, sie auf den kürzsten Ausdruck zu bringen, so will ich zeigen, wie man in der jetzigen Aufgabe, die Gleichung zwischen den Fehlern dP, dQ, dr, dp noch auf eine weit leichtere Art finden könne.

IX. Weil nemlich die Gleichung III. aus ein paar Producten bestehet, die einander gleich sind, so erhellet, daß die Logarithmen derselben gleich seyn müssen. Es ist also

$$lp + l\sin(P+Q) = lr + l\sin P$$

X. Folglich hat man auch

$$d\log p + d\log\sin(P+Q) = d\log r + d\log\sin P.$$

XI. Aber aus Trig. S. XLVI (das dortige $x = p$ gesetzt) ist

$$d\log p = B.\frac{dp}{p}\text{; und eben so } d\log r = B.\frac{dr}{r}$$

Ferner aus Trig. S. XLVII das dortige $a = P$ gesetzt, folgt

$d \log \sin P = B\, dP \cot P$ und eben so

$d \log \sin (P+Q) = B\,(dP + dQ) \cot (P+Q)$

diese Werthe nun in die Gleichung X substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + (\cot P - \cot(P+Q))dP$$

XII. Nun ist aber $\cot P = \frac{\cos P}{\sin P}$ und

$\cot(P+Q) = \frac{\cos(P+Q)}{\sin(P+Q)}$ daher

$$\cot P - \cot(P+Q) = \frac{\sin(P+Q)\cos P - \sin P \cos(P+Q)}{\sin P \sin(P+Q)}$$

$$= \frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)} \text{ (Trig. S. XII)}$$

XIII. Dieser Werth also in die Gleichung XI substituirt giebt

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)} \cdot dP$$

wo ich künftig der Kürze halber $\cot(P+Q) = N$ und

sin

$$\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P+Q)} = M \text{ mithin}$$

$$\frac{dp}{p} + N\,dQ = \frac{dr}{r} + M\,dP$$

setzen will.

XIV. Diese Gleichung zwischen den Fehlern in den Seiten und Winkeln, ist nun ohnstreitig so kurz als möglich und hat den Vortheil, daß die Glieder $\frac{dp}{p}, \frac{dr}{r}$ blos von den Seiten des Dreyecks, hingegen $N\,dQ$, $M\,dP$ bloß von den Winkeln desselben abhängen, welches zu verschiedenen Folgerungen nützlich seyn kan.

Zugleich ist diese Gleichung auch besonders bequem die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Seiten zu finden; denn die Quot. $\frac{dp}{p}, \frac{dr}{r}$, drücken eigentlich aus, wie groß die Fehler dp, dr, in Absicht ihrer zugehörigen Seiten p, r, sind; und oft verlangt man nicht den absoluten Werth des Fehlers, sondern vielmehr dessen Verhältniß zur zugehörigen Grösse.

Wenn man also z. E. für den Quotienten $\frac{dp}{p}$

den Werth $\frac{1}{1000}$ fände, so zeigte dieses an, daß man um ein Tausentheilgen des ganzen gefehlet hätte, dergestalt, daß wenn z. E. die Seite $p = 1000$ Ruthen wäre, der Fehler derselben 1 Ruthe betrüge.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Werthe von dP, dQ, die Fehler in den Winkeln, nicht in Minuten und Sekunden bedeuten, sondern vielmehr in Decimaltheilgen des Sinus totus, der durchgängig $= 1$ gesetzt worden: sind aber dP, dQ, würklich in Sekunden gegeben, so muß man statt dP, dQ, eigentlich die Werthe $\frac{dP}{206264}$, $\frac{dQ}{206264}$ setzen, damit man ihren Werth in Decimaltheilen des Sinus tot. erhalte.

Die gefundene Formel wird nun dazu dienen, in jedem Falle die Folge der Fehler, und deren Verhältniß zu den zugehörigen Grössen zu finden. So z. E wenn man in dem Dreyecke PQR, die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, um dP, dQ, dr, falsch gemessen hätte, und wolte deren Erfolg auf die Seite p, finden; so dürfte man nur in obiger Gleichung den Werth von $\frac{dp}{p}$ suchen. Also würde

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M\,dP - N\,dQ.$$

Wolte

Wolte man z. E. aus den falsch gemessenen Grössen P, Q, p, den Fehler in der Grundlinie r bestimmen so hätte man

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - MdP + NdQ$$

u. s. w. Woraus also erhellet, daß wenn von den 4 Fehlern dP, dQ, dr, dp, drey als gegeben angesehen werden, man den 4ten durch Rechnung finden könne.

XV. Die bisherige Rechnung setzt zum voraus daß wenn die wahren Grössen, P, Q, p, r, sind, die fehlerhaften P+dP, Q+dQ, p+dp, r+dr heisen, mithin die Fehler dP, dQ, dp, dr, positiv sind, und die Grössen P, q, Q, r, zu groß gemessen worden.

Es erhellet daß wenn die Seiten und Winkel zu klein gemessen wären, man in obiger Formel XIII, die Werthe dQ u. s. w. als negativ betrachten müsse.

Wenn in einer von den Grössen P, Q, r, p, keine Fehler vorgefallen sind, so siehet man ihre Veränderung als o an; in solchen Fällen werden also dP, dQ, u. s. w. = o gesetzt. Z. E. wenn man die Grundlinie r als richtig gemessen annimt, so ist dr = o mithin blos

$$\frac{dp}{p} = MdP - N.dQ$$

Und wenn auch Q richtig gemessen worden, so hätte man nur $\frac{dp}{p} = M\,dP$.

Woraus man also blos den Fehler fände, welcher in der Seite p, aus dem falsch gemessenen Winkel P herrührte.

Ueberhaupt wird also die algemeine Gleichung (XIII) unter den verschiedenen Voraussetzungen, die man den Werthen von dP, dQ u. s. w, giebt, eine Menge einzelner Fälle in sich enthalten, die man bey Hrn. Marinoni durch weitläuftige Demonstrationen und Figuren aus einander gesetzt findet.

XVI. Um das bisherige mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen in dem Dreyecke PQR, seyen die Grundlinie PQ = r = 100 Ruthen, P = 30° 6′; Q = 140° 8′ würklich gemessen worden, man wolte daraus die Seite RQ = p finden, und zugleich angeben, wie zuverläßig die Seite p gefunden würde, wenn die Grundlinie r um 2 Fuß, der Winkel P aber um 5 Minuten und der Winkel Q um 4 Minuten falsch, und zwar zu groß gemessen worden wäre. Die wahren Grössen würden also folgende seyn r = 100 Ruthen — 2 Fuß = 998 Fuß; P = 30° 6′ — 5′ = 30° 1′; Q = 140° 8′ — 4′ = 140° 4′, und die Werthe von dr = + 2 Fuß; dQ = + 4′ = + 240″; dP = + 5′ = + 300″.

Weil

Weil nun für diesen Fall

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M\,dP - N\,dQ$$

so erhält man folgendes

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{998} = \frac{1}{499} = 0{,}002$$

Ferner $\log N = l \cot 170^\circ 5' = 0{,}7573897$
$l\,dQ = l\,240 = 2{,}3802112$

$3{,}1376009$
$l\,206264 = 5{,}3144252$

$3{,}8231757$

dies giebt also

$$\frac{N\,dQ}{206264} = -0{,}006655$$

der eigentliche Werth von $\frac{N\,dQ}{206264}$ ist hier aus der Ursache negativ weil die Cotangente von $170^\circ 5'$ oder der Werth von N, negativ ist. Ferner ist für das Glied

$$\frac{M\,dP}{206264} \text{ oder } \frac{\sin Q\,dP}{\sin P \sin (P+Q)\,206264}$$

log

$\log \sin Q = l \sin 140° 4' = 9{,}8074646 - 10$
$l\,dP = l\,300 = 2{,}4771213$

$\log$ des Zählers $= 2{,}2845859$

$l \sin P = l \sin 30° 1' = 9{,}6991887 - 10$
$l\,s(P+Q) = l\,s\,170° 5' = 9{,}2360726 - 10$
$l\,206264 = 5{,}3144252$

$\log$ des Nenners $= 4{,}2496865$

also $\log \frac{M\,dP}{206264} = 3{,}0348994 - 5$

nemlich nachdem die Characteristik des Log. des Zählers um 5 Einheiten vermehret worden, also

$$\frac{M\,dP}{206264} = 0{,}01083$$

Unter denen im Exempel angenommenen Umständen wird also

$$\frac{dp}{p} = 0{,}002 + 0{,}01083 - (-0{,}006655)$$
$$= 0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}006655$$

oder $\frac{dp}{p} = +0{,}01948$ beynahe $= 0{,}02$

Es erhellet also daß die angenommenen Fehler in den Messungen von P, Q, r, einen solchen Einfluß auf die Seite p haben, daß man nur bis auf $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{10}$ ihrer Grösse sicher ist;

woraus

woraus also klar ist, daß die kleinen Fehler in Messung der Grössen P, Q, r, hier auf die Seite p einen ziemlich beträchtlichen Einfluß haben. Dieser Bruch $\frac{1}{50}$ zeigt nun blos die Grösse des Fehlers dp in Verhältniß zur Seite p an, wolte man den wahren Fehler dp in Ruthen und Fussen ausfinden, so dürfte man nur aus den oben angenommenen Datis die Seite p würklich berechnen, und ihren 50ten Theil nehmen, so hätte man die absolute Grösse des Fehlers in Ruthen und Fussen. Ich will aber hier die Rechnung nicht anstellen;

XVII. Dieses Exempel setzt voraus, daß alle Grössen auf dem Felde zu groß gemessen wurden; es ist klar, wenn einige davon zu klein gemessen worden wären, man nur die zugehörigen Werthe dQ, u. s. w. verneint nehmen müsse. Dies verändert also in der ganzen Rechnung nichts als, daß man blos die Zeichen, der Glieder $\frac{dr}{r}$; NdQ; MdP jedesmahl gehörig verändert.

Zum Exempel wenn die Seite r um 2 Fuß zu klein gemessen worden, das übrige aber mit vorhergehendem Exempel einerley bliebe, so wäre

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}00665 = +0{,}01548$$

Wäre

Wäre aber auch der Winkel Q um 4 Minuten zu klein gemessen worden so hätte man

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 - 0{,}01083 + 0{,}00665 = -0{,}00618$$

Im letztern Beyspiele wäre also der Fehler in der Seite p auch negativ, betrüge aber nur ohngefähr, 0,006 oder $\frac{1}{166}$ der Seite p, wäre also bey weiten nicht so beträchtlich, als wenn alle Grössen auf dem Felde zu groß gemessen worden wären, wie in (XVI).

XVIII. Nachdem solchergestalt, für gewisse Werthe von dQ, dr, dp die Grössen MdP u. s. w. einmal berechnet sind, so kan man gar leicht ausfindig machen, unter welchen Umständen der Werth von $\frac{dp}{p}$ am grösten wird. Man siehet leicht daß in dem obigen Beyspiele $\frac{dp}{p}$ am grösten wird, wenn alle Grössen P, Q, r zu groß gemessen worden, oder wenn dQ, dP, dr insgesamt positiv sind, denn in diesem Falle wurden alle Werthe $\frac{dr}{r}$, MdP u. s. w. zusammenaddirt (XVI). Hingegen in XVII. sind einige Glieder bejaht

bejaht andere verneint, welches denn nothwendig für $\frac{dp}{p}$ einen geringern Werth hervorbringen muß.

XIX. Hieraus zeigt sich zugleich der Vortheil, den die bisher gewiesene algebraische Methode, die Folgen der Fehler zu berechnen, in Absicht der in §. 205 erwähnten gemeinen trigonometrischen Methode hat. Nach letzterer müste man für jede Voraussetzung, die man den Werthen von dQ, dr, dP, in Absicht des + oder — geben kan, zwey Dreyecke berechnen um den Werth von dp zu finden; und da es sich nicht so gleich übersehen läst, wie man in einem gewissen Falle, die Werthe von dQ, dr, dP bejaht oder verneint nehmen muß, um das gröste dp zu finden, so wird man offenbar, eine Menge von Dreyecken berechnen müssen, bis man die gröste Folge der begangenen Fehler findet. Dies ist aber hingegen bey der algebraischen Berechnung nicht nothwendig; denn wenn man für gegebene dQ, dP, dr, einmahl die Werthe von MdP, $\frac{dr}{r}$ u. s. w. berechnet hat, so braucht man weiter nichts, als diese Glieder bald positiv bald negativ zu nehmen, und so ihre Summe zu untersuchen; woraus denn gar bald erhellen wird, wie man die für dQ, dP, dr angenommenen Grössen positiv oder negativ nehmen

men müsse, damit man das gröste dp, oder den grösten Einfluß der Fehler, in Absicht der Seite p, finde. Um sich von der Weitläuftigkeit der gemeinen Trigonometrischen Methode noch mehr zu überzeugen, so lese man hierüber nur z. E. den 187 §. von **Wilkens Landesvermessungen**, wo in dem dortigen Exempel sieben Dreyecke aufgelöset werden, um den grösten Fehler der Seite p zu finden.

Es ist klar, daß es für einen vorgegebenen Fall, nothwendig ist, unter allen den Werthen, die $\frac{dp}{p}$, erhalten kan, vorzüglich auf den grösten Rücksicht zu nehmen, weil dieser die **gröste mögliche Zuverläßigkeit der gesuchten Seite** p bestimt. Denn ob man gleich nicht weiß, welche von den gegebenen Grössen P, Q, r, zu groß oder zu klein gemessen worden, und man folglich ungewiß ist, ob man die für dP, dQ, dr angenommenen Werthe, positiv oder negativ nehmen müsse, so muß man doch unter allen den Voraussetzungen, die man in Absicht des + oder — diesen Grössen dP, dQ, dr, geben kan, gerade diejenige wählen, welche für $\frac{dp}{p}$ den grösten Werth giebt, weil dieser Fall würklich vorhanden seyn kan, und daher die möglichste Zuverläßigkeit entscheidet, welche in der Seite p zu erwarten stehet.

Einige

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 208. I. Wenn die Grundlinie r sowohl, als auch der Winkel Q als richtig gemessen angenommen wird, mithin $dr = o$, $dQ = o$ sind, so hat man bloß

$$\frac{dp}{p} = MdP.$$

Es erhellet also, daß wenn in allen Dreyecken, wo die auszumessende Seite p mit der Standlinie PQ einen gewissen Winkel Q macht, den man als richtig gemessen ansiehet, in dem Winkel P gleich grosse Fehler begangen werden, sich dp oder der daraus entspringende Fehler in der Seite p, zu dieser Seite p selbst verhalten werde wie 1 : M, daß sich folglich der Grad der Zuverläßigkeit in der Seite p, oder der Werth von $\frac{dp}{p}$ (§. 207 XIV.) verhalten werde wie M oder wie $\frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)}$, daß also die Unrichtigkeit der gesuchten Seite p von den Winkeln P, Q, abhänge, folglich bald grösser, bald kleiner seyn könne, je nachdem die Standlinie r gegen die Seite p diese oder jene Lage hat. Es frägt sich nun, wie müssen z. E. die Winkel P, Q an der Standlinie beschaffen seyn, daß unter allen möglichen Standlinien, der Fehler $\frac{dp}{p}$ so klein als möglich werde?

Da ich nun solchergestalt den Winkel Q als gegeben, und richtig gemessen annehme, so läuft die Frage darauf hinaus; wie groß muß man P nehmen, damit der Bruch $\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P+Q)}$ den kleinsten Werth erhalte?

Um dieses zu entscheiden, so errinnere man sich aus der Lehre von Brüchen, daß, wenn eines Bruchs Zähler, unverändert bleibt, der Bruch desto kleiner werde, je grösser sein Nenner wird. Da nun bey oberwähnten Bruche der Zähler $\sin Q$ unverändert bleibt, weil Q als gegeben angesehen wird, so wird dieser Bruch einen desto kleinern Werth haben je grösser sein Nenner, also das Produckt $\sin P \sin (P+Q)$ ist. Um aber zu finden was man für P annehmen müsse, daß dieses Produckt am grösten werde, so überlege man folgendes

Weil $\sin (P+Q) = \sin (180° - P - Q)$ so ist auch das erwähnte Produckt

$$= \sin P \,.\, \sin (180° - P - Q)$$

Man setze in Trig. S. XIII. 10. das dortige $\beta = 180° - P - Q$ das dortige $\gamma = P$ so wird

$$\sin P \sin (180° - P - Q) = +\tfrac{1}{2}\cos (180° - 2P - Q) - \tfrac{1}{2}\cos (180° - Q)$$

Weil

Weil nun $\frac{1}{2}$ cos (180° — Q) wegen des gegebenen Winkels Q, als unveränderlich angesehen wird, so erhellet, daß das oberwähnte Produckt am grösten seyn werde, wenn cos (180° — 2P — Q) den grösten möglichen Werth hat.

Nun ist aber kein Cosinus grösser als der Sinus totus, oder als der Cosinus von 0°, es erhellet also daß wenn 180° — 2P — Q = 0 ist, alsdann cos (180° — 2P — Q) den grösten möglichen Werth haben werde.

Also ist das Produckt sin P sin (180° — P — Q) oder auch sin P sin (P + Q) am grösten, mithin der oberwähnte Bruch am kleinsten, wenn

$$180° - 2P - Q = 0 \text{ also}$$

der Winkel $P = 90° - \frac{1}{2} Q$ ist.

Nun ist aber ferner der Winkel R in dem bisher betrachteten Dreyecke = 180° — P — Q folglich statt P den gefundenen Werth $90° - \frac{1}{2} Q$ substituirt

$$R = 180° - 90° + \frac{1}{2} Q - Q = 90° - \frac{1}{2} Q$$

Es ist also R = P

d. h. die Standlinie r Fig. LXV, die mit der auszumessenden Weite p, einen gegebenen Winkel Q macht, muß so lang genommen werden, daß der Winkel R = P werde, mithin das Dreyeck gleichschenklicht, und die Standlinie

$r = p$ sey. Unter solchen Umständen wird der Fehler, den man in Messung des Winkels P begehet, den kleinsten Einfluß auf die Seite p haben, weil alsdann das Product MdP am kleinsten wird.

Es wird also die Entfernung p am vortheilhaftesten gefunden, wenn man die Standlinie r, sucht, so viel als möglich, der auszumessenden Entfernung p gleich zu nehmen. Ob sich gleich dieses auf dem Felde nicht immer thun läst, so muß man es doch, wenn es angehen kan, nicht unterlassen. Nach dem Augenmaaße, wird man übrigens immer schon ohngefähr die Weite p, so genau schätzen können, als nöthig ist, um die Länge der Standlinie r darnach einzurichten.

II. Wenn ich den in (I) gefundenen Werth von P in die Formel für M substituire, so finde ich

$$\frac{dp}{p} = MdP = \frac{\sin Q \; dP}{\cos \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q}$$

welches sich wegen $\sin Q = 2 \sin \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q$ (Trig. S. XIII. 21)

in $\frac{dp}{p} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} Q}{\cos \frac{1}{2} Q} dP = 2 \tang \frac{1}{2} Q . dP$

verwandelt.

Woraus also erhellet, daß, wenn die Standlinie r, die vortheilhafteste Länge hat, um die Seite p zu bestimmen, sich der Grad der Zuverläßig-

läßigkeit in der Seite p, oder $\frac{dp}{p}$ verhalte, wie die Tangente des halben Winkels Q, den die Standlinie mit der auszumessenden Seite p machet. Es wird also wegen des in dem Winkel P zu befürchtenden Fehlers dP, der Werth von $\frac{dp}{p}$ desto kleiner seyn je kleiner man Q nimmt;

Je mehr also die Länge der Standlinie r der auszumessenden Entfernung p gleich kömt, und einen desto kleinern Winkel Q, sie mit der Seite p machet, desto zuverläßiger wird die Seite p gefunden, oder desto weniger Einfluß, hat der im Winkel P begangene Fehler, auf die Seite p.

III. Da wir in (I) gesehen haben, daß die Standlinie ohngefähr so lang seyn muß, als die auszumessende Entfernung, so erhellet, daß wenn man auf eben die Art aus den beyden Winkeln P, Q, an der Standlinie, auch die andere Seite des Dreyecks, nemlich q, am richtigsten bestimmen wolte, man auch q = r nehmen müsse. Da nun auch, um p am genauesten zu finden, p = r zu dieser Absicht seyn muste, so erhellet daß, wenn die Standlinie r, oder die Grundlinie des Dreyecks, den beyden Seiten p, q, des Dreyecks gleich ist, alsdann aus denen an der Grundlinie gemessenen Winkeln, die beyden Seiten des Dreyecks am zuverläßigsten gefunden werden.

Aber wenn $p = q = r$, so ist das Dreyeck PQR gleichseitig, und folglich jeder Winkel $= 60°$

Es erhellet also, daß, wenn zwo Seiten eines Dreyecks auf dem Felde, mit der Standlinie Winkel von 60 Graden machen, oder wenigstens nicht viel von 60 Graden abweichen, alsdann die Standlinie die vortheilhafteste Lage habe, beyde Seiten dieses Dreyecks zu bestimmen.

Je mehr aber die Winkel an einer Standlinie auf dem Felde von 60 Graden abweichen, mit desto größerer Unrichtigkeit, findet man die Seiten dieses Dreyecks.

Es ist also hieraus begreiflich, wie schädlich es sey, Dreyecke auf dem Felde aus solchen Standlinien zu bestimmen, an denen die Seiten dieser Dreyecke, sehr spitze oder stumpfe Winkel machen.

Eine Folge hieraus ist nun z. E. diese.

Es seyen Fig. XLVI, S, R, W, T, U, Objekte auf dem Felde, deren Lage man sowohl unter sich als gegen die Standlinie PQ bestimmen wolte.

Wenn man sich von diesen Punkten S, R u. s. w. nach beyden Standorten P, Q, gerade Linien gezogen vorstellet, so erhält man an der Standlinie

linie so viel Dreyecke, als man Objekte hat, und es erhellet, daß die Lagen von S, R, W, T u. s. w. durch die Seiten PS, QS; PR, QR u. s. w. bestimmet werden; diese Seiten findet man aber, aus der gemessenen Standlinie PQ, und den Winkeln, welche die Seiten der Dreyecke PSQ, PRQ u. s. w. mit der Standlinie machen. Wenn ich nun annehme in jedem Winkel würden kleine Fehler begangen, so erhellet, daß jeder Punkt S, R, W, T, mit einer kleinen Unrichtigkeit gefunden werden wird. Allein wenn man die Frage anstellen wolte, welches von allen Objekten S, R, W, T, U, wird die richtigste Lage gegen die Standlinie erhalten, auf welches haben die begangenen Fehler den geringsten Einfluß? so wird man nur untersuchen dürfen, wessen Objekts Winkel an der Standlinie, 60 Graden am nächsten kommen. Man siehet leicht, daß dieses hier z. E. das Objekt R seyn würde; weil die Winkel RPQ, RQP beyde zugleich, nicht viel von 60° abweichen.

Hingegen alle Punkte, wie z. E. T, U, die bey P, Q, sehr ungleiche Winkel TPQ, TQP, UPQ, UQP machen, werden sowohl unter sich, als auch gegen die Standlinie eine desto unrichtigere Lage erhalten, je mehr die oberwähnten Winkel von 60° abweichen, weil alsdann die in Messung der Winkel an der Standlinie zu befürchtenden Fehler, einen sehr grossen Einfluß

auf die Bestimmung der Punkte T, U, haben können.

Es ist also klar, daß, wenn man die Lage der Punkte T, U gegen die übrigen W, R, S, ungleich genauer finden wolte, man es nicht bey der Standlinie PQ, bewenden lassen, sondern eine neue z. E. PM annehmen müsse, an der die Winkel TPM, TMP u. s. w. näher an 60 Graden kommen, oder wenigstens nicht so stumpf ausfallen, wie die Winkel an der erstern Standlinie PQ. Denn die Entfernungen PT, MT, PU, MU, die die Lage der Punkte T, U, gegen die übrigen bestimmen, werden aus der Standlinie PM, gewiß weit sicherer, als aus der PQ gefunden.

IV. Da Fig. LXV eines Dreyeckes PRQ Seiten QR, PR, mithin auch der Punkt R am sichersten gefunden wird wenn jeder von den beyden Winkeln P, Q, nahe an 60° kömt, so setze man nur in obige Formel,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q\, dP}{\sin P \sin (P+Q)} - \cot (P+Q)\, dQ$$

$Q = 60°$; $P = 60°$; so findet man, den Fehler in der Seite p, welcher bey der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, noch statt finden kan, wenn die Winkel P, Q etwas fehlerhaft gemessen worden.

Dies

Dies giebt demnach

$$\frac{dp}{p} = \frac{dP}{\sin 60^\circ} + \text{tang } 30^\circ . dQ$$

Es ist klar daß eben dieser Ausdruck auch den Fehler $\frac{dq}{q}$ in der andern Seite q des Dreyecks ausdrücken werde, weil q, p gleiche Lagen gegen die Standlinie r haben. Nehme ich nun an daß in beyden Winkeln P, Q, einerley Fehler begangen werden, und zwar die gröſten, die beym Gebrauche eines gewiſſen Winkelmeſſers unvermeidlich ſind, ſetze ich alſo $dP = dQ$, ſo wird der Fehler welcher in beyden Seiten des Dreyecks daraus entſpringet

$$= \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \left(\frac{1}{\sin 60^\circ} + \text{tang } 30^\circ\right) dP$$

Nun iſt aber

$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \text{sec } 30 = 1{,}15470$$

und tang $30^\circ = 0{,}57735$

alſo $\frac{dp}{p} = 1{,}73205 . dP$

wo man eigentlich ſtatt dP ſetzen muß $\frac{dP}{206264}$

Diese Formel wird also zeigen, wie genau wegen der Fehler in den Winkeln P, Q, an der Grundlinie, die Seiten p, q, des Dreyecks, auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, gefunden werden können.

Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur bis auf 1 Minute genau misset, wie genau können auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, die beyden Seiten des Dreyecks gefunden werden?

Man setze in unsere Formel $dP = 1' = 60''$ so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{1{,}73205 \cdot 60}{206264} = \frac{104}{206264} \text{ beynahe}$$

oder beynahe $\frac{dp}{p} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$

Man kan also bey jeder Seite p, q des Dreyecks nur bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher seyn. Das heist, man würde für jede 2000 Ruthen, die in der Seite des Dreyecks enthalten wären um 1 Ruthe fehlen.

Für einen Winkelmesser der nur bis auf 2 Minuten sicher mäße, wäre die Zuverläßigkeit in jeder Seite Dreyecks nur $\frac{1}{1000}$

Da

Da man nun in Ausmessung der Winkel, vermittelst eines Astrolabii von gewöhnlicher Größe, auch bey aller nöthigen Sorgfalt, für einen Fehler von 2 Minuten nicht gut stehen kan (§. 202); so erhellet daß beym Gebrauche eines solchen Werkzeugs, auch bey den vortheilhaftesten Umständen, die Seiten eines Dreyecks auf dem Felde nicht genauer, als etwa bis auf $\frac{1}{1000}$ ihrer Länge sicher gefunden werden können. Um wie viel grösser würde also die Unzuverläßigkeit ausfallen, wenn die Standlinie gegen die beyden Seiten des Dreyecks eine minder vortheilhafte Lage hätte?

Es ist klar, daß in dem bisherigen vorausgesetzt worden, daß die Standlinie ihre gehörige Richtigkeit habe, also $dr = o$ sey. Wäre selbst auch die Standlinie etwas fehlerhaft gemessen worden, so würde daher, die Unrichtigkeit in Bestimmung der beyden Seiten des Dreyecks noch grösser seyn.

Man siehet hieraus, wie genaue Werkzeuge erfordert werden, wenn man auf dem Felde, nicht um den 1000ten Theil des ganzen fehlen will, wie viele Sorgfalt also überhaupt ein Geometer anwenden müsse wenn er sich von der Wahrheit nicht sehr entfernen will, und wie ungewissenhaft die Feldmesser verfahren, wenn sie bey wichtigen

Messun-

Messungen, sich aus Nachläßigkeit vorsetzliche Fehler erlauben, besonders, wenn die Umstände einer Messung mißlich sind.

Das bisherige von (IV) angerechnet, beziehet sich eigentlich darauf, daß die möglichste Zuverläßigkeit der beyden Seiten des Dreyecks zugleich,, gefunden werden soll; freylich könte die Zuverläßigkeit grösser seyn, wenn man nur eine Seite p suchte, denn da kan man nach (II) nur den Winkel Q an der Standlinie so klein machen, daß der Werth von $\frac{dp}{p} = \text{tang } \frac{1}{2} QdP$ (II) so unbeträchtlich wird, als man verlangt. Allein wenn beyde Seiten des Dreyecks zugleich, mit der möglichsten Genauigkeit gefunden werden sollen, so sind die vortheilhaftesten Umstände die, daß man die Winkel an der Standlinie so nahe als möglich an 60° zu bringen sucht. Dieser Fall ist nun eigentlich bey Grundlegung der Landschaften, und Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine gewisse Standlinie wichtig, weil die Lage eines Ortes wie R gegen die Standlinie PQ, nicht bloß durch eine sondern durch beyde Seiten des Dreyecks zugleich bestimmt wird, und folglich jede mit möglichster Zuverläßigkeit gefunden werden muß, wenn R die richtigste Lage gegen P, Q haben soll.

V. Da es nicht allemal in des Feldmessers Gewalt stehet, die vortheilhaftesten Umstände einer Standlinie auf dem Felde auszuwählen, so werde ich, wenn anders die Umstände nicht gar zu mißlich sind, die möglichste Zuverläßigkeit, in Bestimmung zwoer Seiten eines Dreyecks, aus einer Standlinie, etwa auf $\frac{1}{400}$ ihrer Länge setzen, dergestalt, daß man auf jede 400 Ruthen, um eine Ruthe ungewis ist. Einen Fehler von dieser Grösse kan man einem Feldmesser wohl verzeihen, da im Durchschnitt genommen, diese Genauigkeit, in Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine Standlinie immer noch erträglich, und wohl schwerlich, bey einem Winkelmesser, der nur, wie ich voraussetze, bis auf zwo Minuten genau misset, zu vermeiden ist, und ich zweifle gar sehr, ob in den meisten Messungen noch diese Genauigkeit zu erwarten stehet. Beym Gebrauche des Meßtisches, wird natürlicher Weise die Zuverläßigkeit noch geringer seyn, da bey diesem Werkzeuge die unvermeidlichen Fehler noch grösser sind als wir beym Astrolabio angenommen haben. In den meisten Fällen kan man immer setzen, daß beym Gebrauche des Meßtisches in Bestimmung zwoer Seiten eines Dreyecks aus einer Standlinie, die Genauigkeit derselben, sich wohl schwerlich auf $\frac{1}{200}$ ihrer Länge erstrecken wird. Versuche können auch leicht selbst davon überzeugen.

VI.

VI. Eine andere wichtige Folge für den Feldmesser ist hieraus diese, daß, wenn er aus einer gewissen Standlinie, wie PQ, Fig. XLVI die Lage der Oerter S, R, W, T, U, bestimmt hat, und nun wie es bey Grundlegung der Landschaften zu geschehen pflegt, aus den bereits bestimmten Oertern wieder andere bestimmen will, er von denen S, R, W, T, U, solche dazu auswähle, von denen man hoffen kan, daß die an der Grundlinie PQ begangenen unvermeidlichen Fehler auf sie keinen grossen Einfluß gehabt. Hier in der Figur würden z B. die Oerter T, U, am ungeschicktesten zu neuen Standpunkten gewählet werden können, weil theils ihre Entfernung T U zu klein ist, theils auch, weil in ihrer Bestimmung die wenigste Zuverläßigkeit zu hoffen ist, indem die Winkel an T, U, sehr spitz, und die an der Grundlinie, von 60° gar viel abweichen. Weit vortheilhafter wäre es aber, die Oerter R, W, zu neuen Standpunkten zu wählen, wie sich aus der Figur der Dreyecke RPQ, PWQ leicht übersehen läst. Dies leichte Beyspiel zeigt also, wie vorsichtig ein Feldmesser zu Werke gehen muß, wenn alle Oerter einer in Grund zu legenden Landschaft, ihre möglichst genaue Lage gegen einander erhalten sollen.

Ueberhaupt ist dies eine der wichtigsten Regeln für den Feldmesser, von den bereits erhaltenen Bestimmungen einer Messung nur solche

zu

zu fernerer Bestimmung anderer Grössen auszuwählen, die am geschicktesten und zuverläßigsten scheinen, und so beschaffen sind, daß sich die Fehler so wenig als möglich häufen, sich auf die fernern Bestimmungen fortpflanzen, und am Ende eine sehr grosse Unrichtigkeit verursachen. Und so wird ein Feldmesser, der sonst auch nur mittelmäßige Werkzeuge braucht, oft was genaueres leisten, als ein anderer, der beym Gebrauch der besten Werkzeuge, aus Mangel nöthiger Kenntnisse, nicht die vortheilhaftesten Umstände auszuwählen weiß.

Aufgabe.

§. 209. In einem Dreyecke PQR, sind die beyden Seiten q, r, und der eingeschlossene Winkel P, etwas falsch gemessen worden, man verlangt, zu wissen, in wie ferne dadurch die Seite p unrichtig werde; oder wenn die Fehler der Grössen q, r, p, P, wie bisher mit dq, dr, dp, dP bezeichnet werden, die Gleichung zwischen dq, dr, dp, dP zu finden. Ich nehme übrigens die Werthe von dq, dr, dp, dP positiv an, dergestalt daß wenn q, r, p, P die wahren Grössen sind, q + dq, r + dr, u. s. w. die fehlerhaften vorstellen.

Aufl. Aus (§. 206. II) ist die Gleichung zwischen p, q, r, P folgende

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2qr\cos P.$$

II. Man suche nun um wie viel sich jedes Glied dieser Gleichung verändert, wenn, p um dp, q um dq u. s. w. wachsen, und es ist klar, daß die Veränderung von p^2 gleich seyn müsse, der Summe der Veränderungen, der Glieder

$$q^2,\ r^2,\ -2qr\cos P.$$

III Wenn p um dp zunimmt, so wächst das Quadrat von p um 2pdp (Trig. S. XXXIV) oder es ist $d(p^2) = 2pdp$. Auf gleiche Weise ist $d(q^2) = 2qdq$; $d(r^2) = 2rdr$.

IV. Um zu finden, um wie viel sich das Produkt $2qr\cos P$ verändert, wenn q um dq, r um dr, P um dP zunehmen, so will ich der Kürze halber das Produkt $2qr\cos P = X$ setzen, und es kömt also darauf an, den Werth von dX zu finden.

Nun ist, wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt

$$l2 + lq + lr + l\cos P = lX$$

folglich aus (Trig. S. XLVI. XLVII. 2), und weil $d \log 2 = 0$ ist, indem sich die 2 nicht

nicht verändert, erhält man

$$\frac{dq}{q}+\frac{dr}{r}-dP\,\text{tang}\,P=\frac{dX}{X}$$

oder auf beyden Seiten mit $X = 2qr\cos P$ multiplicirt

$$2r\,dq\cos P+2q\,dr\cos P-2qr\,dP\sin P=dX$$

V. Weil nun aus (I. II)

$$d(p^2)=d(q^2)+d(r^2)-dX$$ seyn muß.

so erhält man nach gehöriger Substitution der Werthe aus (III. IV.) folgende Gleichung

$$pdp=qdq+rdr-q\cos P\,dr-r\cos P\,dq+qr\,dP\sin P$$

welche sich in folgenden Ausdruck zusammen ziehet

$$pdp=(q-r\cos P)\,dq+(r-q\cos P)\,dr+qr\sin P\,.\,dP$$

VI. Diese Gleichung stellet also die Relation zwischen den Fehlern dp, dq, dr, dP, vor, und es erhellet, daß, wenn drey von diesen Fehlern gegeben sind, man den 4ten, welcher also die Folge der erstern drey darstellet, finden könne. Diese Gleichung ist aber nicht kurz genug, auch nicht geschickt, die Werthe von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$ u. s. w. nemlich die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Grössen zu bestimmen. Aus dieser

Ursache wollen wir mit dieser Gleichung noch einige Veränderung vornehmen.

VII. Man stelle sich in dem Dreyecke PQR, von Q, R Perpendiculärlinien auf die gegenüberstehenden Seiten vor, so wird man aus denen daher rührenden rechtwinklichten Dreyecken gar leicht herleiten, daß

$q - r \cos P = p \cos R$ und $r - q \cos P = p \cos Q$ sey

diese Werthe also in (V) substituirt, geben

$$p\,dp = p \cos R\, dq + p \cos Q\, dr + qr \sin P\, dP,$$

oder durchgängig mit p^2 dividirt

$$\frac{dp}{p} = \frac{\cos R}{p} dq + \frac{\cos Q}{p} dr + \frac{q \cdot r}{p \cdot p} \sin P\, dP$$

oder

$$\frac{dp}{p} = \cos R \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{dq}{q} + \cos Q \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{p} \sin P\, dP$$

Aber in dem Dreyecke PQR ist

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin Q}{\sin P}; \quad \frac{r}{p} = \frac{\sin R}{\sin P}$$

(Weil sich die Seiten wie der gegenüberstehenden Winkel Sinusse verhalten)

Also

Also wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q \cos R}{\sin P} \cdot \frac{dq}{q} + \frac{\sin R \cos Q}{\sin P} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q \sin R}{\sin P} \cdot dP$$

Nennt man also die Factoren, womit $\frac{dq}{q}, \frac{dr}{r}$ dP, multipliret sind, A, B, C so wird

$$\frac{dp}{p} = A \cdot \frac{dq}{q} + B \cdot \frac{dr}{r} + C\,dP$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Werthen von $\frac{dp}{p}, \frac{dq}{q}, \frac{dr}{r}$, dP ist. Statt dP muß man aber aus obigen Gründen eigentlich $\frac{dP}{206264}$ setzen, wenn dP in Sekunden gegeben ist.

Die Werthe von A, B, C sind nun bekante Grössen, weil man alle Winkel des Dreyecks PQR als gegeben ansehen kan, wenn q, r, P gegeben sind.

Für Seiten oder Winkel die zu klein gemessen worden, sind dp, dq, dr, dP negativ oder = o wenn die erwähnten Grössen richtig gemessen worden.

Einige Folgerungen.

§. 210. I. Wenn man mit Hrn. **Marinoni** (de re ichnograph. Lib. I. Cap. V. §. V. num. I.) annimmt, daß die Fehler in den gemessenen Linien, diesen Linien selbst proportional sind, wenn man also $q : r = dq : dr$ oder $\frac{dq}{q} = \frac{dr}{r}$ setzt, so wird

$$\frac{dp}{P} = (A+B)\frac{dq}{q} + CdP \text{ aber}$$

$$A+B = \frac{\sin Q \cos R + \sin R \cos Q}{\sin P} = \frac{\sin (Q+R)}{\sin P}$$

$$= \frac{\sin P}{\sin P} = 1 \text{ folglich}$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{q} + CdP$$

Unter dieser Voraussetzung des Herrn Marinoni, die sich durch die Erfahrung zu bestätigen scheinet, wird also die Formel (§. 209, VII) ungleich einfacher.

II. Ist übrigens auch der Winkel P richtig gemessen, folglich $dP = 0$, so ist blos

$$\frac{dp}{P} = \frac{dq}{q}$$

oder $p : q = dp : dq$ folglich

$$p + dp : q + dq = p : q$$

oder die fehlerhaften Seiten verhalten sich wie die wahren. Eben dieses gielt auch in (I) wo man aus der Proportion $q : r = dq : dr$ schliesset

$$q + dq : r + dr = q : r$$

Man siehet also leicht, daß, wenn die Fehler der Seiten q, r, eines Dreyecks, in dem Verhältniß der Seiten selbst stehen, der eingeschlossene Winkel P aber keine Veränderung leidet, das fehlerhafte Dreyeck, dem wahren ähnlich seyn müsse.

IV. Andere Folgerungen in Absicht der Zeichen + oder — die man den Werthen von dq, dr, dP geben kan, sind eben so wie in vorhergehender Aufgabe anzustellen, und man wird mit geringer Mühe aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dp}{p} = A\frac{dq}{q} + B\frac{dr}{r} + CdP$$

jede einzelne Fälle herleiten können wenn man sie nöthig hat, daher ich mich bey dieser Aufgabe nicht länger aufhalten will.

Aufgabe.

§. 211. In einem Dreyecke PQR, wo man zwischen den Grössen r, R, p, P, oder zween

Winkeln und den gegenüberstehenden Seiten, folgende Gleichung

$$p \sin R = r \sin P$$

hat, die Gleichung zwischen den Fehlern dp, dr, dR, dP zu finden.

Aufl. Man könte hier eben wie in der erstern Aufgabe verfahren, und untersuchen, um wie viel die beyden Produkte p sin R, r sin P sich verändern, wenn p um dp, R um dR u. s. w. sich verändert; alsdann die Aenderungen der beyden Produkte einander gleich setzen.

Hier kan man aber durch Logarithmen kürzer so verfahren.

$$\text{Weil } lp + l\sin R = lr + l\sin P$$

$$\text{so wird } \frac{dp}{p} + dR \cot R = \frac{dr}{r} + dP \cot P$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Anmerkung.

§. 212. Das bisherige mag zureichen in Dreyecken, die Verhältnisse zwischen den Fehlern der Seiten und Winkel, zu finden, und die beygebrachten drey Aufgaben, werden die gewöhnlichsten Fälle in sich enthalten, die beym Feldmessen vorkommen;

Man

Man wird auch nun leicht begreifen, wie die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in zusammengesetztern Fällen, sich auf die einfachern bisher beygebrachten Fälle gründen. Um hievon nur ohngefähr ein Beyspiel beyzubringen, so will ich annehmen, man suche z. B. nach der Aufgabe §. 184 die Weite AB, aus CD und denen an der Standlinie CD gemessenen Winkeln. Um nun den Einfluß zu finden, den die Fehler in Messung der erwähnten Winkel, auf die gesuchte Weite AB haben, so würde man etwa auf folgende Art verfahren;

Ich würde 1) den Fehler berechnen, welcher aus den unrichtig gemessenen Winkeln ACD, ADC, auf die Seite AC des Dreyecks ACD erfolgte. Man siehet leicht, daß dieses nach der Auflösung des 207 §. geschehen könne. Auf diese Art fände ich also den Werth von $\frac{dAC}{AC}$ wo dAC den Fehler der Seite AC und der Quotiente $\frac{dAC}{AC}$ wie bekant, das Verhältniß des Fehlers zur zugehörigen Grösse ausdrückt.

2) Auf eben die Art würde ich in dem Dreyecke BCD, aus den falsch gemessenen Winkeln BCD, BDC, den Fehler der Seite BC oder den Werth von $\frac{dBC}{BC}$ berechnen.

3) Würde ich endlich in dem Dreyecke ACB, wo mir die Fehler $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, der beyden Seiten AC, BC, und der Fehler des eingeschlossenen gemessenen Winkels ACB bekannt sind, den Fehler der dritten Seite AB oder den Werth von $\frac{dAB}{AB}$ nach der Aufgabe des 209 §. finden.

Man dürfte nemlich in der Auflösung des 209 §. statt der Werthe $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$ nur die gefundenen $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, und statt dP den Fehler des Winkels ACB substituiren, so erhielte man den Werth von $\frac{dp}{p}$ oder hier von $\frac{dAB}{AB}$, also die Unrichtigkeit der gesuchten Weite AB.

Man wird leicht begreifen, daß bey würklicher Anwendung, diese Rechnung etwas weitläuftig ausfallen wird.

Man kan sich aber unterschiedene Vortheile dabey machen. Um nur einen zu erwähnen: Weil man in dem Dreyecke ACB, zur Berechnung des Fehlers der Seite AB, die beyden Winkel CAB, CBA wissen muß, so kan man die-

dieselben bloß, nachdem man sich die ganze Figur ABCD, nach einem verjüngten Maaßstabe, vermöge der an der gemessenenen Grundlinie CD bekannten Winkel, entworfen hat, durch einen Transporteur messen. Ob man dadurch freylich diese Winkel nicht so genau, als durch Rechnung findet, so schadet es doch nichts, bey Berechnung des Fehlers in der Weite AB; man mache den Versuch, und nehme in der Formel des §. 209 VIII, die Winkel Q, R, etwas grösser oder kleiner als sie würklich sind, so wird dieses auf Bestimmung des Werthes von $\frac{dp}{P}$ keinen sonderlichen Einfluß haben.

Man könte den Fehler in der Weite AB noch auf eine andere Art finden, nemlich daß man, die Formel suchte, wodurch AB, durch die Standlinie CD, und den Winkeln an der Standlinie bestimmt wird, und hierauf wie bey den Dreyecken gewiesen worden, auf eine ähnliche Art, die Veränderungen dieser Formel untersuchte, welche aus den fehlerhaft gemessenen Grössen entständen; allein die Rechnung wird doch noch immer weitläuftig bleiben, weil die Formel wodurch AB bestimmt wird, sich nicht auf einen einfachen und kurzen Ausdruck bringen läst.

In Fällen, wo die unbekante Grösse durch eine bequeme Formel ausgedrückt werden kan,

läst sich die Berechnung der Folgen der Fehler gleichfalls ohne Schwürigkeit bewerkstelligen, wie folgende beyden Beyspiele, die ich, um die Theorie davon noch etwas vollständiger zu zeigen, noch beybringen will, ausweisen.

Beyspiele, die Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen zu berechnen.

§. 213. I. Wir haben bey der Aufgabe des 191 §. folgende Gleichung für die Höhe Kw die wir x nennen wollen, gefunden

$$x = \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Es frägt sich, wenn b, β, α, um db, $d\beta$, $d\alpha$, falsch gemessen worden, wie unrichtig man dadurch den Werth von x findet.

Weil die Formel für x sich hier bequem durch Logarithmen in einzelne Theile zerlegen läst, indem

$$lx = lb + l\sin\beta + l\sin\alpha - l\sin(\alpha - \beta)$$ ist

so darf man nur die Veränderuug eines jeden einzeln Theiles dieser Formel suchen, und die Veränderungen die auf beyden Seiten dieser Gleichung herauskommen, wieder in eine Gleichung bringen, so wird man das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder den Grössen dx, db, $d\beta$, $d\alpha$, finden.

Weil

Weil also

$d\log x = d\log b + d\,l\sin\beta + d\,l\,l\alpha - d\,l\,l(\alpha-\beta)$

ist so erhält man aus den obigen beygebrachten Trig. Sätz. XLVI. XLVII

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + d\beta\cot\beta + d\alpha\cot\alpha - \\ -(d\alpha - d\beta)\cot(\alpha-\beta)$$

oder wenn man der Kürze halber

$\cot(\alpha-\beta)+\cot\beta = M$; $\cot\alpha - \cot(\alpha-\beta) = N$

setzet, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + M\,d\beta + N\,d\alpha$$

welches die gesuchte Gleichung ist, und die Unrichtigkeit in der Höhe x bestimmt.

II. Für die Aufgabe des 194 §. erhielten wir folgende Gleichung $KI = \frac{a\sin\gamma\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sin(180°-\beta-\gamma)}$.

Um wie viel wird sich die Höhe KI ändern, wenn die Grössen a, γ, α, β um da, $d\gamma$, $d\alpha$, $d\beta$ falsch gemessen worden?

Hier läst sich durch Logarithmen, die Formel wieder bequem in einzelne Theile zerlegen

$l\,KI = l\,a + l\sin\gamma + l\,\mathrm{tang}\,\alpha - l\sin(180°-\beta-\gamma)$

oder

$l\,KI = l\,a + l\sin\gamma + l\,\mathrm{tang}\,\alpha - l\sin(\beta+\gamma)$

daher

daher wird nach Trig. S. XLVI. XLVII.

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + d\gamma \cot \gamma + \frac{2\,d\alpha}{\sin 2\alpha} - \\ - (d\beta + d\gamma)\cot(\beta+\gamma)$$

oder wenn ich der Kürze halber

$$\cot(\beta+\gamma) = M; \frac{2}{\sin 2\alpha} \text{ oder}$$

$$2\operatorname{cosec} 2\alpha = N, \cot\gamma - \cot(\beta+\gamma) = L$$

setze so ist

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + Ld\gamma + Nd\alpha - Md\beta$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Aus dieser Formel wird sich leicht herleiten lassen, daß, je kleiner der Winkel α, und die Standlinie a ist, desto grösser die Unrichtigkeit in der Höhe KI sey, weil der Quotiente $\frac{dKI}{KI}$ unter solchen Umständen wächst.

Es ist daher nicht vortheilhaft aus sehr entfernten Standpunkten, Höhen zu messen, weil alsdann gewöhnlich der Winkel α sowohl, als auch die Standlinie a nicht von gehöriger Grösse genommen werden können.

Mehr Exempel beyzubringen würde unnöthig seyn.

Man

Man wird aus dem bisherigen zureichend einsehen, worauf sich die Berechnung der Fehlergründe, und wenn man sich in denen zu Anfange dieses Buches gegebenen Formeln, für die Veränderungen der Produkte, Quotienten u. s. w. einigermaaßen geübt hat, so wird man gar leicht in allen Fällen die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen anstellen können. Diejenigen Fälle, die aber in der Ausübung am meisten vorkommen, sind in den Aufgaben dieses Kapitels enthalten.

Auf den Formeln §. 207. u. f. gründen sich nun auch die von verschiedenen Schriftstellern angegebenen Regeln von Auswahl der Standlinien; was davon in der Ausübung vorzüglich brauchbar ist habe ich theils schon beygebracht, theils werde ich auch in der Folge noch etwas davon reden. Die meisten Vorschriften, die aber von Auswahl der Standlinien in zusammengesetzten Fällen, von diesen Schriftstellern beygebracht worden, sind so verwickelt und eingeschränkt, daß meines Erachtens die Ausübung keine beträchtlichen Vortheile davon zu erwarten hat. Auch ist die Theorie davon in der That ziemlichen Schwürigkeiten unterworfen, und führt auf Rechnungen und Constructionen, die auch den arbeitsamsten Feldmesser ermüden würden. Man sehe nur was Herr Lambert (Beyträge z. pract. Geometrie §. 418. 420) hievon erwähnt. Und

wenn

wenn ich nun auch annehme, daß man nach der Theorie für die Entwerfung einer gewissen Menge von Objekten die geschickteste Standlinie ausgefunden hat, wird man sie auch immer auf dem Felde so annehmen können, wie sie der Theorie nach liegen solte? Wird man aus ihr auch alle Punkte sehen können, die man entwerfen will? Andererer Hinderhisse zu geschweigen. Und da überhaupt, die Auswahl der besten Standlinie auf dem Felde selten in des Feldmessers Gewalt stehet, so wird er oft Standpunkte wählen müssen, die zwar der Theorie nach nicht die vortheilhaftesten sind, die aber doch noch immer eine erträgliche Lage haben, und sich durch andere Umstände, z. E. durch ihre Bequemlichkeit, durch die Aussicht die man an ihnen haben kan u. s. w vorzüglich empfehlen. Und solche Standlinien auszufinden braucht man keine weitläuftigen Rechnungen, sondern nur einige Kenntniß der Gegend, und einen vorläufigen, auch nur mäßig richtigen, etwa nach dem Augenmaaße, oder sonst auf eine andere Art entworfenen Grundriß, dergleichen man doch immer, wo man genauere Vermessungen anstellen will, bey Privatpersonen oder sonst irgendwo erhalten kan. Da ferner eine einzige Standlinie selten zureichet, eine gewisse Anzahl von Oertern richtig aufzunehmen, so kan man aus neuen Standlinien theils diejenigen Punkte, die man aus der erstern Standlinie erhalten hat, berichtigen,

theils

theils auch diejenigen Oerter aufnehmen, gegen die, die erste Standlinie eine zu ungeschickte Lage hatte. Und so wird man immer durch den Gebrauch mehrerer Standlinien, alle nöthige Genauigkeit erhalten.

Wer übrigens von Auswahl der Standlinien, und überhaupt von der bisherigen Theorie, außer den bisher angeführten Schriften des Hrn. Marinoni und Lamberts, noch mehreres nachlesen will, dem können noch folgende Schriftsteller dienen.

Wolfii Elem. Trigonom. latinae. §. 58. seq.

Bouguer Figure de la Terre Sect. II. art. 3.

Hrn. Hofr. Kästners Abhandl. von den Fehlern beym Feldmessen welche man in den Abh. der Königl. Schwed. Ac. d. Wiss. fürs Jahr 1753. findet und Hrn. Bar. Fried Palmquists dahin gehöriger Aufsatz in den Abh. der K. Schwed. Ac. fürs Jahr 1768. (nach der Kästn. Uebers.)

Karl Scherfers Trigon. Versuch von der Wahl des Standes beym Feldmessen. (Wien 1766)

XVIII.

XVIII. Kapitel.

Von den brauchbarsten Methoden Figuren jeder Gattung auf dem Felde zu Papiere zu bringen, oder in Grund zu legen.

§. 114. Die gegenwärtigen Aufgaben, mit ihren Zusätzen, betreffen diejenigen Methoden, Figuren einander ähnlich zu machen, welche auf dem Felde vorzüglich gebraucht werden können, und in denen sich Anfänger vorher zulänglich üben müssen, ehe sie sich wagen dürfen, ganze Fluren zu entwerfen. Die Anwendung davon auf die Vermessung ganzer Landschaften, werde ich aber in der Folge mit mehrerem zeigen, weil ich dabey noch vieles anzumerken habe, das den Vortrag des gegenwärtigen Kapitels, wo ich bloß die Gründe zur Vermessung ganzer Landschaften vortrage, zu sehr unterbrechen würde.

Aufgabe.

§. 115. Eine Figur auf dem Felde, die in einer Horizontalebene liegt, und deren Seitenlinien gerade sind, vermittelst der Meßkette zu entwerfen;

Aufl. Es seyen Fig. LXVII A, B, C, D, E eine gewisse Anzahl von Gegenständen oder Punkten auf dem Felde, man soll auf dem Papiere, Punkte verzeichnen, die gegeneinander eben die Lage haben, wie die auf dem Felde.

II. Es erhellet, daß dieses geschehen würde, wenn man sich durch die Punkte A, B, C, D, E auf dem Felde gerade Linien dergestalt gezogen vorstellet, daß dadurch eine gewisse Figur ABCDE entstehet, und dann auf dem Papiere eine kleinere Figur abcde entwirft die der ABCDE ähnlich ist. Dann werden nemlich die Winkelpunkte a, b, c, d, e auf dem Papiere eben die Lage gegen einander haben, welche A, B, C, D, E auf dem Felde gegen einander haben.

III. Um nun diese Figur abcde auf dem Papiere verzeichnen zu können. so müssen an der Figur auf dem Felde so viel Dinge gemessen werden, als nöthig sind, diese Figur zu bestimmen.

IV. Da wir nun bloß mit der Meßkette dieses leisten wollen, so erhellet aus der bekanten Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, daß es nicht zureichend sey, bloß die Linien AB, BC, CD, ED, AE, am Umkreise der Figur zu messen, sondern daß man noch andere Stücke messen müsse, wodurch die Lage dieser Linien AB, BC, u. s. w. gegen einander bestimmt wird.

V. Hierzu nimt man nun sehr bequem, die Diagonallinien dieser Figur z. E. BE, BD; welche die ganze eingebildete Figur in zusammenhängende Dreyecke ABE, EBD, BDC zerlegen. Man pflegt diese Diagonallinien aus einem solchen Punkte der Figur ausgehen zu lassen, den man in jedem Falle am bequemsten findet, und wodurch die wenigsten stumpfwinklichten Dreyecke entstehen, welches man gar leicht nach dem Augenmaaße beurtheilen wird.

VI. Nun ist klar, daß, wenn man auf dem Papiere 1) kleinere Dreyecke abe, ebd, bcd, verzeichnet, die denen größern ABE, EBD, BCD ähnlich sind 2) dieselben in eben der Ordnung mit einander verbindet, wie sie auf dem Felde mit einander verbunden sind, man alsdann eine kleinere Figur abcde erhalten werde, die der grossen ABCDE ähnlich ist.

VII. Man messe nun mit der Meßkette, nach der Ordnung erstlich alle 5 Seiten der Figur ABCDE; und wenn bey diesen Messungen Hindernisse vorkommen solten, daß sich eine oder die andere Seite nicht durch würkliche Anlegung der Meßkette messen lässet, so bediene man sich der Hülfsmittel, die wir im XV Kapitel §. 178 bis 181 beschrieben haben.

VIII. Demnächst messe man alle Diagonallinien, welche aus einem angenommenen Punkte B, nach allen Eckpunkten der Figur hingehen können. Bey einem Fünfecke, wie hier angenommen worden, giebt es nur zwo Diagonalen, BE, BD, bey einem Sechsecke drey, bey einem Siebenecke vier u. s. w.

IX. So werden diese Bestimmungen (VII VIII) zureichen, die Figur ABCDE zu entwerfen.

Damit aber zu Hause beym Auftragen keine Verwirrung entstehe, so muß man entweder sich auf dem Felde ein Brouillon, d h. einen Entwurf aus freyer Hand von der Figur ABCDE, auf einem Blatt Papier gemacht haben, wo man demnächst an die entsprechenden Seiten und Diagonalen, die gefundenen Maaße schreibt, oder man muß, welches noch besser ist, auf folgende Art zu Werke gehen.

Es müssen in die Winkelpunkte A, B, C, D, E, Zeichenstäbgen mit Nummern gesteckt werden, dergestalt, daß z. E. bey A wo man die Messung anfangen will, die 1ste Nummer, alsdann an den nächstfolgenden Punkt B, die 2te Nummer, an C die 3te u. s. w. zu stehen komme. Alsdann werden nach der Ordnung der Nummern, die Seiten AB, BC, u. s. w. gemessen,

messen, und die gefundenen Maaße auf folgende Art ins Diarium getragen.

Für die Seiten der Figur.	Ruth	Fusse.	Zolle
Die Weite von Nro. 1 bis N 2	28	7	3
von N 2 — N 3	35	8	2
" N 3 — N 4	34	5	6
" N 4 — N 5	32	0	8
" N 5 — N 1	36	9	4
Für die Diagonallinien			
Die Diagon. von N. 2 bis N 4	48	0	0
" N 2 — N 5	52	9	3

Wenn man solchergestalt die Messungen gehörig aufzeichnet, so kan demnächst zu Hause beym Auftragen nicht die geringste Schwürigkeit entstehen. Man kan auch, wenn es nöthig ist, andere Umstände z. E. die Nahmen der Objekte A, B, C u. s. w. in dem Diario anmerken, ob sie Gränzsteine, Bäume, Ecken von Gebäuden u. d. g. bedeuten.

X. Will man nun zu Hause die Figur zu Papiere bringen, so ist folgendes dabey zu bemerken.

Erstlich

Erstlich verzeichnet man sich, wenn man im Auftragen der Figuren aus dem Diario noch keine Fertigkeit hat, einen groben Entwurf, oder eine Figur auf ein Blatt Papier, von so viel Seiten, als die Figur auf dem Felde hat, und bemerket die Ecken derselben auf eben die Art wie auf dem Felde, mit den dabey geschriebenen Zifern 1, 2, 3 u. s. w. Diese grobe und aus freyer Hand entworfene Figur, dienet nur, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, und desto bequemer übersehen zu können, wie die Dreyecke gehörig auf einander folgen, und die Seiten derselben aufgetragen werden müssen.

Hierauf wird auf ein Reißbrett Papier gespannet, und auf demselben demnächst, die gerade Linie ab gezogen, worauf man von a bis b, aus dem Diario die Weite von N 1 bis N 2 träget, und bey den Punkten a, b, ebenfalls die Zahlen 1, 2 hinschreibet.

Nun nehme man aus dem Diario die Weiten von N 1 bis N 5, und die Diagonale von N 2 bis N 5, und beschreibe mit denselben, über der Seite ab, das Dreyeck abe, so daß ae der Weite von N 1 bis N 5, und be der erwähnten Diagonale gewäß wird; so ist das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich. Bey den Punkt e wird demnächst die Zahl 5 gesetzt.

Ueber der Diagonale be, wird nun das zweyte Dreyeck auf eben die vorhin gewiesene Art beschrieben, indem man aus b mit der Weite bd die der Diagonale von N 2 bis N 4, und aus e mit der Weite ed die der von N 5 bis N 4, gleich ist, ein paar sich in d durchschneidende Kreisbogen beschreibt.

So wird also über jeder neuen Diagonale, das nächstfolgende Dreyeck beschrieben, bis die ganze Figur abcde geschlossen ist, welche alsdann der auf dem Felde ähnlich seyn wird, weil die Dreyecke abe u. s. w. in eben der Ordnung, auf einander folgen, wie die Dreyecke ABE u. s. w. auf dem Felde, und jedes auf dem Papiere dem zugehörigen auf dem Felde ähnlich ist.

Daher ist also abcde ein Grundriß von ABCDE, und die Punkte a, b, c, d, e, liegen eben so gegen einander wie die Punkte A, B, C, D, E, auf dem Felde.

XI. Dieses Verfahren nennet man, die Messung einer Figur bloß mit der Meßkette, und ein kleines Nachdenken wird zeigen, daß zwar diese Messungsart eine große Genauigkeit verstattet, aber nur in solchen Fällen brauchbar sey, wo die zu entwerfende Figur, erstlich in einer Ebene liegt, und zweitens nicht von gar zu großen Umfange ist. — Denn im entgegengesetzten Falle erfordert die Messung der vie-

vielen Linien, einen sehr großen Zeitverlust, besonders, wenn sich viele Hindernisse, in Messung der Seiten und Diagonalen vorfinden solten. Man pflegt daher diese Messungsart, meistens nur bey Grundlegung nicht sehr großer Wiesenstücke, bey Vermessungen der Aeker u. s. w. zu gebrauchen. Uebrigens erhellet, daß diese Methode voraussetzet, daß man die Diagonalen ohne sonderliche Hindernisse messen, und übersehen könne. Es würde daher, wenn ABCDE, z. E. den Umkreiß eines Waldes vorstellte, diese Messungsart unnütz seyn, weil die Messung der Diagonalen ohne großen Nachtheil und Zeitverlust schwerlich vorgenommen werden könnte.

XII. Wenn eine Figur aus sehr vielen Seiten bestehet, so ist es gut, dieselbe in Vielecke von einer geringern Anzahl Seiten zu zerlegen, jedes nach dem gewiesenen Verfahren zu vermessen, und sie alsdann auf dem Papiere in eben der Ordnung an einander zu hängen. Man muß aber von den Seiten und Diagonalen eines jeden einzeln Vielecks ein besonders Diarium halten. Auch verstehet es sich von selbst, daß man, ehe die Messung angefangen wird, vorher die ganze Figur umgehe, sich einen deutlichen Begrif von ihr mache, und wenn man es nöthig befindet, die kleinern Stücke in die man die große Figur zerlegt, durch eingeschlagene Pfähle oder Fahnen u. s. w. bezeichne. Und überhaupt muß man aufs möglichste sich aller

Ordnung befleißigen, und alle Umstände in Erwägung ziehen, die entweder die Arbeit verzögern oder wohl gar unnütz machen könten. Auch ist es vortheilhaft, die gemessene Figur, so bald als möglich, zu Hause aufs Papier zu tragen, weil die Umstände der Vermessung dem Feldmesser noch deutlich vor Augen sind, und verschiedene Verwirrungen vermieden werden, die sonst gar zu leicht, aus weitläuftigen Diariis entstehen können.

Die Grösse des verjüngten Maaßstabes, den man zum Auftragen braucht, beurtheilt man nach der jedesmaligen Absicht, und der Grösse des zu verfertigenden Risses.

Anmerkung.

§ 216. Wir haben uns die Figur auf dem Felde durch Diagonalen in Dreyecke zerlegt vorgestellet; ein kleines Nachdenken wird zeigen, daß, wenn es bequemer ist die Figur auf eine andere Art, in zusammenhängende Dreyecke zu zerlegen, man solche dem Gebrauch der Diagonalen vorziehet. So z. E. könte man auch innerhalb der Figur einen willkürlichen Punkt annehmen, und sich von demselben nach allen Eckpunkten der Figur, gerade Linien gezogen vorstellen; dann würde die ganze Figur gleichfalls in zusammenhängende Dreyecke zerlegt, und wenn man alle

Seiten

Seiten am Umfange der Figur, wie auch alle Linien die von dem innerhalb der Figur angenommenen Punkte nach allen Ecken hinlaufen, mäße, so würde man daraus alle Dreyecke verzeichnen, und sie in eben der Ordnung gegen einander legen können, wie sie auf dem Felde auf einander folgen, man würde also dadurch gleichfalls den Grundriß der Figur auf dem Felde, erhalten.

Diese Methode ist oft noch nützlicher, als der Gebrauch der Diagonalen, ob man gleich einige Linien mehr messen muß. Denn die Diagonalen werden oft zu lang und unbequem zu messen.

Aufgabe.

§ 217. **Wenn man gleich keine Diagonalen, oder Linien wie in §. 216 messen kan, die Figur demohnerachtet bloß durch Hülfe der Maaßstäbe und der Meßkette zu Papiere zu bringen, vorausgesetzt daß die Figur in einer Ebene liege.** (Fig. XLVIII.)

Aufl. I. In diesem Falle muß man die Winkel am Umkreise der Figur messen; dieses nun bloß mit der Meßkette zu bewerkstelligen, so bedienen sich einige Schriftsteller der (§. 138 II) beschriebenen Methode, Winkel zu messen; da ich das wesentliche davon a. a. O. bereits erklärt habe, so brauche ich nur ganz kurz noch folgende Errinnerungen beyzufügen.

II. Erstlich muß man ein Diarium halten, worin man die für jeden Winkel A, B, C, D, E, der zu entwerfenden Figur, nöthigen Bestimmungen gehörig aufzeichnet.

Diese Bestimmungen bestehen, wie aus a. a. O. erhellet, in kleinen gleichschenklichten Dreyecken wie z. E. Abc, wo man in den Richtungen AB, AE, von A nach b, und von A nach e gleiche Längen nimmt, und demnächst die Chorde be misset; ein gleiches geschiehet an jedem Winkel des Umkreises, wie die Figur ausweiset.

Es müssen aber diese Linien Ab = Ae, Eβ = Eε u. s. w. wenigstens einige Ruthen lang gemacht werden.

In dem Diario muß man nun nicht allein, die Länge der beyden gleichen Schenkel Ab, Ae, u. s. w. an jedem Winkel anmerken, sondern auch die gefundene Länge der Chorden be, βε u. s. w. Gehet es aber an, an jedem Winkel durchgehends gleiche Schenkel Ab = Ae = Eβ = Eε u. s. w. zu nehmen, so braucht man nur bey jedem Winkel die Chorden be, βε, anzumerken; nur muß man nicht vergessen, die ein für allemal gebrauchte Länge der Schenkel Ab, Eβ u. s. w. irgendwo auch in dem Diario aufzuzeichnen.

III. Wenn man die Chorden nicht innerhalb der Figur, wie bey A, E, messen kan, so muß man sie ausserhalb der Figur bestimmen, wie solches z. B.

bey

bey dem Winkel D gewiesen worden, wo man in den Verlängerungen, von CD, ED, gleiche Längen Dn, Dm nimmt, und die Chorde nun misset.

IV. Zugleich muß man in dem Diario anmerken, ob die Winkel A, B, C, D, E, auswärts oder einwärts gehende Winkel sind, wozu man willkürliche Zeichen z. E. die Buchstaben A, E, wählen kan. So müste man z E. bey dem Winkel C anmerken, daß es ein auswärts gehender ist.

V. Nun müssen auch alle Seiten AB, BC u. s. w. am Umkrise der Figur gemessen, und wie gehörig ins Diarium getragen werden.

VI. Wenn man alle Seiten der Figur misset, so lehret die Geometrie, daß man nicht nöthig habe, auch alle Winkel am Umkreise zu bestimmen, sondern 3 Winkel weniger als die Figur Seiten hat; nur müssen die Winkel in einer Ordnung auf einander folgen. So würde man z. E. in dem Fünfecke ABCDE, nur nöthig haben, alle Seiten, und die zween Winkel E, D zu messen, und die Figur würde dadurch doch vollkommen bestimmt seyn. Auf gleiche Weise, wenn man alle Winkel misset, so hat man nicht nöthig auch alle Seiten zu messen, sondern zwo weniger, als überhaupt am Umkreise vorkommen. So z. E. würde unser Fünfeck bestimmt seyn, wenn man nur die Winkel, A, B, D, C, B, und

die

die Seiten AE, ED, DC mäße; der Punkt B, folglich die Seiten AB, CB, bestimmen sich, vermittelst des Durchschnittes der verlängerten Schenkel Ab, Ci von selbst.

VII. Das Diarium würde nun z. E. auf folgende Art aussehen.

Für das Fünfeck ABCDE

a) Die Winkel desselben

	Schenkel	Chorden
	Ruth. F. Z	Ruth. F. Z.
der Winkel bey N 1.	2. 0. 0	2. 1. 3. E
N 2.	3. 0. 0	5. 3. 0. E
N 3.	2. 0. 0	1. 8. 2. E
N 4.	2. 0. 0	3. 5. 0. A

b) Für die Seiten desselben

	R. F. Z.
Weite von N 1-N 2.	12. 0. 0
N 2. N 3.	7. 2. 4
N 3. N 4.	7. 7. 4

VIII. Wenn nun nach diesen Datis die Figur zu Papiere gebracht werden soll, so verfährt man so.

Die Figur AEDCB bedeute nicht mehr die Figur auf dem Felde sondern deren Grundriß

auf

auf dem Papiere. Um diese Figur nach den Angaben des Diarii gehörig zu verzeichnen, so ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie AE, und trage auf dieselbe, die Weite von Nro. 1 bis N 2, mache also nach dem Diario AE = 12 Ruth.

Von A nach e trage man den zum Winkel bey N 1 gehörigen Schenkel, nehme also Ae = 2 Ruthen, und beschreibe damit einen Kreisbogen ebq, trage in denselben von e nach b die dem Winkel bey N 1 zugehörige Chorde; also eb = 2 R. 1 F. 3 Z. ziehe durch A, b, eine gerade Linie so hat man auf dem Papiere den Winkel welchen man bey N 1 auf dem Felde hatte.

Auf gleiche Weise setzet man an E, den bey N 2 gefundenen Winkel, verlängere Es, und nehme ED der Weite von N 2 bis N 3 gleich, so hat man den Punkt D;

Auf diese Art verfähret man immer fort, so werden endlich die beyden Linien AB, CB, sich bey s durchschneiden und solchergestalt die ganze Figur schliessen.

IX. Dieses Verfahren, eine Figur auf dem Felde gleichfalls bloß durch Ketten und Stäbe zu vermessen, ist freylich allgemeiner als das vorhergehende §. 215 aber bey weiten nicht so richtig, weil die Bestimmung der Winkel durch ihre Chorden, oft zu ziemlich beträchtlichen

Feh-

Fehlern Gelegenheit geben kan, besonders wenn gar zu spitze oder stumpfe Winkel vorkommen, und bey der Verzeichnung auf dem Papiere hat man Ursache, die Linien und Punkte so zart als möglich zu machen.

Indessen kan man sich doch in manchen Fällen dieser Methode mit Vortheil bedienen, und empfiehlt sich, wegen der geringen Kosten, indem man keine kostbaren Werkzeuge dazu braucht.

Noch eine nöthige Erinnerung wegen Verzeichnung der Winkel.

Um die Winkel A, E u. s. w. recht genau zu erhalten so darf man sich dazu nicht des verjüngten Maaßstabes bedienen, womit man die Seiten AE, ED u. s. w. abträgt. — Denn dieser Maaßstab wird gewöhnlich zu klein seyn; man muß daher für die Schenkel und Chorden der Winkel einen eigenen etwas großen Maaßstab verfertigen, damit die Chorden, so genau als sie das Diarium angiebt, abgetragen werden können. Ist aber der Maaßstab für die Seiten der Figur groß genug, daß man auch Zolle darauf hat, so mag man sich auch desselben zur Verzeichnung der Winkel bedienen.

Aufgabe.

§. 218. **Eine krumlinigte Figus αβγδε Fig. LXIX. bloß durch Hülfe der Meßkette und Maaßstabe zu vermessen, und zu Papiere zu bringen.**

Aufl. Man umschließe die krumlinigte Figur mit einer geradelinigten ABCD, indem man bey A, B, C, D Stäbe oder Nummern absteckt, und bestimme nach den beyden vorhergehenden Aufgaben an der geradelinigten Figur so viel Stücke, als nöthig sind, sie aufs Papier tragen zu können. Es müssen aber alle Seiten AB, BC, CD, DA, mit unter dieser Bestimmung seyn.

Während daß man nun die Seiten AB, BC, CD, DA misset, so messe man auch mit dem Maaßstabe, für die merklichsten Buchten und Wendungen, die Abscissen Aa, Ab u. s. w. und die zugehörigen Ordinaten aα, bβ, u. s. w. wie durch die punctirten Linien ringsherum angedeutet worden. Alle hieher gehörigen Vorschriften sind bereits im IV. Kap. §. 54 u. f. beygebracht. Ich habe also weiter nichts mehr zu errinnern, als daß man, nachdem nach Angabe des Diarii, die Figur ABCD, auf dem Papiere verzeichnet worden, auf die Seiten AB, BC u. s. w. die Abscissen trägt, und durch ihre Endpunkte die Maaßen der Ordinaten setzet, hierauf durch

die

die Endpuncte der Ordinaten rings herum eine krumme Linie $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ziehet. Diese wird alsdann eine begränzte krumlinigte Figur bilden, welche der auf dem Felde desto ähnlicher seyn wird, je mehr Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt worden.

Bey diesem Verfahren ist übrigens noch zu bemerken daß man gerne die geradelinigte Figur ABCD, so nahe neben der krumlinigten hernimmt, als es angehet, damit die Ordinaten nicht zu groß werden. Solte aber dadurch die geradlinigte Figur zu viel Seiten bekommen, so muß man, um die daher entstehende Unbequemlichkeit zu vermeiden, freylich der Figur weniger Seiten geben, aber alsdann auch die daher rührenden grössern Ordinaten mit desto mehrerer Sorgfalt bestimmen und messen.

Wie man sich eben dieser Methode mit Vortheil bedienen könne, geradelinigte Figuren von sehr vielen Seiten, zu entwerfen.

§. 219. Wenn wir uns der im 217 u. 218 §. gewiesenen Methode bey sehr vielseitigen Polygonen bedienenwollen, so werden wir auch eine sehr große Anzahl von Dreyecken erhalten, in die wir die Figur zerlegen; man kan aber oft weit kürzer zum Endzweck gelangen, wenn man eine

Figur

Figur von sehr vielen, besonders kleinen Seiten, in eine andere von weniger Seiten einschließet, wie z. E. Fig. LXX ausweiset, wo wir die Figur abcdefgh, mit der viereckigten ABCD umschlossen haben. Wenn man nun bloß diese viereckigte Figur zu Papiere bringet, und dann die auf dem Felde gemessenen Abscissen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $B\varepsilon$ u. s. w. nebst die denen Winkelpunkten a, b, c u. s. w. zugehörigen Ordinaten αa, βb, γc, εd u. s. w. gehörig absetzet, so wird man auf dem Papiere gleichfalls die Lage der Winkelpunkte a, b, c, d, e gegen die Seitenlinien des Vierecks bestimmen, und folglich die vielseitige Figur auf dem Papiere entwerfen; und so ist begreiflich daß man eine große Anzahl von Dreyecken ersparet, in die man sonst die vielseitige Figur zerlegen müste. Zur Bestimmung des Vierecks ABCD, haben wir hingegen nur zwey Dreyecke nöthig und die Messung der Abscissen und Ordinaten, erhält man zugleich, während man die vier Seiten AB, BC, CD, AD misset.

Es ist nicht nöthig daß die Viereckigte Figur ausserhalb der abcdefgh fällt; man kan, wenn man es bequemer findet, dieselbe auch innerhalb des vielseitigens Polygons annehmen, wie es z. B. die LXXI Figur ausweiset.

Aufgabe.

§. 220. **Vermittelst des Meßtisches eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn man**

von einem Punkte innerhalb der Figur nach allen Ecken derselben hinmessen kan.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII; ABCDE die zu entwerfende Figur, und o der innerhalb ABCDE willkürlich angenommene Standpunkt.

II. Man messe, von o nach allen Ecken der Figur, in die man Stäbe mit Nummern gesetzet hat, die Entfernungen oA, oB, oC, oD, oE.

III. Man bringe hierauf den Meßtisch, über den Standpunkt o, stelle ihn horizontal und nehme auf ihm einen Punkt an, der lothrecht über o liegt; lege nun an diesen Punkt die dioptrische Regel, visire nach allen Ecken A, B, C, D, E, und ziehe die dahin laufenden Richtungslinien oα, oβ, oγ, oδ, oε auf dem Meßtische; vergesse übrigens auch nicht, durch Zahlen die man an die Linien oα, oβ u. s. w. schreibt, zu bemerken, nach welcher Ecke oder Nummer jede der Linien oα, oβ u. s. w. hinläuft.

IV. Auf die Linie oα, trage man aus o nach a, die für oA gefundene Länge; und aus o nach b, c, d, e, eben so, die für oB, oC, oD, oE, gefundenen Maaße nach dem verjüngten Maaßstabe, ziehe demnächst a, b, c, d, e, durch gerade Linien zusammen, so wird die kleine Figur auf dem Meßtische, nemlich die abcde, der großen ABCDE auf dem Felde ähnlich

lich seyn, mithin ihren Grundris vorstellen, vorvorausgesetzt daß man oA, oB, u. s. w. horizontal gemessen hat.

IV. Die Ursache ist, weil die Dreyecke aob, boc u. s. w. denen auf dem Felde AoB, BoC u. s. w. nach der Ordnung ähnlich sind, indem z. E. in dem Dreyecke aob der Winkel aob = AoB, und die Seiten ao, ob, denen oA, oB gemäß sind, folglich ao : ob = Ao : oB ist u. s. w. demnach muß die ganze Figur abcde der ABCDE ähnlich seyn.

Anmerkung

§. 221. Diese Aufgabe kan ebenfalls nur bey Messungen, die nicht sehr ins Große gehen, gebraucht werden, und ist daher bey Vermessung der Wiesen und Aecker mit Nutzen zu gebrauchen. Indessen bleibt sie doch noch immer etwas beschwerlich, weil man viele Linien dabey unmittelbar messen muß. Auch ist sie nur in den Fällen brauchbar, wo der Umfang der Figur aus lauter geraden Linien bestehet.

Aufgabe.

§. 222. **Vermittelst des Meßtisches eine Figur ABCDE Fig. LXXIII. Tab. V. die man ganz umgehen kan, zu Papiere zu bringen.**

Aufl. I. Nachdem man die Punkte A, B, C, D, E, gehörig durch Stäbe und Nummern bezeichnet hat, so bringe man über A den Meßtisch, stelle ihn horizontal, und bestimme auf ihm einen Punkt a der lothrecht über A liegt.

II. Man lege an a die dioptrische Regel, visire nach B und E, und ziehe auf dem Meßtische nach B, E, die unbestimmten Richtungslinien aβ, aε, so erhält man auf dem Papiere einen Winkel εaβ, dessen Schenkel horizontal sind, und der dem Winkel BAE in der Figur gleich ist.

Oder εaβ ist der Neigungswinkel zwoer Verticalebenen die man sich über AB, AE aufgerichtet vorstellet.

III. Man messe nun mit der Meßkette die Weite AB und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe, von a nach b, auf die Richtungslinie aβ, welche auf dem Meßtische nach B hingezogen worden. Es versteht sich daß man eigentlich den Horizontalabstand AB messen muß, welches bey jeder folgenden Messung zu beobachten ist.

IV. Man nehme den Meßtisch von A weg und setze ihn über B dergestalt, daß er über B 1) horizontal stehe 2) daß der Punkt b, den man bey der erstern Station A erhalten hatte

(III)

(III) lothrecht über B zu liegen komme 3) daß die Linie ba längst BA eingerichtet sey. Letzteres erhält man dadurch, daß man die Regel an ba legt, und den Meßtisch so lange horizontal herumwendet, bis man durch die Dioptern, die bey A zurückgelassene Fahne oder Stange von dem Faden des Objectivdiopters bedeckt siehet.

V. In der Stellung (IV) bleibe nun der Meßtisch unverrückt, man lege die Regel an b, visire nach dem bey der dritten Station C aufgerichtetem Signale, und ziehe auf dem Meßtische nach C die Richtungslinie bγ, auf die man demnächst nach vollbrachter Messung der Weite BC eine Länge bc nach dem verjüngten Maaßstabe trägt, welche der BC gemäß ist.

VI. Hierauf bringt man den Meßtisch über die dritte Station C stellet ihn wieder horizontal, bringt den Punkt c (V) lothrecht über C, und richtet die Linie cb wieder längst CB ein, wie in (IV) legt demnächst an c die Regel, visiret nach D, und trägt die gemessene Weite CD, auf die entsprechende Richtungslinie von c nach d.

VII. Endlich wird der Meßtisch über D gebracht, und wieder nach der vorhergehenden Vorschrift so gestellet, daß d (VI) über D, und dc längst DC zu liegen komme. Man legt hierauf die Regel an d, und visiret nach dem 5ten Stationspunkt E, so wird die Richtungslinie de,

die az, welche bereits bey der erstern Station A auf dem Meßtische nach E hingezogen worden (11), in e durchschneiden und so die ganze Figur abcde auf dem Meßtische schließen, welche dann den Grundriß der Figur ABCDE vorstellen wird.

Bew. Wenn man sich über AB, BC, CD u. s. w. Verticalebenen aufgerichtet vorstellet, so sind die Winkel die man auf dem Meßtische an jeder Station erhält, nemlich abc, bcd, cde u. s. w. die Neigungswinkel dieser Verticalebenen gegen einander, oder die Winkel, welche man an dem Umkreise der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE erhielte (§§ 4. 5. 6.) Es sind also die Winkel a, b, c, d nach der Ordnung denen auf den Horizont projicirten Winkeln A, B, C, D gleich.

Da ich ferner zum voraussetze, daß man die Entfernungen AB, BC nach der Horizontallinie gemessen habe, so drücken die auf den Meßtisch nach dem verjüngten Maaßstabe aufgetragenen Weiten ab, bc u. s. w. die verjüngten Seitenlinien der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE aus.

In der Figur abcde folgen also die Winkel und Seiten in eben der Ordnung, Gleichheit und Verhältniß auf einander, wie in der projicirten Figur ABCDE, d. h. abcde muß der

Pro-

Projection von ABCDE auf die Horizontalfläche, ähnlich seyn, mithin den Grundriß von ABCDE vorstellen.

Ob zwar gleich die beyden letzten Linien de, ae, nicht durch unmittelbare Messung gefunden, und aufgetragen worden, sondern sich bloß durch den Durchschnitt e ergeben haben, so müssen sie doch denen Horizontalweiten DE, AE, ähnlich seyn, weil A, B, C, D, und Seiten AB, BC, CD, zur Bestimmung der Figur ABCDE, als eines Fünfecks, hinreichend sind.

Eben das Verfahren, das ich bisher bey einem Fünfecke gewiesen habe, läst sich nun, wie leicht erhellet, auf jedes Polygon anwenden, und man kan also von jeder Figur die man umgehen kan, den Grundriß auf dem Meßtische bestimmen.

Proben ob man richtig gemessen hat.

§. 223. Man darf wohl selten erwarten, daß die auf dem Meßtische, erhaltene Figur abcde, dem Grundrisse von ABCDE vollkommen ähnlich seyn werde. Denn die kleinen Fehler, die sowohl in Bestimmung der Winkel, als auch im Messen und Auftragen der Seiten begangen werden, und bey aller angewandten Vorsicht des Feldmessers unvermeidlich sind, werden verursachen, daß die Figur abcde, der Projection

von ABCDE, nie vollkommen in allen Stücken ähnlich seyn wird. Man kan nun wohl fragen, ob sich nicht einige Mittel angeben lassen, die Figur auf dem Meßtische zu prüfen, ob sie viel oder wenig von der Figur ABCDE abweichet. Die Gründe zu diesen Prüfungen, sind nun kürzlich in folgenden enthalten.

I. Es bedeute künftig ABCDE die auf den Horizont proiicirte Figur selbst, davon also abcde den Entwurf auf dem Papiere vorstellet, so erhellet folgendes.

Wenn das im 222 §. gewiesene Verfahren vollkommen ohne Fehler behandelt wird, so müssen die in den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische gezogenen Linien an jeder folgenden Station, mit den zugehörigen Linien in der Figur auf dem Felde, parallel werden, so bald in jeder folgenden Station der Meßtisch gehörig eingerichtet worden. Z. B. wenn bey der Station des Meßtisches über C, die Linie cb längst CB eingerichtet worden, folglich cb mit CB in einer geraden Linie liegt, so werden die Linien ba, ae, die man bereits bey den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische erhalten hatte, den entsprechenden Linien BA, AE parallel seyn, weil die Winkel cba = CBA, und bae = BAE sind. Auf eben die Art sind z. E. bey der 4ten Station des Meßtisches über D, die Linien cb, ba, ae auf dem Meßtische, denen entsprechenden Linien

nien CB, BA, AE parallel. Dieser Satz ist aus der Lehre von Parallellinien und dem bisher beschriebenen Verfahren so klar, daß es nicht nöthig ist ihn weiter zu beweisen; eine wichtige Folge ist aber diese.

Weil z. E. bey der Station über D, die Linie cb, der Linie CB, parallel ist, (vorausgesetzt daß dc längst DC fällt) und ferner dc : cb = DC : CB, so müssen die Punkte d, b, B in gerader Linie liegen. Weil also dieses ist, und ferner ba mit BA parallel, wie auch db : dB = ba : BA seyn muß, so werden auch die Punkte d, a, A in gerader Linie liegen.

Wenn also bey der Vermessung keine Fehler vorgefallen sind, so müssen bey einer gewissen Station des Meßtisches, wie z. E. über D, alle Diagonallinien, db, da, welche aus dem lothrecht über D liegenden Punkte d ausgehen, mit den entsprechenden Diagonallinien DB, DA in gerader Linie, oder in einer Verticalebene liegen, und wenn man an die Diagonallinien db, da, der Figur auf dem Meßtische, das Dioptrlinial legt, so müssen die Dioptern, nach den bey B, A, aufgerichteten Signalen hinzielen.

Hieraus läst sich also auf eine sehr leichte Art prüfen, ob die Figur abcde auf dem Meßtische ihre gehörige Richtigkeit habe. Man lege, nachdem an einer gewissen Station der Meßtisch gehörig ein-

gerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonallinien db, da, und untersuche ob alsdann der Faden des Objectivdiopters genau die bey B, A, aufgerichteten Stäbe decket. Geschiehet dieses, so ist die Figur abcde, der ABCDE vollkommen ähnlich; je mehr aber die an db, da gelegten Dioptern an den Signalen B, A, vorbeystreichen, desto grösser ist die Unrichtigkeit des Grundrisses, desto mehrere und grössere Fehler sind also während der Arbeit begangen worden.

Man kan nun diese Probe des Zurückvisirens nach den bereits erhaltenen Objecten, an jedem Standpunkte des Meßtisches bewerkstelligen, und während der Arbeit selbst, sich von der Richtigkeit der bereits auf dem Meßtische erhaltenen Punkte versichern. Z. E. bey dem Standpuncte des Meßtisches über C, lege man, nachdem der Meßtisch gehörig eingerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonale ca; siehet man alsdann in dem Faden des Objectivdiopters, das bey A aufgerichtete Signal, so ist während der Messung von A bis C kein merklicher Fehler vorgefallen.

II. Diese Art an jedem Standpunkte den Grundriß zu prüfen ist in der That eine von den besten Methoden, sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern. Oft verstatten es aber die Umstände nicht, an jedem Standpunkte nach den Diagonallinien der Figur zurückzuvisiren. Wie

wenn

wenn z. E. ABCDE den Umriß eines Waldes vorstellte; da würde man vergebens diese Prüfungsart vornehmen, weil sich wegen der Gebüsche das Zurückvisiren nicht anstellen läst.

In solchen Falle läst sich also selten, während der Arbeit selbst, die Prüfung der auf dem Meßtische bereits erhaltenen Punkte bewerkstelligen, sondern man muß warten, bis man mit dem Meßtische an den letzten Stationspunkt E hinkömt, wo sich alsdann zeigen wird, ob sich die Figur auf dem Meßtische in dem gehörigen Punkt schlieset oder nicht.

Man begnüge sich nemlich an dem vorletzten Stationspunkt D nicht damit, daß sich durch den Durchschnitt e die Figur auf dem Meßtische schlieset; sondern nachdem man bey D den Meßtisch gehörig eingerichtet und nach E visirt hat, so messe man auch die Weite DE, und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie von d nach i; hier wird sich nun schon zeigen, ob die durch den Durchschnitt e gefundene Weite de, mit der wahren DE übereinstimt oder nicht.

Da nemlich, wenn während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, die durch den Durchschnitt e gefundenen Entfernungen de, ae, denen auf dem Felde DE, AE, gemäß seyn müssen, so ist klar daß wenn man z. E. zur Probe die Linie DE gemessen, und sie von d nach i getragen hat,

di = de seyn, folglich e auf i fallen müsse; geschiehet nun dieses nicht, so ist zuverläßig während der Arbeit, ein Fehler vorgefallen, und dieser Fehler wird desto beträchtlicher seyn, je mehr die Punkte e und i von einander abstehen.

III. Nachdem man die Weite DE gemessen, und von d nach i getragen hat, so bringe man den Meßtisch über die letzte Station E, so daß i lothrecht über E liege, und id längst ED eingerichtet werde, lege hierauf an i die dioptrische Regel, und visire nach A; wenn nun während der Vermessung keine grossen Fehler vorgefallen sind, so muß das nach A gerichtete Diopterlinial, auf dem Grundrisse durch den Punkt a gehen, d. h. die Figur auf dem Meßtische muß sich in dem wahren Punkte a schließen. Geschiehet dieses aber nicht, sondern die dioptrische Regel, streichet bey der Richtung der Dioptern nach A, an a vorbey, wie z. E. iα, so ist die Abweichung des Grundrisses abcde, von der wahren Figur ABCDE, desto grösser, je grösser der Abweichungswinkel αia ist.

Wenn das nach A gerichtete Diopterlinial würklich durch a gehet, also die Figur sich in dem wahren Punkte a schließet, so sind entweder während der Vermessung keine Fehler vorgefallen, oder die an jedem Stationspunkte begangenen Fehler haben sich während der Arbeit wieder aufgehoben. Da

aber

aber letzteres sehr selten geschiehet, so kan man immer behaupten, daß wenn sich die Figur in dem wahren Punkte a schließet, die Figur abcdi der ABCDE vollkommen ähnlich seyn, oder wenigstens so wenig von ihr abweichen werde, daß man den Fehler ausser Acht lassen kan.

IV. Diese beyden Methoden (II. III) werden also in jedem Falle wenigstens ein Merkmahl abgeben, ob die Figur auf dem Meßtische von der auf dem Felde, viel oder wenig abweichet: und so geben diese Methoden eine Prüfung ab, ob man irgendwo beträchtlich gefehlet habe oder nicht; allein wenn man solchergestalt am Schluße der Figur einen Fehler findet, wie kan man wissen an welcher Station derselbe begangen worden? wie kan man die nöthige Korrection der Figur bewerkstelligen? diese Untersuchung ist in der That oft ziemlich schwer, wo nicht völlig unmöglich, besonders wenn man an mehreren Standpunkten gefehlet hat. Ich weiß wohl daß von verschiedenen Feldmessern Regeln angegeben worden sind, eine fehlerhafte Figur zu corrigiren, allein diese Vorschriften sind auf keine gewissen Gründe gestützet, und bestehen meistens nur in einem Zusammenzerren der Figur. Am richtigsten würden noch diejenigen Methoden seyn, nach denen man den am Schluße der Figur erhaltenen Winkel α i a, in die übrigen Winkel b, c, d u. s. w. gehörig vertheilte. In sehr

vielen

vielen Fällen, wird aber der Winkel $\alpha i a$ so unbeträchtlich seyn, daß man ihn ohne Fehler außer acht lassen, und die Figur abcdi der ABCDE ähnlich setzen kan.

Ist aber der Winkel $\alpha i a$ sehr beträchtlich, so ist zu vermuthen, daß irgendwo in einer Station aus Unvorsichtigkeit ein grober Fehler begangen seyn muß. Denn die unvermeidlichen, kleinen Fehler, die gewis in jeder Station begangen werden, werden sich selten so häufen daß $\alpha i a$ von ansehnlicher Grösse seyn solte.

Da es aber eine unverzeihliche Nachläßigkeit des Feldmessers seyn würde, an mehr als einer Station einen groben Fehler zu begehen, besonders wenn die Figur nicht sehr viele Winkel an ihrem Umkreise hat, da es ferner nicht wahrscheinlich ist, daß die in Messung der Linien vorgefallenen kleinen Unrichtigkeiten am Schluß der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel $\alpha i a$ hervorbringen solten, da überdem in Messung der Linien nie so leicht gefehlet werden kan, als in Zeichnung der Winkel auf dem Meßtische, so können wir immer annehmen, daß wenn man am Schluße der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel findet, solcher meistens daher rühre, weil in irgend einer Station wegen einer etwa vorgefallenen Verrückung des Meßtisches, ein Fehler in Bestimmung des Winkels auf dem

Meß-

Meßtische begangen worden ist. Und wir werden nun zeigen

Wie man, unter der Voraussetzung daß nur an einer Station ein grober Fehler begangen worden ist, die Station im Risse aufsuchen könne, wo diese Unvorsichtigkeit vorgefallen ist.

§. 224. Es stelle Fig. LXXIV. ABCDEF den Umkreiß der in Grund zu legenden Figur vor; man habe die Messung bey A angefangen, und sie nach der Richtung ABCDEF vorgenommen.

So, würde man bey der letzten Station F, nach gehöriger Stellung des Meßtisches auf demselben die Figur abcdef erhalten, und wenn während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, so muß die Figur abcdef der ABCDEF vollkommen ähnlich seyn, und wenn f lothrecht über F liegt, wie auch fe gehörig längst FE eingerichtet ist, so werden die Linien ab, bc, cd u. s. w. denen AB, BC, CD u. s. w. parallel seyn (§. 223. I. II) und die Dioptern des an fa gelegten Diopterlinials müssen wieder genau auf den ersten Standpunkt A eintreffen, mit einem Worte, die Figur abcdefa muß sich auf dem Meßtische vollkommen schliessen.

II. Hätte man aber z. E. bey der Station D aus Unvorsichtigkeit, einen groben Fehler begangen, daß man statt des wahren Winkels CDE = cde, den fehlerhaften γde, welcher um γdc gröſſer als der wahre ist, bekommen hätte, so würde man, (weil ich) voraussetze daß blos in dem Winkel d gefehlet worden ist) auf dem Meßtische, nach gehöriger Einrichtung desselben an der letzten Station F, nicht die wahre Figur abcdef, sondern die fehlerhafte αβγdef erhalten, und weil bloß in dem Winkel d gefehlet worden, alles übrige aber richtig ist, so wären nach dieser Voraussetzung, αβ = ab, βγ = bc, γd = cd, αβγ = abc, βγd = bcd, u. s. w. nemlich in der falschen Figur αβγdef alle Seiten und Winkel so groß, wie in der wahren abcdef, den einzigen Winkel γde ausgenommen.

III. Es würde also über der letzten Station F, wegen des bey d begangenen Fehlers, sich die Figur auf dem Meßtische nicht schliessen; denn da man statt des wahren Punktes a den fehlerhaften α erhielte, so würden, die Dioptern des an f und α gelegten Linials, nicht auf den Punkt A wieder eintreffen, sondern die gerade Linie fα, würde in der Linie AB auf einen Punkt A' ziehlen, der um den Abstand A'A von A wegläge, und der Winkel αfA, würde den Abweichungswinkel am Schlusse der Figur vorstellen.

IV. Man siehet ferner, daß die Linie fα auf der fehlerhaften Figur, nicht der wahren Entfernung FA gemäß seyn würde, und wenn man FA würklich mäße, und sie nach dem verjüngten Maaßstabe von f nach a, auf die nach A hingezogene Richtungslinie trüge, so würde auf dem Meßtische, a der wahre Schlußpunkt, α aber der fehlerhafte seyn; die Figur $\alpha\beta\gamma$deta schlösse sich also nicht; sondern stände innerhalb des Raumes aα offen.

Es frägt sich nun, den Standort d zu finden, wo der Fehler begangen worden ist.

Um dieses zu leisten, so wollen wir die fehlerhafte Figur mit der wahren vergleichen.

V. Man stelle sich vor, von dem Punkt d, wo der Fehler vorgefallen, würden ein paar gerade Linien dα, da nach dem falschen und wahren Schlußpunkt gezogen, so erhellet folgendes.

Weil in beyden Figuren $\alpha\beta\gamma$dα, abcda, $\alpha\beta$ = ab, $\beta\gamma$ = bc, γd = cd, und die Winkel $\alpha\beta\gamma$ = abc, $\beta\gamma$d = bcd, so muß die Figur $\alpha\beta\gamma$dα der abcda gleich und ähnlich seyn, und wenn man sich vorstellet, die Figur d$\gamma\beta\alpha$, werde auf die dcba so gelegt, daß d auf d, γ auf c, β auf b und α auf a fiele, so würde auch dα auf da, und γdα auf cda fallen, also dα = da, γdα = cda seyn, woraus

dann ferner folgt, daß der bey dem Standpunkte d begangene Fehler, nemlich der Winkel $\gamma dc = \alpha da$ sey.

VI. Man siehet also, daß der Standpunkt d, wo auf dem Felde der Fehler begangen worden, die Eigenschaft habe, daß er von dem wahren und falschen Schlußpunkte α, a, gleichen Abstand $d\alpha = da$ hat, und es läst sich leicht darthun, daß kein einziger Punkt wie z. E. β, γ, die erwähnte Eigenschaft habe, daß nemlich $\beta\alpha = \beta a$, $\gamma\alpha = \gamma a$ u. s. w. sey.

Dies giebt also folgendes Mittel in der Figur $\alpha\beta\gamma defa$ die sich auf dem Papiere nicht schliessen will, den fehlerhaften Standpunkt d, mithin auch den zugehörigen Punkt D auf dem Felde zu finden.

Man ziehe von den nach (IV) gefundenen wahren und falschen Schlußpunkten α, a, nach allen Ecken β, γ, d, e, gerade Linien oder Diagonalen; der Punkt d, wo die beyden Diagonalen αd, ad, einander gleich werden, wird die Station geben, wo man auf dem Felde gefehlet hat, und der Winkel αda dieser beyden Diagonalen, ist die Grösse des an der Station d begangenen Fehlers (V), weil $\alpha da = \gamma dc$.

Die fehlerhafte Figur zu korrigiren.

§. 225. Nachdem, nach dem vorhergehenden § die Station d, wo man auf dem Meßtische den fehlerhaften Winkel γde erhalten hat, gefunden worden ist, so beschreibe man über der nach dem wahrem Schlußpunkte a hinlaufenden Diagonale da, die Figur αβγd, dergestalt daß αβγd in die wahre Lage abcd zu liegen komme.

Dieses wird sich gar leicht vermittelst der Seiten und Diagonalen der Figur αβγd bewerkstelligen lassen; ist nun dieses geschehen, so ist abcdef der wahre Grundriß von ABCDEF.

Solchergestalt ist es also, unter der Voraussetzung, daß in den Winkeln am Umfange der in Grund zu legenden Figur nur ein einzigesmahl gefehlet worden, gar leicht, die fehlerhafte Figur zu corrigiren.

Uebrigens kan man, um mehrerer Sicherheit willen, sich mit dem Meßtische nach der zweifelhaften Station D hinbegeben, die Linie de längst DE einrichten, und dann untersuchen, ob dγ von der Richtung DC gerade so viel abweicht, als dγ von dc, oder dα von da; findet sich dieses würklich so, so ist gar kein Zweifel mehr übrig, daß D würklich die Station sey, an der gefehlet worden ist.

Wenn an mehreren Stellen der Figur grobe Fehler vorgefallen sind.

§. 226. In diesem Falle reichet die Gleichheit der beyden Diagonalen $d\alpha$, da, nicht zu, die fehlerhaften Stationen auszufinden; denn daß $da = d\alpha$ in jedem Falle den fehlerhaften Punkt d angiebt, gründet sich darauf, daß nur an einer Station gefehlet worden.

Indessen kan man sicher behaupten, daß, wenn man am Schluße der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel $\alpha f a$ findet, und man hierauf von α, a, nach allen Eckpunkten β, γ, d, e, u. s. w. Diagonalen ziehet, und dennoch nirgend ein paar Diagonalen wie αd, ad einander gleich findet, zuverläßig an mehr als einer Station gefehlet worden seyn müsse.

Eben dieses würde statt finden, wenn man gleiche Diagonalen an mehr als zwoen Stellen der Figur fände.

Wie man aber in solchen Falle die fehlerhaften Stationspunkte würklich ausfindig machen könne, dazu habe ich noch keine allgemeine und leichte Methode finden können. Denn die Gleichheit der Diagonalen, reicht in denen Fällen, wo an mehreren Stellen gefehlet worden, nicht zu, die fehlerhaften Stationen aufzusuchen, sondern es

müssen

müssen noch andere Hülfsmittel, und Umstände in Erwägung gezogen werden.

Es giebt zwar einzelne Fälle, wo es leicht ist, die Fehler an mehreren als einer Station aufzusuchen, da aber dergleichen Fälle in der Ausübung selten vorkommen, so werde ich hier nichts davon beybringen, und ich gedenke sowohl diese Fälle, als auch andere Eigenschaften, wodurch sich die fehlerhaften Stationen ausfinden lassen, einmahl bey einer andern Gelegenheit bekannt zu machen, da die darüber angestellten Untersuchungen für jetzt noch zu unvollkommen sind.

Einige Vorsichten und Erinnerungen die beym Verfahren des 222 §. beobachtet werden müssen.

§. 227. I. Es ist vortheilhaft daß man gleich anfangs, ehe man die Messung vornimmt, die Figur ABCDE umgehet, und ohngefähr nach dem Augenmaaße, oder wenn es angehen kan durch Schritte, die längste Diagonallinie bestimmt. Dies geschiehet deswegen, damit man auf dem Meßtische den verjüngten Maaßstab darnach proportioniren könne, damit derselbe unnöthiger Weise nicht zu klein, und wegen anderer Unbequemlichkeiten nicht zu groß angenommen werde. Auch wird man durch diese Vorbereitung, desto sicherer den ersten Punkt a, Fig. LXXIII. wo die

Messung auf dem Meßtische angefangen werden soll, wie auch die schicklichste Lage der ersten Linie ab bestimmen. Denn es ist klar, daß man a, und ab so auf dem Meßtische annehmen müsse, daß die ganze Figur abcde auf demselben erhalten werden kan.

II. Es geschiehet sehr oft, daß beym Fortgange der Arbeit, Theile der Figur auf dem Meßtische, sehr nahe an den Rand desselben kommen, und nur wenig Platz da ist, die dioptrische Regel gehörig anzulegen. In diesem Falle rathe ich beym Visiren, und genauem Anlegen des Diopterlinials alle mögliche Vorsicht zu beobachten weil an solchen Stellen der Figur gar leicht Fehler begangen werden. Auch ist es gut, auf dem Meßtische die Linien neben dem Liniale, so lang als möglich auszuziehen, oder wenigstens auf dem Rande des Meßtisches, die Verlängerung der gezogenen Linien, durch einen kleinen Strich zu bemerken, damit man beym Zurückvisiren alsdann sicherer die dioptrische Regel, wieder an die einzurichtende Linie anlegen könne. So z. E. würde ich bey der Station B, wo ich die Richtung bc zöge, nicht allein bey γ, sondern auch bey y an dem Rande des Meßtisches die Verlängerungen von bc andeuten; und wenn ich nachher an die folgende Station C käme, so würde ich bey Einrichtung der Linie cb längst CB, das Diopterlinial nicht bloß an die Punkte b, c,

legen

legen (denn da kan man gar zu leicht fehlen, besonders wenn b, c sehr nahe neben einander liegen) sondern es vielmehr an die Verlängerungen y, γ, anlegen, weil man offenbar, wegen der grössern Entfernung yγ, die wahre Richtung der Linie bc weit sicherer erhält, als wenn man das Linial bloß an die näher zusammenliegenden Punkte b, c anlegte. Dieses ist bey jeder folgenden Station zu beobachten.

III. Es geschiehet sehr oft, daß, wenn die Punkte A, B, C, D, E, nicht in einer einzigen Ebene liegen, man bey einer gewissen Station nicht nach der folgenden hinvisiren, oder nicht nach der vorhergehenden zurückvisiren kan, weil nemlich diese Stationen, entweder zu hoch oder zu niedrig liegen.

In diesem Falle muß man mit aller möglichen Sorgfalt vorher einen Stab in die Verticalebene der beyden Stationen einsetzen, der nahe genug beym Meßtische stehet, daß man nach ihm die dioptrische Regel richten kan.

So z. E. wenn C sehr viel niedriger oder höher als B läge, daß ich C durch die Dioptern nicht sehen könte, so würde ich vorher bey M nahe genug bey B, einen Stab genau in die Verticalebene BC einsetzen; dann wäre es einerley ob ich die Dioptern nach C oder nach dem Stabe M richtete, um die Visirlinie bγ, auf dem Meßtische

tische zu ziehen. Aber zugleich erhellet auch die Nothwendigkeit der im 33 §. erwähnten Regeln und Vorsichten, den Stab bey M gehörig einzusetzen,

IV. Wenn man bey einer gewissen Station z. E. C die Linie cb auf dem Meßtische nach der vorhergehenden Station B einrichten will, und zwar so, daß der Punkt c zugleich ohne merklichen Irrthum lothrecht über C zu liegen komme, so muß man vorher nur ohngefähr nach dem Augenmaaße die Linie cb längst CB einrichten, ehe man den Punkt c durch gehörige Verrückung des Meßtisches über C bringt. Denn hätte man gleich anfangs c über C gebracht, und müste nachher den Meßtisch viel wenden, um cb nach B hinzurichten, so würde der Punkt c nicht lothrecht über C bleiben, sondern sich bey der Horizontalwendung des Tischgens, wieder merklich von C entfernen. Wenn man aber erst ohngefähr cb längst CB eingerichtet hat, und dann c lothrecht über C bringt, so wird man nicht nöthig haben, den Meßtisch noch viel zu rücken, um cb demnächst völlig genau längst CB einzurichten, mithin, wird sich auch der Punkt c nicht merklich von C entfernen, indem man den Meßtisch herumdrehet.

V. Wenn die Messung von Wichtigkeit ist, so dienet es zur Vorsicht, an jeder Station, einen

Pfahl

Pfahl zurückzulassen, damit, wenn man irgendwo in der Folge einen groben Fehler in der Figur entdecken solte, man desto sicherer die vorhergehenden Stationen wieder finden, die begangenen Fehler aufsuchen, und corrigiren könne, ohne daß man jedoch nöthig hätte die ganze Messung wieder von Vorne anzufangen. Dergleichen Pfähle werden etwas tief in die Erde geschlagen, und allenfalls auch die Stationnummern darauf bemerket.

VI. Eine Figur, die an ihrem Umkreise sehr grosse Seiten, und viele Winkel hat, wie solches unterweilen, bey Dorf und Waldvermessungen zu geschehen pflegt, wird meistens durch eine einzige Messung nicht auf den Meßtisch gebracht werden können, ohne den Maaßstab so klein anzunehmen, daß der Grundriß zu seiner Absicht unbrauchbar wird. In solchen Fällen ist man genöthigt, eine so große Figur in mehrere einzelne Stücke zu zerlegen, jedes Stück besonders auszumessen, und dann diese einzelnen Entwürfe in eben der Ordnung wie man sie auf dem Felde vorgefunden hat, zu Hause auf einem grossen Blatt Papiere, mit einander zu verbinden. Auf Wiesen, die man bequem übersehen kan, hängt es von unserer Willkühr ab, den einzeln Stücken eine bequeme Gestalt zu geben. Bey Waldvermessungen bestimmen sich die einzeln Stücke oft durch Wege, die durch die Holzungen laufen.

Doch alle hieher gehörigen Umstände, die nöthige Vorsicht, die man in der Auswahl und Verbindung der einzeln Entwürfe zu beobachten hat, werden in der Folge, wenn wir von Ausmessung ganzer Fluren reden, mit mehreren auseinandergesetzt. Jetzt beschäftigen wir uns nur den Gebrauch des Meßtisches und anderer Werkzeuge zur Entwerfung einzelner Polygone zu zeigen, und die verschiedenen Methoden ins Licht zu setzen, deren sich ein Feldmesser demnächst bey großen Vermessungen nach Verhältniß der Umstände bedienen kan.

Anmerkung, krumme Linien betreffend.

Man pflegt sich vorzüglich, der Messung aus der Peripherie zu bedienen, wenn Figuren, die mit krummen Linien umschlossen sind, zu Papiere gebracht werden sollen. Da wird nun die krumlinigte Figur mit einer geradlinigten umschlossen, die geradlinigte nach dem gewiesenen Verfahren, aus der Peripherie vermessen; und hierauf zugleich während dieser Messung die Punkte der krummen Linie, die längst den Seiten der geradlinigten Figur herläuft, durch Abscissen und Ordinaten bestimmt, und auf den Meßtisch getragen. Wenn zum Beyspiel Fig. LXXIII $\mu\nu$, ein Stück von der krumlinigten Figur wäre, die von der geradlinigten eingeschlossen ist, so würde man den Theil $\mu\nu$, der längst BC läge, durch Abscissen

sciſſen und Ordinaten $M\mu$, $N\nu$, die man, während BC gemeſſen würde, zugleich mit beſtimte, entwerfen können, indem man auf die entſprechende Linie bc, die gemeſſenen Abſciſſen BM, BN, u. ſ. w. von b nach m, und von b nach i u. ſ. w. trüge, hierauf die Ordinaten mn, ik denen $M\mu$, $N\nu$, u. ſ. w. gemäß nähme, und durch die ſolchergeſtalt gefundenen Punkte n, k u. ſ. w. auf dem Meßtiſche die krumme Linie nk auszöge.

Auf dieſe Art, würde man jeden Theil der krumlinigten Figur, zugleich während der Vermeſſung der geradlinigten, mit auf den Meßtiſch bringen können. Es wird aber gut ſeyn, von allen gemeſſenen Abſciſſen und Ordinaten, wie auch von den Seiten der geradlinigten Figur ein genaues Diarium zu halten; denn oft erlaubt es die Zeit nicht auf dem Felde ſogleich mit aller nöthigen Schärfe die Abſciſſen und Ordinaten gehörig aufzutragen: und da man doch gewöhnlich die Figur auf dem Meßtiſche zu Hauſe ins Reine auf ein anderes Blatt Papier zu bringen pflegt, ſo iſt es beſſer, die Maaße der Abſciſſen und Ordinaten, aus dem Diario zu nehmen, als ſie wieder von dem Meßtiſche abzutragen. Bey dem Entwurfe, den man von der krumlinigten Figur auf dem Meßtiſche erhält, kömt es nicht ſo ſehr auf die genaue Auftragung der Abſciſſen und Ordinaten, als vielmehr auf die Bemerkung der Umſtände an, worauf ſich die Punkte der krummen Linie beziehen, d. h.

ob sie z. E. zur Krümmung eines Flußes, eines Weges, einer Gränze u. s. w. gehören; welches man dann durch eine Zeichnung auf dem Meßtische andeutet, wodurch alsdann beym Auftragen zu Hause, der Einbildungskraft sehr geholfen wird, wenn auch gleich nicht mit aller nöthigen Schärfe, die krumlinigte Figur auf dem Meßtische gehörig bestimmt worden wäre.

Die Hauptsache ist, daß nur die geradlinigte Figur ABCDE, auf die man die übrigen Abmessungen gründet, mit aller möglichen Genauigkeit auf dem Meßtische erhalten werde.

Aufgabe.

§. 228. **Eine Figur ABCDEF Fig. LXXV. die man aus einer Station A ganz übersehen kan, zu Papiere zu bringen.**

Aufl. I. Man setze den Meßtisch in A, stelle ihn horizontal, und visire aus dem Punkte a, der lothrecht über A angenommen worden, nach allen Eckpunkten B, C, D, E, F, und ziehe auf dem Meßtische die dahin gehenden Richtungslinien $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $a\varepsilon$, $a\varphi$.

II. Hierauf messe man alle Seiten AB, BC, CD, DE, EF.

III.

III. Die Seite AB trage man nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungslinie $a\beta$, von a nach b.

Mit der Seite bc die man der BC gemäß nimt, durchschneide man aus b, die Diagonale $a\gamma$, in c, aus c schneide man mit cd die der CD gemäß ist, die Diagonale $a\delta$ in d, u. s. w. so wird man auf dem Meßtische eine Figur abcdef erhalten, die der ABCDEF ähnlich ist.

Anmerkung. Wenn man sich mit dem Halbmesser bc aus b einen Kreiß beschrieben vorstellet, so wird solcher die $a\gamma$, in zween Punkten c, n, durchschneiden, und es ist bn = bc.

Es wird aber hier das Dreyeck abn nicht dem ABC ähnlich seyn, weil in der Figur, ABC ein stumpfer, abn, ein spitzer Winkel ist; wenn man also nach der Vorschrift (III) mit der Seite bc die Diagonale $a\gamma$ durchschneidet, so finden eigentlich zween Durchschnittspunkte c, n, statt, davon aber hier nur der c zu gebrauchen ist, welcher das Dreyeck abc dem ABC ähnlich macht.

Wie soll man aber nun in jedem Falle, die Zweydeutigkeit der beyden Punkte c, n, entscheiden? wie kan man wissen, welchen man unter beyden Punkten c, n, in jedem Falle wäh-

wählen müsse, damit man das richtige Dreyeck abc erhalte.

Diese Zweydeutigkeit zu entscheiden, muß man nur wissen ob der Winkel ABC auf dem Felde stumpf oder spitzig ist. Man braucht aber diesen Winkel nicht würklich zu messen, man kan ihn bloß nach dem Augenmaaße schätzen. So bald man aber die Natur des Winkels ABC weiß, so wählet man unter beyden Durchschnittspunkten c, n, derjenigen c, der eben den spitzen oder stumpfen Winkel abc giebt, den CB mit AB auf dem Felde macht.

Nach dieser Bemerkung und Vorsicht, wird es selten sonderliche Schwürigkeit haben, die wahren Punkte, b, c, d, e, f, auf den Diagonallinien zu bestimmen.

Und so kan diese Aufgabe, auf dem Felde von sehr großen Nutzen seyn, indem sie eine der bequemsten Methoden ist, eine Figur die man ganz übersehen kan aus der Peripherie zu vermessen, und weil man nur an einer einzigen Station A Winkel aufzunehmen braucht, so ist dieses Verfahren zugleich eines der richtigsten.

Wenn längst der geraden Linien AB, BC, u. s. w. krumme herlaufen, so bestimmt man sie durch Ordinaten und Abscissen, die man demnächst, an die entsprechenden Linien ab, bc u. s. w. setzt,

setzt, und dann die krumme Linie auf dem Meßtische verzeichnet.

Aufgabe.

§ 229. Eine Figur aus ihrem Umfange zu Papiere zu bringen ohne daß man nöthig hat, alle Seiten ringsherum zu messen.

Aufl. Es sey Fig. LXXVI. die zu entwerfende Figur.

I. Um nun dieselbe zu Papiere zu bringen, so nehme ich an, daß sich innerhalb derselben Gegenstände R, M befinden, die man an allen Ecken der Figur sehen kan.

II. Man suche nun eine Seite der Figur z. E. AB aus, von der Beschaffenheit, daß die Punkte R, M, eine bequeme Lage gegen dieselbe haben, und die Linien BM, MA, RB, RA nicht zu spitze oder stumpfe Winkel mit AB machen.

III. Diese Linie AB sehe man als eine Standlinie an, und bringe vermittelst derselben, erstlich die Punkte R, M, auf den Meßtisch (§ 184).

Man setzet nemlich den Meßtisch über A, und ziehet aus dem Punkte a der lothrecht über A liegt, nach B, M, R, die Richtungslinien $a\beta$, $a\mu$, $a\varrho$; misset demnächst AB, und trägt sie

auf

auf die zugehörige Richtung aβ, von a nach b. Nun stellt man den Meßtisch über B, bringt b lothrecht über B, richtet ba längst BA ein, und ziehet aus b abermahls nach R, M, Richtungslinien, so werden dieselben, die bereits bey der ersten Station gezogenen Richtungen aϱ, aμ, in r, m, durchschneiden, und r, m werden gegen ab, eben die Lage haben die R, M, gegen AB haben, weil die Dreyecke abr, ABR und abm, ABM, einander ähnlich sind (§. 184).

IV. Bey unverrückter Stellung des Meßtisches ziehe man nun auch aus b nach C die Richtung bγ.

V. Ohne nun die Linie BC würklich zu messen, begebe man sich mit dem Meßtische sogleich nach der dritten Station C, stelle und verrücke ihn so lange, bis die bereits in (IV) auf demselben gezogene Linie bγ, bey der dritten Station genau in die Verticalebene CB zu liegen komme; welches man sowohl vermittelst einer Gabel, deren von bγ herabgelassenes Loth durch C gehen muß, als auch durchs Zurückvisiren nach B erhalten kan.

VI. Nach dieser gehörig eingerichteten Stellung des Meßtisches, lege man die Alhidadenregel an einen der beyden Punkte r, oder m, und visire nach den zugehörigen Objekten R oder M, so werden die Richtungslinien rR, oder mM, rück-

rückwärts verlängert, auf der Linie b γ, den Punkt c bestimmen, und dieser Punkt c wird auf dem Papiere, den wahren Standpunkt des Meßtisches angeben, dergestalt, daß, wenn man von c ein Loth auf den Boden herabfällt, die Weite von B, nach diesem Punkte, durch bc auf dem Meßtische ausgedrückt wird.

VII. Diesen Satz zu beweisen, so betrachte man die beyden Dreyecke MBc, mbc, welche einander ähnlich sind; denn es ist der Winkel MBc = mbc; da nun ferner wegen (V) B, b, c in gerader Linie liegen, so werden wegen der gleichen Winkel mbc, MBc, die Linien MB, mb, parallel seyn, folglich von der dritten Mc unter gleichen Winkeln BMc = bmc geschnitten. — Mithin hat wegen des gemeinschaftlichen Winkels McB = mcb, das Dreyeck mcb eben die drey Winkel, die das Dreyeck McB hat; beyde Dreyecke sind also einander ähnlich; folglich ist

BM : bm = Bc : bc

Aber wegen (III) ist auch

BM : bm = AB : ab

also AB : ab = Bc : bc

d. h. weil ab der AB gemäß gemacht worden, so wird auch bc der Bc gemäß seyn.

VIII. Eben dieser Beweiß gielt von den Punkten R, r, weil auf eben die Art die beyden Dreyecke BRc, brc, einander ähnlich sind.

Es ist klar, daß die verlängerte Richtung Mm, allein schon zureichend ist, auf der Linie B γ, den Standpunkt des Meßtisches, oder den Punkt c abzuschneiden. — Allein um sich vonder Richtigkeit der Arbeit zu versichern, so ist es vortheilhaft, auch vermittelst der Richtungslinie Rr den Punkt c zu bestimmen; denn wenn der Meßtisch bey c seine gehörige Stellung nach (V) erhalten hat, und übrigens die Objecte R, M, richtig auf dem Meßtische bestimmt worden, so muß das an r gelegte und nach R gerichtete Diopterlinial gleichfalls durch c gehen, oder die Richtungslinien Mm, Rr, müssen rückwärts verlängert, sich auf bc, in einem und demselben Punkte c schneiden.

IX. Man siehet leicht, daß man auf eben die Art, und nach eben den Gründen, auch jeden folgenden Stationspunkt des Meßtisches z. E. D auf dem Papiere bestimmen könne. — Nachdem man in (VI) den dritten Stationspunkt c richtig gefunden hat, so lasse man den Meßtisch unverrückt, und ziehe erstlich aus c nach D die unbestimmte Richtungslinie c δ, proiicire alsdenn vermittelst einer Gabel den Punkt c auf den Boden, und stecke daselbst einen Stab ein. —

Bege-

Begebe sich hierauf mit dem Meßtische nach der vierten Station D, und stelle ihn daselbst so, daß die Linie dc in der Verticalebene liege, die durch D und den bey der dritten Station projicirten Punkt c gehet. — Lege alsdann an r, m, abermahls das Diopterlinial und visire nach den zugehörigen Objekten R, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, auf dem Meßtische die vierte Station d bestimmen — und so erhellet, wie man nach und nach jeden Stationspunkt des Meßtisches über jeder Ecke der Figur ABCD, auf dem Meßtische bekömt, die Figur ABCD mag so viel Ecken haben, als man will: hier würden z. E. bey der 4ten Station D, die Punkte a, b, c, d, die 4 zurückgelegten Stationen des Meßtisches über A, B, C, D, ausdrücken.

Anmerkungen über dieses Verfahren.

§. 230. 1. Es ist klar, daß wenn man anfangs noch mehrere, als zwey, innerhalb der Figur ABCD liegende Objekte, auf dem Meßtische entworfen hätte, alsdenn ein jedes von diesen Objekten, zur Bestimmung der Stationen c, d u. s. w. hätte dienen können. — Und da alle Richtungslinien wie rR, mM u. s. w. in einem und demselben Punkt c, oder d u. s. w. zusammentreffen müssen, wenn während der Arbeit, keine Fehler vorgefallen sind, so dienen

mehrere Objekte nicht allein zur Prüfung der Arbeit, sondern auch dazu, daß man in der Arbeit nicht aufgehalten wird, wenn man beym Fortgange derselben, ein oder das andere Objekt aus dem Gesichte verliehren solte.

II. Wenn es sich eräugnet, daß sich nicht völlig genau alle Richtungslinien, wie Mm, Rr u. s. w. in einen und denselben Punkt c, d, u. s. w. schneiden, so zeigt dieses einen Fehler an, der entweder daher rühret, weil man aus der anfänglichen Standlinie AB, die Objecte R, M, nicht richtig zu Papiere gebracht hat, oder weil man nicht an jeder folgenden Station den Meßtisch sorgfältig nach der vorhergehenden eingerichtet hat. In diesem Falle wählt man den Punkt, in dem sich die meisten Richtungslinien Mm, Rr u. s. w. schneiden, oder man bestimmt unter den verschiedenen Durchschnittspuncten einen mittlern, den man für den wahren annimmt, und folglich dadurch den Fehler einigermaaßen corrigirt. Wenn aber die Durchschnitte gar zu weit von einander fallen, so muß ein beträchtlicher Fehler irgend an einer Station vorgefallen seyn, und ich rathe daher, lieber nach den vorhergehenden Stationen wieder zurückzugehen, und die Arbeit noch einmahl vorzunehmen. — Gewöhnlich wird man den Fehler in der nächstvorhergehenden Station entdecken.

III.

III. Das gewiesene Verfahren, aus dem Umkreise eine Figur zu Papiere zu bringen, ist ausserordentlich bequem, und giebt, wenn die Figur aus sehr vielen Ecken bestehet, am Schluße derselben, selten einen so grossen Fehler, als die gewöhnliche Methode, wo man alle Seiten ringsherum misset — Die Bequemlichkeit, daß man nur eine einzige Standlinie, aus der man die Objecte innerhalb der Figur bestimmt, messen darf, ist in solchen Fällen, wo der Umkreiß nicht aus lauter Horizontallinien bestehet, um desto mehr zu empfehlen, da man, wenn nur an jeder Station der Meßtisch horizontal stehet, auch sogleich die auf den Horizont projicirte Figur auf dem Meßtische erhält, da im Gegentheile, die gewöhnliche Methode, wegen der vorzunehmenden Reduction der gemessenen Umfangslinien auf den Horizont, sehr mühsam wird, und selbst zu großen Fehlern Gelegenheit geben kan.

Freylich schränkt sich diese Methode, nur auf solche Figuren ein, innerhalb deren man kenntliche Objekte vorfindet; allein in eben solchen Fällen ist sie vortheilhaft z. E. wenn man Städte aus ihrer Peripherie zu Papiere bringen soll; da würden Thürme, oder andere hohe Gebäude sehr gut zu solchen Objekten wie R, M, dienen.

Dieser Methode habe ich mich in meinen Vorlesungen über die pract. Geometrie, oft bedient,

die Figur des Walles um Göttingen zu entwerfen. Der Umkreiß von Göttingen bestehet aus mehr als 50 Winkeln und eben so viel Linien, darunter einige ziemlich lang sind — allein in einer Zeit von 6 Stunden bin ich allemahl damit fertig geworden, da ich nach der gewöhnlichen Messung aus der Peripherie, fast 4 mahl so viel Zeit dazu brauchte.

IV. Endlich ist es nicht nothwendig, daß die Objekte R, M, gerade innerhalb der Figur liegen; kan man außerhalb derselben auch Gegenstände, die hierzu geschickt sind, antreffen, so werden sie zur Bestimmung der Figur gleiche Dienste leisten.

Aufgabe.

§. 231. Aus einer willkürlich angenommenen Standlinie FG Fig. LXXVII. Tab VI so viel Punkte A, B, C, D, E, einer Figur auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, als man will, oder eine Figur aus einer Standlinie aufzunehmen.

Aufl. Diese Aufgabe ist völlig mit der einerley, die wir im 184 §. zur Messung der Weiten gebraucht haben, und ist im Zusammenhange kurz auf folgende Art zu bewerkstelligen.

Man bringe über F, den Meßtisch, stelle ihn wie gewöhnlich horizontal, und ziehe aus dem

loth-

lothrecht über F liegenden Punkte f, nach allen Objekten A, B, C, D, E, wie auch nach G, die Richtungen fα, fβ, fγ, fδ, fε, fχ.

II. Es verstehet sich, daß die Objekte A, B, C, u. s. w. gewisse Nahmen haben, oder mit Nummern bezeichnet worden sind. — Man schreibe also ihre Nahmen, oder Nummern ebenfalls an die nach ihnen hingezogenen Richtungen, fα, fβ, u. s. w. An die Richtung fχ der Standlinie schreibe man gleichfalls ein beliebiges Zeichen.

III. Nachdem man nun die Standlinie FG gemessen, sie auf die entsprechende Richtung fχ von f nach g getragen, hierauf den Meßtisch, mit den bey Nro. 1. darauf gezogenen Linien, über G bey Nro. 2 so gestellet hat, daß g über G, und gf längst GF eingerichtet worden, so ziehe man aus g bey Nro. 2 abermahls nach allen Gegenständen A, B, C u. s. w. Richtungslinien ga, gb, u. s. w.

Wo nun die nach A ausgezogene Richtung ga, die bey der ersten Station dahin gezogene und nach (II) bemerkte Richtung fα durchschneidet, da wird sich die Lage des Objekts A, auf dem Meßtische durch a bestimmen, dergestalt, daß a gegen gf, eben die Lage haben wird wie A gegen GF. Auf gleiche Weise, geben die Durchschnitte b, c, d, e, der nach den Objekten B,

C, D, E hingezogenen Richtungen fβ, gb; fγ, gc; u. s. w. die Lagen dieser Objekte B, C, D, E gegen die Standlinie FG an, so daß die auf dem Meßtische erhaltenen Punkte a, b, c, d, e, gegen fg, eben so liegen werden wie A, B, C, D, E, gegen FG, und durch gerade Linien ab, bc, cd u. s. w. verbunden, auf dem Meßtische eine Figur abcde geben werden, die der ABCDE vollkommen ähnlich ist.

Der Beweis hiervon läst sich kurz so abfassen.

Weil vermöge (§. 184) die Weiten bc, cd, bd, denen BC, CD, BD gemäß sind oder weil vielmehr überhaupt

BC : CD = bc : cd

BC : BD = bc : bd

ist, so ist das Dreyeck bcd, dem Dreyeck BCD ähnlich; also der Winkel bcd = BCD; auf gleiche Weise thut man dar, daß die Winkel CDE = cde; DEA = dea u. s. w. sind. Die Figur abcde, hat also an ihrem Umfange eben die Winkel, als die Figur ABCDE, und sie folgen auch in eben der Ordnung auf einander, da nun auch nach der Ordnung die Weiten bc, cd, de, ea, ab, denen BC, CD, DE, EA, AB gemäß sind, so muß die Figur abcde, der ABCDE ähnlich seyn.

Zus. Durch dieses Verfahren sind auch die Weiten fb, fc, fd, u. s. w. denen Entfernungen FB,

FB, FC, FD u. s. w. gemäß. Wodurch man also zugleich jedes Objekts Weite von den Standpunkten F, G, findet.

Anmerkungen.

§. 232. I. Diese Aufgabe ist von sehr großen Nutzen, und fast die vorzüglichste deren man sich bey Entwerfung ganzer Landschaften mit Vortheil bedienen kan, besonders wenn man, statt des Meßtisches das Astrolabium gebraucht, und damit auf eine ähnliche Art zu Werke gehet, wie die Folge ausweisen wird. Sie wird vorzüglich gebraucht, die Hauptpunkte einer Landschaft; z. E. Dörfer, Bergspitzen, Städte u. s. w. zu entwerfen, und hat die Bequemlichkeit, daß man nicht nöthig hat von einem Orte nach dem andern würklich hinzugehen, sondern nur eine einzige Standlinie zu messen braucht. Zugleich erhält man, die Projection der Figur ABCDE auf die Horizontalfläche, wenn an jedem Standpunkte F, G, nur der Meßtisch horizontal gestellet worden.

II. Wenn die Objekte A, B, C u. s. w. sehr weit von einander entlegene Punkte einer Landschaft vorstellen, so muß man freylich den Maaßstab, womit man die Standlinie aufträgt sehr klein annehmen, wenn nicht die Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, außerhalb des Meßtisches fallen sollen. In solchen Fällen mögten wohl die Unterab-

terabtheilungen in Fuße ꝛc. wegfallen, weil sich solche in einen unsichtbaren Punkt verliehren würden. Allein eben bey so großen Vermessungen kömt es auf solche Kleinigkeiten, dergleichen Fuße und Zolle sind, nicht an, da man oft genöthigt ist, eine und mehrere Ruthen für einen Punkt gelten zu lassen.

III. Die Standlinie braucht eigentlich nur in dem Falle würklich gemessen zu werden, wenn man auf dem Meßtische, ausser der Lage der Punkte a, b, c, d, e gegen einander, auch ihre Entfernungen verlangt.

Verlangt man bloß die Lage der Objekte A, B, C, D, E gegen einander, so braucht man die Standlinie nicht wirklich zu messen — weil das Verfahren des 184 §. mithin auch des 231 §, welches aus jenem herfliesset, eine willkürliche Standlinie zum voraussetzt, folglich sich auf keine bestimmte Größe derselben einschränket; und da der verjüngte Maaßstab, gleichfalls willkürlich ist, so kan man auch fg, von beliebiger Länge nehmen; denn es läst sich allemahl ein verjüngter Maaßstab gedenken, auf dem fg so viele Theile halten würde, als die willkürliche Standlinie nach der Meßkette hält.

IV. Die Richtigkeit der ganzen Operation hängt davon ab, daß über der zwoten Station Nro. 2. die Linie gf so genau als möglich längst

der

der Standlinie GF eingerichtet werde, und sich während, daß man aus g nach den Objekten A, B, C, u. s. w. visiret, nicht aus ihrer Lage verrücke. Um also während der Arbeit sich von dem unverrückten Stande des Meßtisches zu versichern, so muß man entweder unterweilen, die dioptrische Regel an gf legen, und zurück nach der Station F visiren, oder man muß an dem Meßtische mit einem Versicherungsfernrohre (§. 131) versehen seyn.

V. Wenn solchergestalt alles seine gehörige Richtigkeit hat, und gf genau längst GF gestellet ist, so sind nach (§. 184 Zus.) alle Linien fb, fa, bc, cd u. s. w. den correspondirenden Linien FB, FA, BC, CD, u. s. w. parallel.

VI. Es ist nicht nöthig daß man aus g, würklich die Linien gb, gc, u. s. w. ausziehet — sondern man braucht, nur da, wo die dioptrische Regel, die Linien fβ, fγ u. s. w. schneidet, die Durchschnitte b, c, mit einer Zirkelspitze zu bemerken. — Dies dienet, Verwirrungen zu vermeiden, die sonst die vielen Linien gar leicht verursachen könten.

VII. Die richtige Wahl der Standlinie FG, trägt auch sehr vieles dazu bey, die Folge der im Visiren oder in der Stellung des Meßtisches begangenen Fehler zu vermindern, und daher dienen die im XVII Kapitel hieher gehörigen

Errin-

Erinnerungen. Man muß daher, wenn eine Standlinie wie FG nicht zureichet, alle Punkte A, B, C, D u. s. w. mit mäßiger Richtigkeit auf dem Meßtische zu entwerfen, mit ihr eine andere Standlinie verbinden, aus der man diejenigen Punkte entwirft, die gegen die erste eine zu unbequeme Lage hatten. Ueberhaupt muß man bey Entwerfung großer Districte immer mehrere Standlinien zu Hülfe nehmen, theils, weil eine einzige Standlinie nicht zureichend seyn würde, eine große Menge sehr weit wegliegender Objekte auf einmahl zu Papiere zu bringen, ohne den Maaßstab gar zu klein anzunehmen, theils auch weil eine Standlinie nicht gegen alle Objekte eine gleich vortheilhafte Lage hat. Es müssen aber die einzeln Standlinien mit einander oder mit bereits entworfenen Punkten zusammenhängen, damit sich nachher die einzeln entworfenen Theile einer Landschaft mit einander verknüpfen lassen. — Was aber hiebey noch zu merken, und wie man verfahren müsse, die einzeln Entwürfe, ohne sich zu irren, richtig in Verbindung zu bringen, davon werde ich im folgenden Theile dieses Buches umständlicher handeln.

VIII. Wenn man bey der Station Nro. 1, nachdem die Visirlinien $f\alpha$, $f\beta$ u. s. w. gezogen worden, den Meßtisch in unverrückter Lage läßt, und auf ihm auch die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ verzeichnet, (§. 121) und nun bey Nro. 2 den

Meß-

Meßtisch so stellet, und wendet, daß die Magnetnadel, der an $\mu\nu$ gelegten dioptrischen Regel, über der Nordlinie, auf dem Boden des Magnetkästgens wieder einspielet, so werden nicht allein die beyden Richtungen $\mu\nu$ bey Nro. 1 und Nro. 2, sondern auch bey Nro. 2 alle Linien auf dem Meßtische wie ab, bc, cd, fb u. s. w. den entsprechenden Linien AB, BC, CD, FB u. s. w. auf dem Felde parallel seyn. — Dies drückt man so aus, daß man sagt, bey Nro. 2 habe der nach der Magnetnadel eingerichtete Meßtisch eine Lage, die mit der, bey Nro. 1 parallel ist.

Dieser Satz, den Meßtisch an jeder Station vermittelst der Magnetnadel, in eine Lage zu bringen, die mit einer der vorhergehenden Stationen parallel ist, wird uns den Weg zu folgender Aufgabe zeigen, welche bey geodätischen Messungen von vorzüglicher Brauchbarkeit ist.

Aufgabe.

§. 233. **Wenn man nach der Aufgabe des 231 §. bereits einige Objekte auf dem Felde zu Papiere gebracht hat, alsdenn die Lage jeder Station, wo man den Meßtisch hinbringt, gegen diese Objekte zu bestimmen.**

Aufl. Fig. LXXVI. Es seyen S, R, M Gegenstände auf dem Felde, und AB, die angenommene Standlinie; also Nro. 1, Nro. 2 die beyden

den Stände, aus denen man die Objecte S, R, M, nach der vorhergehenden Aufgabe zu Papiere gebracht hat, so daß die bey Nro. 2 erhaltenen Punkte s, r, m, auf dem Meßtische die Objekte S, R, M vorstellen.

$\mu\nu$ sey die Richtung der Magnetnadel, die man auf dem Meßtische bey Nro. 1 gezogen hatte; es verstehet sich daß man bey Nro. 1, sowohl alle Visirlinien wie $a\varrho$, $a\mu$ u. s. w. als auch die Lage der Magnetnadel $\mu\nu$ gegen dieselben, bey unverrückter Stellung des Meßtisches gezogen haben muß.

Es stelle nun Nro. 3 eine dritte Station des Meßtisches vor; um nun die Lage dieser Station, gegen die Objekte S, R, M zu bestimmen, so lege man an die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, das Diopterlinial, drehe den Meßtisch so lange horizontal herum, bis die Magnetnadel über der Nordlinie einspielt. — In dem Augenblicke da dieses geschiehet, erhält der Meßtisch bey Nro. 3 eine Lage, die mit der bey Nro. 1 und Nro. 2 gehabten, parallel ist. — In dieser Lage bleibe nun der Meßtisch unverrückt; man lege an r, s, m, das Diopterlinial, und visire nach den zugehörigen Objekten R, S, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Ss, Mm, sich insgesamt, auf dem Meßtische in einem und denselben Punkt c

schnei-

schneiden wie im 230 §, und dieser Punkt c wird auf dem Papiere die Station des Meßtisches bey Nro 3 vorstellen, dergestalt, daß wenn C, lothrecht unter c liegt, die Lage der Punkte C, R, M, S auf dem Felde, durch die c, r, m, s auf dem Meßtische angegeben wird. Dies erhellet daraus.

Weil bey Nro. 3 der Meßtisch eine parallele Lage mit Nro 2 erhalten hat, so sind bey Nro. 3, sowohl die Linien br, bm, bs, als auch sm, rm, sr, den entsprechenden Linien, BR, BM, BS, SM, RM, SR, parallel.

Weil also sr parallel mit SR, und rm parallel mit RM, und die Punkte S, s, c; M, m, c; in geraden Linien liegen, so ist das Dreyeck src dem Dreyecke ScR, oder eigentlich SCR ähnlich, und auf eben die Art das Dreyeck rcm dem Dreyeck RCM ähnlich. Uebrigens ist auch das Dreyeck srm dem SRM ähnlich; dies giebt also die Proportionen

SC : sc = SR : sr = RM : rm

RC : rc = Rm : rm

MC : mc = RM : rm

also SC : sc = RC : rc = MC : mc

d. h. die Weiten SC, RC, MC, sind denen sc, rc, mc, proportional; da nun auch die Winkel SCR = scr, RCM = rcm so siehet man leicht

leicht, daß die Punkte s, r, m, gegen c eben die Lage haben müssen, die S, R, M, gegen C haben.

Auf gleiche Weise erhellet, daß wenn in der Station bey Nro. 4 der Meßtisch wieder nach der Magnetnadel gestellet, hierauf an r, m, s, das Diopterlinial gelegt wird, sich die verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, Ss, in d durchschneiden, und solchergestalt durch d, den Stand des Meßtisches bey Nro. 4 auf demselben bestimmen werden.

Und so kan man auf dem Felde jeden Punkt, wo man den Meßtisch hinstellet, auf dem Meßtische bestimmen, und solchergestalt auch auf eine gar leichte Art, Figuren aus ihrem Umfange zu Papiere bringen, ohne daß man nöthig hat, wie bey den Aufgaben des 222 und 230 Hes den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach den vorhergehenden Stationen einzurichten, und solchergestalt einen zusammenhängenden Faden der Vermessung zu verfolgen.

Anmerkungen.

§. 234. I. Es erhellet daß, beym Fortgange einer Messung, selbst die Punkte wie B, C, wieder zu neuen Richtpunkten dienen können. Hätte man z. B. bey der Station Nro. 4 die Gegenstände S, R, M aus dem Gesichte verlohren,

ren, könte aber nur einige der vorhergehenden Stationen z. E. B, C, sehen, so würde man den Punkt d demohnerachtet bestimmen können, wenn man in diesen Stationen B, C, Signale zurückgelassen hätte; denn man dürfte, nachdem der Meßtisch nach der Magnetnadel gestellet worden, die dioptrische Regel nur an b, c, legen, und nach B, C, visiren, so würden die verlängerten Richtungen Bb, Cc, gleichfalls den Punkt d bestimmen.

II. Auf diese Art erhellet, daß man eine Messung sehr weit ausdehnen kan, ohne daß es nöthig ist, sehr viele Stand- und andere Linien unmittelbar zu messen — und man hat den Vortheil, daß sich an jedem Orte, wo man den Meßtisch hinbringt, und wo man zwey oder mehrere von den bereits auf dem Meßtische bestimmten Objecten sehen kan, die Messung weiter fortsetzen läst.

III. Ein anderer Vortheil bey dieser Vermessungsart ist, daß, wenn nur die aus der Standlinie AB, festgelegten Objekte R, S, M, ihre gehörig richtige Lage auf dem Meßtische erhalten haben, man nicht so leicht besorgen darf, daß sich beym Fortgange der Messung die Fehler häufen, oder sich von einer Station, auf die nächstfolgende fortpflanzen. — Man vergleiche hiemit nur die gewöhnliche Art, eine Fi-

gut aus ihrem Umfange zu entwerfen. Ein Fehler den man z. E. in der Station B im Visiren begangen hat, pflanzt sich, wenn man bey C den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach B einrichtet, auf den Gegenstand C, und von da weiter auf D fort, weil man einen beständigen Faden der Vermessung verfolgt. — Allein wenn man die Punkte C, D nach der Methode des 233 §. entwirft, so pflanzt sich der auch etwa bey C begangene Fehler nicht auf D fort, außer nur in dem Falle, wenn man C zu einen neuen Richtpunkt, wie in (l) gebrauchen wolte; so lange man sich aber bloß der richtig entworfenen Objekte S, R, M, zu Richtpunkten bedienet, hat man keine Anhäufung der Fehler zu besorgen.

Wenn R, M, S, Gegenstände sind, die man auf eine beträchtliche Weite sehen kan, so wird man vermittelst derselben, eine große Strecke Landes aufnehmen können, und dann erhellet, daß die gewiesene Methode bey Landesvermessungen von sehr großem Nutzen ist.

Uebrigens ist es vortheilhaft, anfangs aus der Standlinie AB, so viel Objekte zu Papiere zu bringen als möglich, weil doch beym Fortgange einer Messung immer einige sich wieder aus dem Gesichte verliehren. — Und wenn man aus Besorgniß, daß sich die Fehler anhäufen mögten, sich nicht der bereits entworfenen Stationen,

tionen, wie C, B wieder zu neuen Richtpunkten bedienen will, so kan man ja immer eine neue Standlinie messen, und aus ihr, Objekte zu fernern Richtpunkten, auf dem Meßtische entwerfen.

Nöthige Erforderniß bey dieser Messungsart, und Mittel die Magnetnadel zu entbehren.

§. 235. Die wichtigste Voraussetzung ist bey dieser Messungsart, wie leicht erhellet, diese: daß die Magnetnadel ihre gehörige Vollkommenheit und Empfindlichkeit habe (§. 120). Denn wenn dieselbe z. E. faul wäre, so würden auf dem Meßtische, welchen man nach einer solchen Nadel richten wolte, die Linien, wie rs, rm (Nro. 3) nicht den zugehörigen Linien auf dem Felde, RS, RM parallel werden, und darauf gründet sich doch das wesentliche dieser Methode. — Da nun sowohl wegen der Unvollkommenheit der Magnetnadel, als auch wegen anderer zufälligen Ursachen, gar leicht die wahre Richtung der Magnetnadel verändert wird, auch selbst beym Forttragen der dioptrischen Regel von einer Station zur andern, wenn man nicht sehr vorsichtig zu Werke gehet, gar leicht der Stift auf dem sich die Nadel drehet, etwas schadhaft werden kan, so sind in so ferne, bey dieser Methode, freylich auch Unbequemlichkeiten und Irrthümer zu besorgen, die insgesamt

wegfallen würden, wenn man Mittel hätte, die Magnetnadel völlig zu entbehren.

Dieses Mittel wäre nun selbst dasjenige, welches wir oben bey Gelegenheit der Branderischen Auflösung der Aufgabe des 187 §es beygebracht haben. Nur kan man vermittelst dieser Aufgabe, eine ganze Figur, auf dem Meßtische selbst nicht in ihrem Zusammenhange erhalten, sondern man muß ein anderes mit Papier überspantes Reisbrett mit sich führen, wo man die jedesmahl einzeln auf dem Meßtische bestimmten Punkte, von dem Meßtische abträgt, und sie in gehörige Verbindung mit den übrigen bringt.

Die Art dieses zu bewerkstelligen ist kurz diese.

Es stelle Q Fig. LXXVI ein Reisbrett vor. — So bald nun aus der Standlinie AB, die Objekte S, R, M, durch s, r, m auf dem Meßtische entworfen worden, so trage man die auf dem Meßtische bey Nro 2 befindliche Standlinie ab, auf das Reisbrett Q, fasse hierauf von dem Meßtische die Seiten am, bm, und bestimme, mit denselben auf dem Reisbrette Q, den Punkt m, indem man mit am, bm, aus den Punkten a, b, ein paar sich bey m durchschneidende Kreisbogen beschreibt; auf gleiche Weise werden die Punkte s, r, von dem Meßtische auf das Reisbrett Q gebracht.

Nun

Nun begebe man sich mit dem Meßtische und Reisbrette nach der Station Nro. 3; und ohne sich um etwas weiter zu bekümmern, ziehe man aus einem willkürlich auf dem Meßtische angenommenen Punkt c, nach S, R, M, Richtungslinien cv, cp, cq; fasse nun mit einem dreyfüßigten Zirkel von dem Reisbrette das Dreyeck srm, und trage es nach der Branderischen Methode §. 187 auf den Meßtisch Nro. 3 dergestalt, daß jeder Punkt s, r, m auf die den Objekten S, R, M entsprechende Richtungslinien cv, cp, cq zu liegen komme, so wird die Lage des Punktes c, gegen s, r, m, vollkommen bestimmt seyn. Man fasse nun von dem Meßtische Nro 3, zwo solchergestalt bestimmte Entfernungen sc, mc, und beschreibe damit, aus den zugehörigen Punkten s, m, auf dem Reisbrette Q, ein paar sich bey c durchschneidende Kreisbogen, so hat man den Punkt c von dem Meßtische, auf das Reisbrett getragen, und c auf dem Reisbrette wird dadurch auch zugleich seine richtige Lage gegen die Standlinie ab, bekommen. Nachdem auf eben die Art bey Nro. 4 aus einem willkürlichen Punkte d nach den Objekten S, R, M, Richtungslinien gezogen, und auf dieselben, vermittelst des dreyfüßigten Zirkels die Punkte s, r, m, getragen, und folglich die Weiten sd, rd, md, dadurch bestimmt worden, so beschreibe man wieder z. E. mit md, rd, auf dem Reisbrette, aus den Punkten m, r,

ein paar sich bey d durchschneidende Kreisbogen, so wird auf eben die Art d auf dem Reisbrette, nicht allein seine richtige Lage, gegen r, s, m, sondern auch gegen die bereits festgelegten Stationen a, b, c erhalten.

Und so erhellet wie man nach und nach, die Lage aller Punkte S, R, M, A, B, C, D, auf das Reisbrett Q, bringen könne; ob man gleich bey jeder einzeln Station, auf dem Meßtische nur diese Station für sich, und ohne Verbindung mit den übrigen erhält.

Es ist klar, daß man bey dieser Methode, weiter gar keine Richtung und Wendung des Meßtisches von Nöthen hat, als blos die Horizontalstellung desselben, und daß man dabey allen zufälligen Unrichtigkeiten der Magnetnadel ausweichet. Es scheinet zwar das wechselsweise Abtragen, der Richtungspunkte s, r, m von dem Reisbrette, auf den Meßtisch, und dann des bestimmten Punktes von dem Meßtische auf das Reisbrett, einigermaaßen weitläuftig zu seyn, allein ich kan versichern, daß dieses Verfahren einem einigermaaßen geübten, nicht viel weitläuftiger vorkommen wird, als die Richtung des Meßtisches nach der Magnetnadel, wo doch auch immer einige Zeit verfließet, ehe die Magnetnadel gehörig einspielet und in Ruhe kömt. — Auch werden einem geübten leicht verschiedene Vortheile

theile und Vorsichten einfallen, die ich der Kürze halber übergehen muß.

Sollen also Objekte oder Stationen auf dem Felde mit ungleich mehrerer Richtigkeit zu Papiere gebracht werden, als es vermittelst Gebrauchs der Magnetnadel geschehen kan, so wird man sich immer lieber der Branderischen Methode bedienen. Indessen, wo die auf dem Meßtische entworfenen Stationen nicht wieder zu neuen Richtpunkten dienen sollen, da ist der Gebrauch der Magnetnadel bequem und zureichend.

Fehler welche daher entstehen, wenn man die Richtungen der Magnetnadel, an unterschiedenen Orten, als parallel annimt.

§. 236. 1. Die Voraussetzung, worauf sich das bisherige gründet, nemlich, daß die Richtungen der Magnetnadel völlig genau parallel sind, ist eigentlich nur beynahe wahr, kan aber ohne großen Fehler angenommen werden, sobald die Oerter auf der Erdfläche nicht gar zu weit von einander liegen. Hingegen, je mehr die Oerter auf der Erdfläche von einander entfernt sind, oder vielmehr je größer der Unterschied ihrer Mittagskreise ist (§. 117. IV) desto mehr müssen auch die Richtungen der Magnetnadel von ihrer parallelen Lage abweichen. — Und wenn daher, an

einem gewissen Orte, auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel gezogen worden ist, und man an einem andern, von dem ersten ziemlich weit entfernten Orte, den Meßtisch nach der darauf gezogenen Richtung wieder stellen wolte, so würde solcher an der letztern Station, nicht mehr ohne einigen Fehler zu begehen, eine parallele Lage, mit der am ersten Orte gehabten Lage erhalten, mithin würden auch die aus letzterer Station entworfenen Punkte, nicht mehr ihre richtige Lage, gegen die aus der ersten Station des Meßtisches entworfenen Punkte erhalten.

2. Um das bisherige mehr ins Licht zu setzen, und zu sehen, auf welche Art man verfahren müste, wenn es nöthig wäre, den Fehler zu verbessern, der aus der Voraussetzung, daß die Richtungen der Magnetnadel gleichlaufend sind, herrührte, so wollen wir noch kürzlich folgende Betrachtungen beyfügen.

3. Es seyen Fig. LXXVIII A, D zween Oerter auf der Erdfläche, und Aa, Dd, deren Mittagslinien, die man ohne merklichen Fehler, in einer einzigen Ebene annehmen kan, so lange das Stück Erdfläche zwischen A und D, keine merkliche Krümmung hat.

4. Weil nun die Erfahrung lehret, daß die Declination der Magnetnadel, auch an Oertern die z. E. 10 und mehrere Meilen von einander liegen,

liegen, ohne großen Irrthum einerley ist, so werden, wenn $A\mu$, $D\nu$, die Richtungen der Magnetnadel an solchen Oertern vorstellen, die Winkel oder Abweichungen $aA\mu$, $dD\nu$, ohne Irrthum einander gleich seyn.

5. Unter welchen Umständen man also die Mittagslinien Aa, Dd, als parallel ansehen kan, unter eben den Umständen, kan man auch, wegen der gleich großen Winkel μAa, νDd, die Richtungen der Magnetnadel $A\mu$, $D\nu$, als gleichlaufend betrachten. —

6. Diese Umstände sind, wenn A, D, ziemlich nahe neben einander liegen.

7. Nun ist aber aus der Geographie bekant, und es läst sich durch eine leichte Rechnung zeigen, daß wenn der Abstand der beyden Mittagslinien Aa, Dd, wenige Meilen beträgt, die Abweichung der Mittagslinien von ihrer parallelen Lage, schon merklich wird, und dies rühret daher, weil sich dieselben gegen den Pol zu neigen.

8. Man stelle sich durch D, mit $A\mu$, Aa, die parallelen $D\lambda$, $D\alpha$, vor, so ist klar daß der kleine Winkel $dD\alpha$ die Abweichung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, von der parallelen Lage, ausdrücken werde.

9. Auch erhellet, daß, wegen der gleichgroßen Winkel νDd, $\lambda D\alpha$, der kleine Winkel $\nu D\lambda = dD\alpha$ seyn werde, mithin die beyden Richtungen der Magnetnadel $A\mu$, $D\nu$, von der parallelen Lage so viel abweichen werden, als die beyden Richtungen der Mittagslinien Aa, Dd, davon abweichen.

10. Gesetzt nun an dem Orte A, sey die Messung einer Gegend angefangen, und auf dem Meßtische daselbst, die Richtung der Magnetnadel $A\mu$ gezogen worden, so wird diese $A\mu$ in die Lage $D\nu$ kommen, wenn man an dem Orte D, die Magnetnadel über der bey A auf dem Meßtische erhaltenen Nordlinie einspielen lässet. Aber der solchergestalt nach $D\nu$ eingerichtete Meßtisch, wird keine parallele Lage, mit der bey der Station A gehabten Lage erhalten, weil $D\nu$, nicht mit $A\mu$ gleichlaufend ist. Man müste eigentlich an $D\nu$, oder an die bey der ersten Station des Meßtisches gezogene Nordlinie, den kleinen Winkel $\nu D\lambda$ setzen, der so groß wäre, als der $dD\alpha$, oder als die Neigung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, gegeneinander, und müste alsdann die Magnetnadel über der Linie $D\lambda$ einspielen lassen, um den Meßtisch bey D, mit dessen gehabten Stande bey A, parallel zu stellen.

11. Solchergestalt ließe sich an jedem Orte D gar leicht der correkte Stand des Meßtisches erhalten,

halten, wenn man nur den kleinen Winkel $\gamma D \lambda$ oder $dD\alpha$ wüste.

Diesen in jedem Falle zu berechnen dient folgendes.

12. Man fälle von D auf die Mittagslinie durch A, eine perpendiculäre $D\delta$, und durch A, AL mit $D\delta$ parallel, so sind $D\delta$, AL, als Stücken der Parallelkreise anzusehen, in denen die Oerter A, D, liegen, und $A\delta$ ist der Abstand dieser Parallelkreise, mithin der Unterschied der Breiten (§. 117. VI) der Oerter A, D.

Man nenne $A\delta = b$, $D\delta = a$; man kan wie ich hernach zeigen werde, b, a, als gegebene Grössen ansehen.

AK, $D\delta$, sind Stücke von Parallelkreisen, zwischen zweenen Mittagskreisen; weil nun A näher beym Pole als D angenommen wird, oder weil die geographische Breite von A um $A\delta$, größer ist, als die geographische Breite von D, so ist aus der Natur der Parallelkreise leicht einzusehen daß AK kleiner seyn müsse als $D\delta$ und zwar in dem Verhältniß, in welchem der Halbmesser des Parallels AK, kleiner ist als der Halbmesser des Parallels $D\delta$.

Aber aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur läst sich gar leicht darthun, daß die Halbmesser

messer der Parallelkreise, sich wie die Cosinusse, der Breiten verhalten. — Nennt man also die Breite des Orts A = β, mithin die Breite des Orts D = β — b (wo man die Entfernung b (12) in einen Bogen verwandeln muß) so ist

$$AK : D\delta = \cos\beta : \cos(\beta - b) \text{ also}$$

$$AK = \frac{\cos\beta \cdot D\delta}{\cos(\beta - b)}$$

13. Hat man nun vermittelst dieser Proportion AK gefunden, so hat man auch den Unterschied $D\delta - AK = AL - AK = KL$, und in dem kleinen rechtwinklichten Dreyecke KDL findet man aus der berechneten KL, und der gegebenen LD oder $A\delta$, gar leicht den kleinen Winkel KDL, also die Abweichung der beyden Mittagslinien Dd, Aa, von der parallelen Lage, mithin auch die Abweichung der Nordlinien $A\mu$, $D\nu$ von der parallelen Lage.

14. Man braucht aber, um bey D den correcten Stand des Meßtisches zu erhalten den kleinen Winkel KDL nicht würklich zu berechnen, sondern verfährt kurz auf folgende Art. Man nehme auf der Nordlinie $D\nu$ des Orts D, eine Länge $Dr = DL = A\delta$, und setze durch r, auf $D\nu$, eine kleine Perpendiculärlinie ri, so groß als die berechnete KL (13) ziehe durch D und i eine gerade Linie $D\lambda$, so ist auf dem Meßtische diese $D\lambda$ diejenige Richtung, über der man die

Magnet-

Magnetnadel einspielen lassen muß, um bey D den Meßtisch, mit der bey A gehabten Lage parallel zu stellen.

15. Wir müssen nun noch zeigen wie man die in obiger Rechnung gebrauchten Größen Aδ, Dδ, wenigstens so genau, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist, bestimmen könne.

16. Man stelle sich vor, A, D, seyen mit den Oertern A, D der LXXVI Figur einerley, a, d Fig. LXXVI. Nro. 4, seyen die nach dem 233 §. entworfenen Oerter A, D;

Ob nun zwar gleich die Station d nicht ihre vollkommen richtige Lage auf dem Meßtische haben wird, weil man bey Nro. 4 den Meßtisch nach der bey Nro. 1 gezogenen Richtung der Magnetnadel μν eingerichtet hat, mithin der Meßtisch bey Nro. 4 nicht eine vollkommen parallele Lage mit Nro. 1 hat, so wird doch der Punkt d, so genau auf dem Meßtische Nro. 4 bestimmt seyn, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist.

Man stelle sich also durch a mit der an dem Orte A gezogenen Nordlinie μν, eine parallele ai vor, (welches bloß deswegen geschiehet damit die Nordlinie des Orts A, selbst durch den, den Ort A vorstellenden Punkt a gehe). Man setze an ai die Abweichung der Magnetnadel des Orts A, der-

dergestalt, daß ap die Mittagslinie des Orts a vorstelle. Man fälle nun von d auf ap eine Perpendiculärlinie do, so werden die Entfernungen ao, do, auf dem Meßtische nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die Weiten A♂, D♂ der LXXVIII Figur so genau als nöthig ist, ausdrücken.

17. Nur ist nöthig daß man die gemessene ao, oder A♂, als den Unterschied der geographischen Breiten beyder Oerter A, D, in einen Bogen verwandele.

Dies geschiehet auf folgende Art;

Weil ein Grad auf dem Mittagskreise Aa Fig. LXXVIII nach (§. 189) 57107,5 paris. Toisen hält, so schliese man, wie 57107,5 Toiſ. zu der gemessenen Weite A♂ in Toisen, so verhält sich 1 Grad oder 60 Minuten, zu der Anzahl von Minuten, welche auf die gemessene Weite A♂ gehen, und diese gefundene Zahl von Minuten wird alsdenn bey der Berechnung (12) statt des Werthes b gesetzt.

18. Die geographische Breite, oder Polhöhe des Orts A, von dem die Messung angefangen wird, muß übrigens auch ohngefähr, aus einer guten Landkarte, oder sonst irgend woher bekant seyn.

19. Es verstehet sich übrigens, daß man auch wissen müsse, ob in (14) das Perpendikel ri nach Osten zu, wie hier in der Figur, oder nach Westen zu, an die Nordlinie Dv gesetzt werden müsse; dies entscheidet sich aber gar leicht daraus ob der Ort D östlicher oder westlicher als A liegt.

20. Solchergestalt würde es in jedem Falle nicht schwer seyn, die correcte Stellung des Meßtisches zu erhalten.

Im Grunde glaube ich aber immer, daß es unnöthig ist, beym Gebrauche der Magnetnadel, auf die Abweichung derselben von der parallelen Lage zu sehen. — Denn im Ernste wird man doch wohl nicht mit dem Meßtische, sich so weit von dem ersten Standorte A, wo man auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel gezogen hatte, entfernen, daß es nöthig seyn solte, die Abweichung der Magnetnadel von der parallelen Richtung in Erwegung zu ziehen, da ohnedem aus andern Ursachen der bloße Gebrauch der Magnetnadel, zu größern Fehlern Gelegenheit geben kan, als diejenigen sind, die etwa aus den parallel angenommenen Richtungen der Magnetnadel zu befürchten stehen. Es ist also am besten, daß man die an einer gewissen Station auf dem Meßtische gezogene Richtung der Magnetnadel nicht länger gebraucht, als es

ohne

ohne einen merklichen Fehler zu begehen, verstattet ist, d. h. daß man sich von der ersten Station etwa nicht weiter als höchstens um $\frac{3}{4}$ einer Meile entfernet, und alsdann, anstatt daß man an jedem über diese Gränze hinausliegenden Orte eine Correction nach (14) vornehmen müste, lieber eine neue Standlinie annimmt, an ihr eine neue Richtung der Magnetnadel ziehet, und vermittelst derselben die Messung weiter fortsetzt. Auf solche Art kan man theils die Rechnungen ersparen, die man sonst nach (15) vornehmen müste, theils auch hat man sich ungleich mehrere Richtigkeit zu versprechen, als wenn man sich nur an eine einzige Standlinie binden, und sich der an ihr gezogenen Richtung der Magnetnadel auf eine große Strecke bedienen wolte.

Uebrigens werde ich in der Folge mit mehreren erwähnen, unter welchen Umständen man sich des bisher gelehrten Gebrauchs der Magnetnadel vorzüglich zu bedienen habe.

21. Den Gebrauch der Magnetnadel zur topographischen Aufnahme eines Landes hat vorzüglich Hr. Kap. Hogreve in seiner Anweisung zur topographischen Vermessung eines Landes bekant gemacht, und durch gut gewählte Beyspiele erläutert. — Er hat in dieser nützlichen Schrift eine gute Probe seiner nicht gemeinen Einsichten in die ausübende Geometrie abgelegt.

Auf-

Aufgabe.

§. 237. Eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn man sich der beym Gebrauch der Zollmannischen Scheibe gewöhnlichen Methode dazu bedienen will.

Aufl. Um von dieser Methode kurz einen Begrif beyzubringen, so sey Fig. LXXIX das Viereck ABCD aus dessen Umfange zu entwerfen.

I. Man bringe den Meßtisch über A, und bestimme auf demselben den Punkt m, der lothrecht über A liegt. Lege an m genau das Diopterlinial, visire nach den Objekten B, D, ziehe durch m die dahin gerichteten Linien qx, py, und bezeichne dieselben, mit den dabey geschriebenen Zahlen 1, 1; 2, 2;

Man mache auch auf die gezogenen Richtungen 1, 1; 2, 2; bey x, y, ein paar Merkmahle, um anzudeuten, daß von den gezogenen Richtungen qx, py, es eigentlich die Stücken mx, my, sind, die aus m nach den Objekten D, B, hinlaufen, oder daß die Objekte D, B, eigentlich nicht auf den Schenkeln mq, mp, sondern auf denen mx, my, liegen müssen; diese Vorschrift beobachte man an jeder folgenden Station.

Nun messe man die Weite AB, die der Richtungslinie 2, 2, zugehört, und schreibe sie in ein bey sich zu führendes Protocoll.

II. Man bringe ferner den Meßtisch über B, so, daß der Punkt m (I) über B, und die Linie 2,2; wieder längst BA zu liegen komme, lege hierauf an m wieder das Diopterlinial, visire nach C, ziehe die dahin gehende, mit den Zahlen 3,3, zu bemerkende Richtung, und mache auf dieselbe bey v ein Zeichen, nach der Vorschrift (I).

III. Nachdem nun die Weite BC gemessen worden, so bringe man den Meßtisch über C, und verfahre wie in (II) an der Station B, dergestalt, daß vermittelst der mit 4, 4, bezeichneten Richtung, der Winkel DCB auf dem Meßtische erhalten werde.

IV. Es erhellet leicht, daß man durch Fortsetzung dieser Arbeit eigentlich jeden Winkel am Umkreise der Figur, auf den Meßtisch an den Punkt m bringt.

Es kömt nun darauf an, aus den Winkeln auf dem Meßtische, und den gemessenen Seiten der Figur ABCD, diese Figur vollkommen auszuzeichnen.

Dieses geschiehet am bequemsten auf folgende Art.

VI. Man schneide das Papier behutsam von dem Meßtische herunter, und klebe es etwa an vier Stellen sorgfältig mit Mundleim, auf das Blatt Papier Q, worauf die Figur ABCD entworfen wer-

werden soll, dergestalt, daß das von dem Meßtische abgenommene Papier glatt und ohne Beulen, auf das untere Blatt Papier Q zu liegen komme.

a sey nun auf diesem Papiere der Punkt, der den A auf dem Felde vorstellen soll.

Man ziehe durch a mit denen auf dem angeklebten Blatt Papiere befindlichen Richtungen 1,1; 2,2; ein paar Parallellinien ad, ab; nach der (§. 64) gewiesenen Methode, vermittelst eines Linials und rechtwinklichten Dreyecks; dergestalt aber, daß ad, ab, aus dem Punkte a nach eben den Richtungen laufen, wie die aus dem Punkte m ausgehenden Stücken mx, my; (I) wozu die auf den Richtungen 1,1; 2,2; bezeichneten Punkte x, y; dienen, so ist der Winkel DAB auf dem Felde, durch dab auf dem Risse entworfen, oder DAB = dab;

Die gemessene Weite AB (I) trage man auf den mit 2,2, parallel gezogenen Schenkel des Winkels dab, von a nach b;

Hierauf ziehe man mit 3,3, durch b eine parallele bc nach der Richtung, nach welcher der auf 3,3; bezeichnete Punkt (II) hinfällt, so hat man den Winkel ABC auf dem Felde, durch abc auf dem Papiere.

Nachdem man endlich die gemessene Weite BC von b nach c getragen, und durch c, mit 4,4, nach der bisherigen Vorschrift eine parallele gezogen, so erhält man auf dem Papiere die Figur abcd, welche der ABCD auf dem Felde ähnlich seyn wird.

Solchergestalt unterscheidet sich dieses Verfahren von dem (§. 222) in weiter gar nichts, als daß man zu Hause erst die Figur zu Papiere bringt, anstatt daß man sie dorten unmittelbar auf dem Meßtische erhielt.

Es ist die Bequemlichkeit dabey, daß man zu Hause die Figur nach einem ziemlich grossen, und der Absicht gemäßen Maaßstab verzeichnen kan, anstatt daß man, wenn die Figur sogleich auf den Meßtisch kommen soll, oft genöthigt ist, einen sehr kleinen Maaßstab anzunehmen.

Wenn der Punkt m ohngefähr in der Mitte des Meßtisches angenommen wird, so erhalten die an m gezeichneten Winkel, ziemlich lange Schenkel, welches demnächst der Richtigkeit im Abschiehen der Parallellinien 1,1; 2,2; u. s. w. desto vortheilhafter ist.

Wenn es der Raum auf dem Papiere Q, welches eigentlich auf einem großen Reißbrette aufgezogen seyn muß, nicht verstattet, das ganze Papier von dem Meßtische auf das Reißbrett zu kleben,

kleben, so kan man nur ein Stück von dem Papiere des Meßtisches, das man aus der Mitte m von etwa 5 Zollen im Durchmesser ausschneidet, auf das Reißbrett Q kleben und an einer schicklichen Stelle befestigen. Man muß aber dabey sorgfältig seyn, daß die an die Schenkel geschriebenen Zahlen und Zeichen nicht verlohren gehen.

Das geschickte und fertige Abschieben der Linien auf dem aufgeklebtem Blatt Papiere, an die Winkelpunkte der zu entwerfenden Figur abcd, erfordert einige Uebung und Aufmerksamkeit, wenn man sich nicht dabey irren will.

Uebrigens müssen das Dreyeck und Linial, womit die Parallellinien abgeschoben werden, ziemlich groß seyn, wenn die Arbeit geschwind von statten gehen soll.

Das Verfahren in dieser Aufgabe ist sonst völlig dasjenige, dessen man sich beym Gebrauch der sogenannten Zollmannischen Meßscheibe bedient; und da die runde Gestalt der Scheibe dabey nichts ändert, so habe ich gezeigt, wie der bloße Meßtisch zu eben der Absicht dienet. — Ich glaube aber daß der Meßtisch weit geschickter dazu ist, weil sich das Papier ungleich fester und besser auf demselben aufziehen läst, als auf einer runden Scheibe.

Die übrigen hieher gehörigen Bemerkungen habe ich schon im 1sten Theile (§. 116) beygebracht.

Wie man die Aufgaben des 220, 222, und 231 §. vermittelst des Astrolabii auflösen könne.

§. 238. Ich habe mich bey diesen Aufgaben vorzüglich des Meßtisches bedient, und es läßt sich leicht begreifen, daß wenn man die in diesen Aufgaben vorkommenden Winkel mit dem Astrolabio misset, alsdenn zu Hause gleichfalls die Figuren aufgetragen werden können. — Indessen muß ich aber die Errinnerung beyfügen, daß die Aufgaben des 220 und 222 §es, sich immer bequemer vermittelst des Meßtisches als des Astrolabii auflösen lassen, theils, weil die Fälle, bey denen diese Aufgaben pflegen angewandt zu werden, beym Gebrauche des Astrolabii ein zu weitläuftiges Diarium erfordern, theils vorzüglich auch deswegen, weil bey diesen Aufgaben selten sehr große Linien vorkommen, und daher immer füglich auf dem Meßtische bewerkstelligt werden können. — Hingegen ist aber bey der Aufgabe des 231 §es das Astrolabium in dem Falle unumgänglich nothwendig, wenn dieselbe bey der Entwerfung der Hauptpunkte einer ganzen Landschaft, mit gehöriger Richtigkeit ausgeübt werden soll; und man sich also dessen bedienen will, das sogenante Netze oder Gerippe

rippe einer Landschaft zu bestimmen. Denn da bey so großen Vermessungen, die Standlinien und Standpunkte oft ziemlich weit von einander liegen, und auch selbst die Entfernungen der vornehmsten Objekte einer Landschaft z. B. Dörfer, Städte, Bergspitzen, u. s. w. oft sehr groß sind, so würde man sich vergeblich des Meßtisches zu deren Entwerfung bedienen, weil, wenn diese Objekte auf den Meßtisch kommen solten, man den verjüngten Maaßstab gar zu klein annehmen müste, und dieses, nebst vielen andern Ursachen, keine große Genauigkeit verstatten würde. Ich will also in nachstehender Aufgabe noch die nöthigen Bemerkungen beyfügen, die dem Gebrauche des Astrolabii eigen sind.

Aufgabe.

§. 239. **Die Aufgabe des 231 Hes vermittelst des Astrolabii auflösen.**

Aufl. Man verfährt mit mehreren Objekten A, B, C, D, E Fig. LXXX auf eine ähnliche Art, wie in §. 184 mit zweyen Objekten verfahren worden ist.

Wenn nemlich F, G, die Standpunkte sind, mithin FG die Standlinie bezeichnet, aus der die Objekte A, B, u. s. w. entworfen werden sollen, so bringe man das Astrolabium erstlich über G, stelle es horizontal, und den Inder des Vernier

auf o°. Wende demnächst das ganze Werkzeug bis das auf o° gestellte Fernrohr, genau nach dem Standpunkte F hingerichtet ist.

In dieser Lage befestige man das Werkzeug, lasse es unverrückt, und fange nun an, durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel das Fernrohr nach der Ordnung, nach den Objekten A, E, D, C, B zu richten.

Man bemerke bey jeder Richtung des Fernrohres die Anzahl von Graden und Minuten, die der Index auf dem Rande weiset, und schreibe sowohl den Nahmen der Objekte, als auch die Anzahl von Graden u. s. w. auf, welche man bey jeder Richtung des Fernrohres gefunden hat völlig so wie (§. 132) gezeigt worden ist.

Man zeichne übrigens auch die Nahmen der beyden Stationen G, F auf, und bemerke in dem Diario, daß der Index des Vernier, bey der Richtung des Fernrohrs nach F, auf o° gestellet worden.

Es verstehet sich, daß während der ganzen Arbeit, die Ebene des Randes, in unverrückter Lage erhalten werden muß; daher man also, die Prüfungs- und Versicherungsmethoden des 131 stes zu beobachten hat.

An

An der Station F verfähret man nun auf dieselbe Art, wie bey der Station G verfahren worden. Man stellet das Werkzeug wieder so, daß das nach G gerichtete Fernrohr abermahls 0° weiset. — Visiret nun nach D, C, B, A, E, und schreibt in dem Diario neben die Nahmen dieser Objekte, die jedem Objekte entsprechende Anzahl von Graden und Minuten;

Die Standlinie FG, kan nun entweder unmittelbar, oder aus einer anderen Standlinie (§. 184) bestimt seyn.

Um das bisher beygebrachte, und das folgende desto besser zu übersehen, so will ich setzen, in das Verzeichnis seyen die Winkel auf folgende Art eingetragen worden

Station G		Station F	
Gegenstände	der Index weiset	Gegenstände	der Index weiset
F	0° . 0′	G	0° . 0′
A	24 . 18	D	38 . 21
E	138 . 18	C	63 . 2
D	251 . 40	B	104 . 4
C	288 . 56	A	238 . 10
B	325 . 28	E	342 . 25

In diesem Verzeichnisse, folgen die Gegenstände nebst dem zugehörigen Stand des Index, in der Ordnung auf einander, wie sie nach und

nach, bey Umdrehung der Alhidadenregel, in das Fernrohr kommen. Es ist dabey zum voraus gesetzt, daß nach der Einrichtung des §. 99 beschriebenen Winkelmessers, die Gradabtheilungen, von der linken Hand gegen die rechte gezählet werden, und daß an jeder Station die Alhidadenregel, so gedrehet wird, daß der Index sich auf dem Rande, nach der Ordnung der Grade fortbeweget.

Wenn also z. E. bey G, das nach F gerichtete Fernrohr φf, bey φ auf $0°$ stehet, so werden die Grade auf dem Rande, nach der Richtung $\varphi dcbfae\varphi$ gezählet, und wenn folglich das Fernrohr φf nach dieser Richtung gedrehet wird, so werden die Gegenstände, nach folgender Ordnung F, A, E, D, C, B, in dasselbe kommen, und der Index wird bey jeder Richtung des Fernrohrs, die in dem Verzeichnisse angegebenen Grade und Min. weisen.

Auf eben die Art verhält sich die Sache bey der Station F, wo das nach G gerichtete Fernrohr γg, nach der Richtung $\gamma aedcb\gamma$ gedrehet wird.

Zus. I. Hieraus wird also erhellen, wie man aus denen in dem Verzeichnisse angegebenen Datis, die spitzen oder stumpfen Winkel finden könne, die in den Dreyecken FGD, FCG u. s. w. sich an der Standlinie FG befinden.

Er-

Ex. Für das Objekt D zeigt der Inder
an der Station G; 251°. 40′
an der Station F; 38°. 21′.

Dies heist soviel: Anfangs bey des Fernrohrs φf Richtung nach F stand der Inder bey φ auf 0°; nachdem nun das Fernrohr nach der Richtung φcbad herumgedrehet worden, und die Richtung δd nach dem Objekte D erhalten hat, so hat der Inder des Vernier auf dem Rande, den Bogen φcbfad = 251°. 40′ durchlaufen. Also ist 360° — 251°. 40′ = dem Bogen δcφ = dem Maaße des Winkels δGφ oder FGD. Also FGD = 108°. 20′

Auf eben die Art stand an der Station F der Inder bey γ auf 0°, das Fernrohr wurde nach der Richtung γagdcb gedrehet, und nachdem es aus der Richtung γg, in die Richtung δd D gebracht worden, so zeigte der Inder bey δ, den durchlaufenen Bogen γδ = 38°. 21′, = dem Maaße des Winkels γFδ = DFG.

Solchergestalt hätte man also in dem Dreyecke FGD, die Winkel DFG, DGF, an der Standlinie. Auf gleiche Weise ist bey den Dreyecken FCG, FAG u. s. w. zu verfahren.

Zus. II. Es erhellet also, daß in dem obigen Verzeichnisse der Stand des Inder nur

in

in dem Falle, sogleich den Winkel geben wird, den an jeder Station, ein Objekt mit der Standlinie macht, wenn der Index weniger als 180° weiset; zeigt er darüber, so muß man, um den Winkel zu erhalten, die Ergänzung zu 360° nehmen. Also wären für das Objekt E, die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18′ und 360° — 342° . 25′ oder 17° . 35′; wo FGE = 138° 18; GFE = 17° . 35′;

Zus. III Wenn man sich bey der Station G einen Beobachter vorstellet, der durchs Fernrohr φf nach der Station F visiret, so liegen diesem Beobachter, die Gegenstände A, E, linker Hand der Standlinie GF. Wenn nun wie bisher zum vorausgesetzt worden, das Fernrohr nach der Richtung φcbf gedrehet wird, so kommen diejenigen Gegenstände A, E, die sich linker Hand der Standlinie befinden zuerst in das Fernrohr, und für alle diese Gegenstände, zeigt der Index weniger als 180°. Für Gegenstände, die rechter Hand der Standlinie liegen wie, D, C, B; zeigt der Index über 180°.

Eben so verhält sich die Sache für einen Beobachter der am Stande F, durchs Fernrohr γg, nach G zurückvisiret. Dem liegen aber alsdann die Gegenstände D, C, B, linker Hand der Standlinie FG, und A, E rechter Hand derselben.

Zus.

Zuf. IV. Diese Betrachtungen Zuf. III. dienen, in jedem Falle aus dem Verzeichnungsregister zu sehen, welche Objekte, in Absicht eines Beobachters, der nach der Richtung GF, oder FG sähe, linker oder rechter Hand der Standlinie FG liegen.

Ex. Für den Punkt E, sind in dem Dreyecke FGE (II Zuf.) die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18 und 17° . 35′ gefunden worden. Aber dieses Dreyeck liegt für einen Beobachter der bey G nach der Richtung GF visirte, linker Hand der Standlinie, weil an der Station G, in dem Verzeichnungsregister, für das Objekt E der Stand des Index = 138° 18′ ist, also weniger als 180° beträgt (III Zuf.)

Zuf. V. Diese Betrachtungen sind nothwendig, wenn man sich, bey Verzeichnung der Objekte, vermittelst der Dreyecke FGE, FGD u. s. w. nicht irren will, und alle Objekte A, E, D u. s. w. ihre richtige Lage sowohl gegen die Standlinie, als auch unter sich, erhalten sollen.

Zuf VI. Nach diesen Vorbereitungen wird es nun nicht schwer seyn, vermittelst der nach (Zuf II) an der Standlinie FG gefundenen Winkeln eines jeden Dreyecks, und der gemessenen Standlinie FG, diese Dreyecke FBG, FCG u. s. w. auf dem Papiere selbst, zu ver-

verzeichnen, mithin die Objekte B, C, u. s. w. gehörig zu entwerfen.

Man kan sich, nachdem man mehr oder weniger genau verfahren will, entweder des Transporteurs bedienen, vermittelst dessen man z. E. für den Gegenstand E die Winkel GFE, FGE an die Standlinie trägt, oder, man sucht aus diesen Winkeln und der Standlinie die Seiten FE, GE, und beschreibt vermittelst ihrer das Dreyeck FGE, oder man berechnet aus diesen Größen die Perpendicularlinien GL, EL, (§. 184 IV Aufl.) und trägt sie gehörig aufs Papier. Da ich alles hieher gehörige schon bereits im vorhergehenden bey Gelegenheit der Aufgabe (§. 184) aus einander gesetzt habe, so würde ich meinen Lesern beschwerlich fallen, alles dieses noch einmahl zu wiederhohlen. Uebrigens errinnere ich hier nur noch dieses, daß es, um der Einbildungskraft desto mehr zu Hülfe zu kommen, immer vortheilhaft ist, sich vermittelst der gefundenen Winkel an der Standlinie, nur erst einen rohen Entwurf, von der Lage der Objekte B, C, u. s. w. auf dem Papiere zu verfertigen, und sich allenfalls nur blos des gemeinen Transporteurs dazu zu bedienen. — Man wird alsdenn durch dieses Hülfsmittel einen desto deutlichern Begrif von allem erhalten, und sich selbst alsdenn bey der Berechnung der Seiten, oder Perpendicularlinien wie GL, EL, in Absicht ihrer Lage ꝛc. vieles Nachdenken ersparen

und

und den richtigern Entwurf demnächst mit desto leichterer Mühe verfertigen können.

XIX. Kapitel.

Noch einige Anwendungen des bisher beygebrachten, in Absicht der Methoden, deren man sich bedienen kan, perpendiculäre und parallele Linien auf dem Felde zu ziehen, gerade Linien abzustecken, und eine Figur auf dem Meßtische auf das Feld abzutragen u. s. w.

Aufgabe.

§. 240. Durch einen gegebenen Punkt C Fig. XXXV; mit einer vorgegebenen Linie AB eine parallele zu ziehen.

Aufl. I Fall. Wenn man von C nach zween Punkten A, B dieser Linie hinmessen kan.

Man messe CA, CB, bringe den Meßtisch über C, ziehe die Richtungen cm, cn, nach A und B, und nehme auf denselben Ca, Cb, denen CA, CB gemäß, so wird ab auf dem Meßtische mit AB parallel seyn; man ziehe mit ab, durch c eine

eine parallele, (§. 64) lege an dieselbe die dioptrische Regel, so wird man in der Richtung der Dioptern, Stäbe, mithin eine gerade Linie oder Verticalebene abstecken lassen können, welche mit der AB parallel seyn wird.

II Fall. Durch D Fig. XL eine parallele mit AB zu ziehen, wenn man von D, nirgends nach AB hinkommen kan.

Man nehme eine willkürliche Standlinie CD an, und verfahre nach §. 184, als wenn man die unzugängliche Weite AB finden wolte.

Weil nun am Ende der Operation, die Weite ab auf dem Meßtische, der AB nicht allein gemäß, sondern auch parallel wird (§. 184 Zus.), so ziehe man demnächst bey unverrücktem Stand des Meßtisches, durch den lothrecht über D liegenden Punkt d, eine parallele mit ab, lege an dieselbe das Diopterlinial, und lasse in der Richtung der Dioptern, Stäbe abstecken, so wird eine gerade Linie durch sie, mit AB gleichlaufend seyn.

Zus. I. Es erhellet, daß vermöge der Aufgaben des XV Kapitels die Ziehung der Parallellinien auf dem Felde noch auf unterschiedene andere Arten bewerkstelliget werden kan. — Ich will aber diese Untersuchungen meinen Lesern selbst überlassen. Man kan sich auch oft der Magnetnadel mit Vortheil zu dieser Absicht bedienen.

Zus.

Zus. II. Wenn man auf ab Fig. XL eine Perpendiculärlinie fällt, und hierauf an diese Perpendiculäre das Dioptrlinial legt, so kan man in der Richtung dieser Dioptern Stäbe aussetzen lassen, die in einer geraden Linie liegen werden, welche auch auf AB senkrecht stehet: So kan man also auf eine Linie AB auf dem Felde eine Perpendiculärlinie ziehen, wenn man gleich nicht an diese Linie kommen kan.

Es erhellet, daß man auf AB eine Linie setzen könne, die jeden willkürlichen Winkel mit AB macht, wenn man nur diesen Winkel an ab auf den Meßtisch trägt, und wie beym rechten Winkel verfährt.

Es verstehet sich, daß während der ganzen Arbeit der Meßtisch in unverrückter Lage erhalten werden müsse, damit ab nicht aus der mit AB parallelen Lage komme.

Zus. III. An eine Linie CD an die man kommen kan, einen beliebigen Winkel CDB zu setzen, so verzeichne man diesen Winkel auf dem Meßtische, so daß cdb = CDB. Bringe d lothrecht über D, und die Richtung dc längst DC, so kan man längst des an db gelegten Dioptrlinials hinaus visiren, und in die Richtung db Stäbe absetzen lassen; mithin die gerade Linie DB bestimmen, die mit CD den gegebe-

nen Winkel CDB macht. Dies Verfahren heist, einen Winkel auf dem Felde abzustecken, und wird bey Theilung der Felder gebraucht.

§. 241. Aufg. Zwischen A und E Fig. LXXXI Stäbe in eine gerade Linie abzustecken, wenn man gleich von A nicht nach E hinsehen kan, und sich auch zwischen A und E keine Punkte annehmen lassen von denen man A oder E sehen könte, wie wenn z. E. zwischen A und E sich ein Wald befände.

Aufl. Wenn man von A gleich nicht in gerader Richtung nach E kommen kan, so wird man doch durch Umwege, wie durch ABCDE vorgestellet ist, nach E kommen können. ABCDE könte z. B. einen Weg bedeuten der von A nach E durch den Wald gienge.

Da man solchergestalt sich eine Figur ABCDE gedenken kan, von der die gerade Linie AE eine Seite ist, und da man diese Figur, von A nach E, nach der Richtung ABCDE umgehen kan, so bediene man sich der Aufgabe des 222 §, und bringe diese Figur ABCDE zu Papiere, dergestalt daß die Punkte a, b, c, d, e auf dem Meßtische die Stationen A, B, C, D, E, vorstellen; da man nun, ohne längst AE würklich visiret zu haben, demohnerachtet, die Länge und Lage dieser Linie auf dem Meßtische erhält, in-

dem

dem man die Punkte A, B, C, D, E, durch a, b, c, d, e, auf dem Papiere entworfen hat, und auf dem Meßtische durch die beyden Punkte a, e, eine gerade Linie ziehet, so erhellet, weil der solchergestalt erhaltene Winkel bae dem BAE gleich ist, daß man nur nöthig habe, den Meßtisch mit der darauf befindlichen Figur abcde über A zu bringen, den Punkt a über A, und die Linie ab längst AB einzurichten; dann wird das auf dem Meßtische längst ae angelegte Diopterlinial die Richtung AE bestimmen, nach der man durch den Wald Stäbe n, m abstecken lassen muß, um von A nach E in gerader Linie hinzukommen.

Es ist klar, daß man, um die gerade Linie durch den Wald verlängern zu können, diejenigen Bäume, oder Büsche, auf die die Richtung der Dioptern trift, niederhauen, oder umbiegen müsse. Und wenn nur erst ein paar Stäbe m, n, in die Richtung der Dioptern abgesteckt worden sind, so wird man demnächst die Dioptern nicht mehr nöthig haben, sondern die gerade Richtung Anm, bloß wie gewöhnlich verlängern können (§. 32).

So wird z. E. diese Aufgabe gebraucht, wenn von einem Orte A nach einem andern E, eine Allee oder eine Strasse durch den Wald gehauen werden solte.

Man siehet aber leicht, daß diese Aufgabe in allen den Fällen gebraucht werden kan, wo von einem Orte nach einem andern eine gerade Linie abgestecket werden soll, die man auf keinerley Weise nach den gewöhnlichen Arten §. 32 abstecken kan.

Uebrigens ist klar, daß je weniger Umwege man nöthig hat, von A nach E zu kommen, desto richtiger die Arbeit ausfallen werde. Weil man alsdenn, bey Entwerfung des Umweges ABCDE, nicht so viel Winkel und Seiten auf den Meßtisch zu bringen hat, und sich folglich desto wenigern Fehlern aussetzet.

Verschiedene Schriftsteller bedienen sich bey dieser Aufgabe auch der Bousole. — Man erhält aber dadurch nicht die nöthige Genauigkeit; (m. s. hievon Hrn. Geh. R. Böhms Meßkunst auf dem Felde §. 47).

§. 242. Aufg. Eine auf dem Meßtische gezeichnete Figur auf dem Felde abzustecken.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII. abcde die Figur auf dem Meßtische, die aufs Feld abgetragen werden soll. Man bringe den Meßtisch über die ebene Fläche, auf die man die Figur abstecken will, und nehme innerhalb abcde, einen Punkt o an; an diesen Punkt o lege man die

die dioptrische Regel und lasse in den Richtungen oe, od, oc, ob, oa, Stäbe abstecken, die man, um sich demnächst nicht zu irren, mit eben den Nummern bezeichnet, womit man die Eckpunkte e, d, c, b, a bezeichnet haben muß.

Hierauf messe man nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man die Figur abcde, aufgetragen hat, die Weiten oe, od, oc, ob, oa, und trage sie nach der Meßkette, nemlich oe, von o nach E, od, von o nach D, u. s. w. in die abgesteckten Richtungen; so wird die Figur EDCBA auf dem Felde, der auf dem Meßtische ähnlich werden.

Aufl. II. Es sey Fig. LXXV abcdef die Figur auf dem Meßtische, die man auf dem Felde so abstecken soll, daß die Seite af, an die vorgegebene Linie AF zu liegen komme.

Man richte die Linie af längst AF ein; und lasse, indem man an ab, ac, ad, ae, das Dioptrlinial legt, in diesen Richtungen wieder Stäbe abstecken, und mache AB, AC, AD, AE, AF nach der Meßkette so groß, als ab, ac, ad, ae, af, nach dem verjüngten Maaße sind, so wird die Figur ABCDEF der abcdef ähnlich werden.

Aufl. III. Man siehet leicht, daß man, indem man die Aufgabe des 222 Hes umkehret, auch eine Figur auf dem Meßtische, aus ihrem Umkreise abstecken kan; da aber sowohl diese Aufgabe, als wie überhaupt das Abstecken der Figuren nach andern Methoden, die sich gar leicht erdenken liessen, eben keine sonderliche Schwürigkeit hat, wenn man nur die im XVIII Kapitel beygebrachten Vermessungsarten wohl inne hat, so werde ich mich dabey nicht länger aufhalten, und nur noch die Errinnerung beyfügen, daß dieses Abstecken der Figuren vorzüglich bey Feldertheilungen gebraucht wird. Bey welchem Geschäfte ein Feldmesser aber alle nöthige Sorgfalt und Vorsicht anwenden muß, die Theilungslinien und Winkel auf dem Meßtische, mit der möglichsten Schärfe abzustecken.

§. 243. Aufg. Es sey Fig. XL, AB eine Weite von bekanter Grösse, und CD eine Weite die man finden soll; zwischen C und D ist ein Hinderniß, daß man von D nach C zwar nicht messen, aber doch hinsehen kan; an die bekante Länge AB kan man gar nicht kommen; man soll CD finden, vorausgesezt daß man nur über C, D den Meßtisch bringen kan.

Aufl. Man verfahre wie in (§. 184,) als wenn man aus der Standlinie CD, die Weite

AB

AB finden wolte. Da aber CD nicht gemessen werden kan, so mache man cd auf dem Meßtische von willkürlicher Länge z. E. nehme cd tausend Theilen eines gewissen Maaßstabes gleich; nachdem nun der Meßtisch wie gehörig über D gebracht worden, und man auf demselben nach (§. 184) alle Richtungslinien gezogen hat, so wird die Figur abcd, der ABCD ähnlich, und es sind ab, cd, denen Linien AB, CD proportionat; man messe also auf dem Meßtische die Linie ab, nach dem Maaßstabe, nach welchem man hier z. E. cd = 1000 Theilen genommen hat; ich will setzen man fände nach diesem Maaßstabe ab = 3560 Theilen; wenn nun die bekante Weite AB = 670 Ruthen wäre, so fände man CD nach der Proportion ab : cd = AB : CD oder

3560 : 1000 = 670 : CD

also CD = 188,2 Ruth.

Diese und ähnliche Aufgaben können beym Feldmessen unterweilen mit Nutzen gebraucht werden.

Wenn man auf dem Meßtische die Weiten ac, cb, u. s. w. nach dem erwähnten tausendtheiligten Maaßstabe misset so findet man aus den Proportionen

ab : AB = ac : AC; ab : AB = cb : CB u. s. w. auch die Entfernungen wie AC, CB; oder AD, BD;

Ende des zweiten Theils.

Noch einige Druckfehler im ersten Theile.

Seite 9 Zeile 7 statt sin ψ ließ sin φ
S. 12 Z. 10 statt AC : DC l. AD : AC
S. 13 Z. 8 am Ende dieser Zeile statt φ l. ψ
S. 20 Z. 11 statt — DC^2 l. — AC^2
S. 147 Z. 20 statt 1140 l. 1040
S. 148 Z. 2 und 4 statt 1440 l. 1049
S. 183 Z. 2 vom Ende, statt also l. also in
S. 195 Z. 1 statt gut l. gut seyn
S. 239 auf der letzten Z. statt $\frac{m}{m+n}$ l. $\frac{n}{m+n}$
S. 240 lese man in dem dortigen Exemp. überall $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{32}$ statt $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{32}$
S. 241 Z. 12 statt $\frac{m}{m+n}$. l. $\frac{n}{m+n}$
S. 258 letzte Z. statt CL l. CK
S. 350 Z. 4 statt deswegen l. der wegen
S. 449 Z. 5. statt $\frac{22}{30}$ l. $7\frac{22}{30}$

Druckfehler im zweiten Theile.

S. 15 Zeile 2 vom Ende, statt für α 3 l. Wenn $\alpha = 3$
S. 79 Z. 2 statt 12° l. tang 12°
S. 89 Z. 23 statt Zinkelgewinde l. Zirkelgewinde
S. 164 Z. 5 statt Mesnico l. Menisco
S. 228 letzte Z. statt BA l. BC
S. 230 Z. 10 statt log tang φ l. tang φ
S. 231 Z. 3 statt tang ACB l. tang $\frac{1}{2}$ ACB
S. 250. Z. 16 statt DC l. ADC
S. 430 Z. 10 statt derjenigen l. denjenigen.

BIBLIOTEKI

Fig. I.

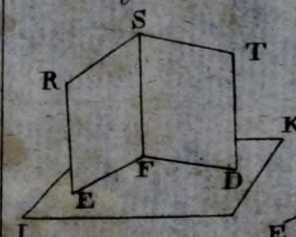


Fig. II.

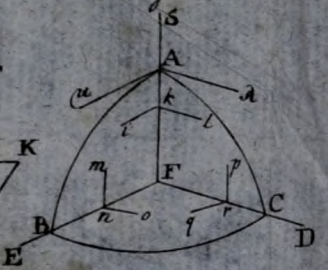


Fig. III

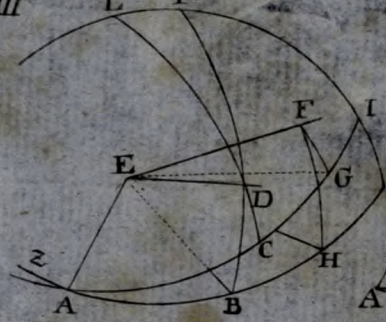


Fig. IV.

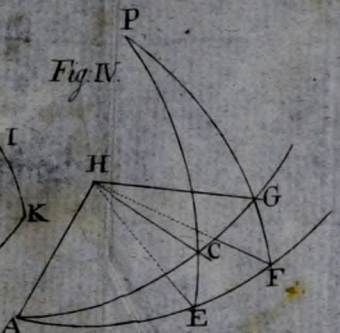
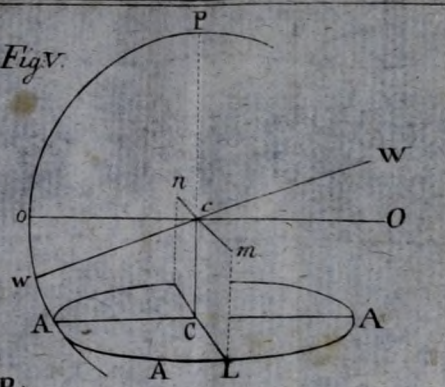


Fig. V.



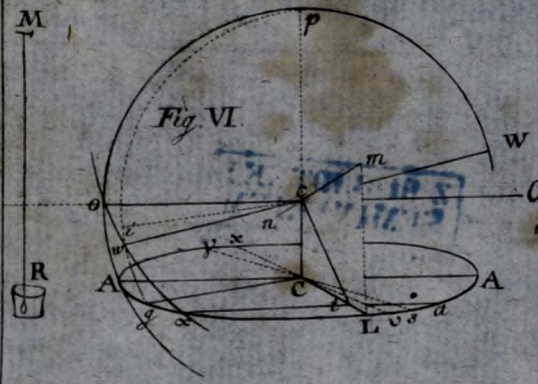
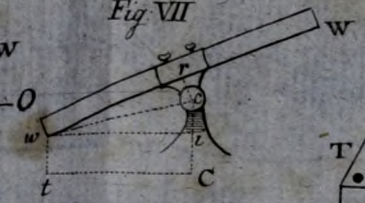


Fig. VI.

Fig. VII



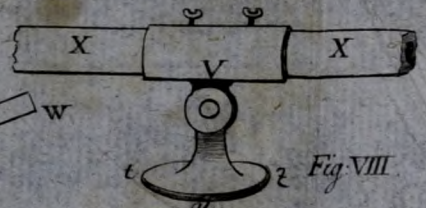


Fig. VIII.

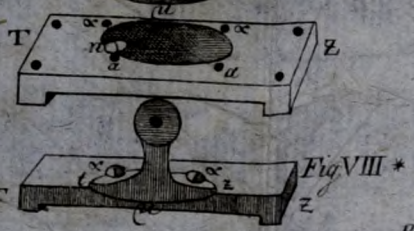


Fig. VIII *

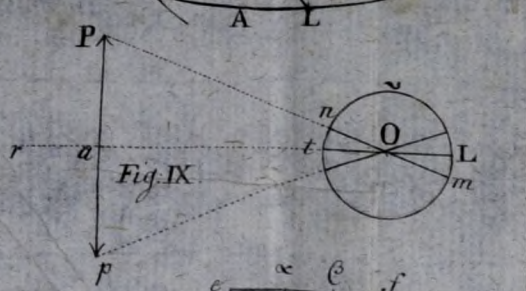


Fig. IX.

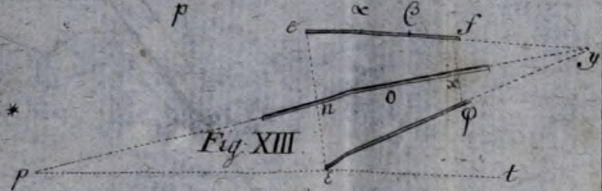


Fig. XIII

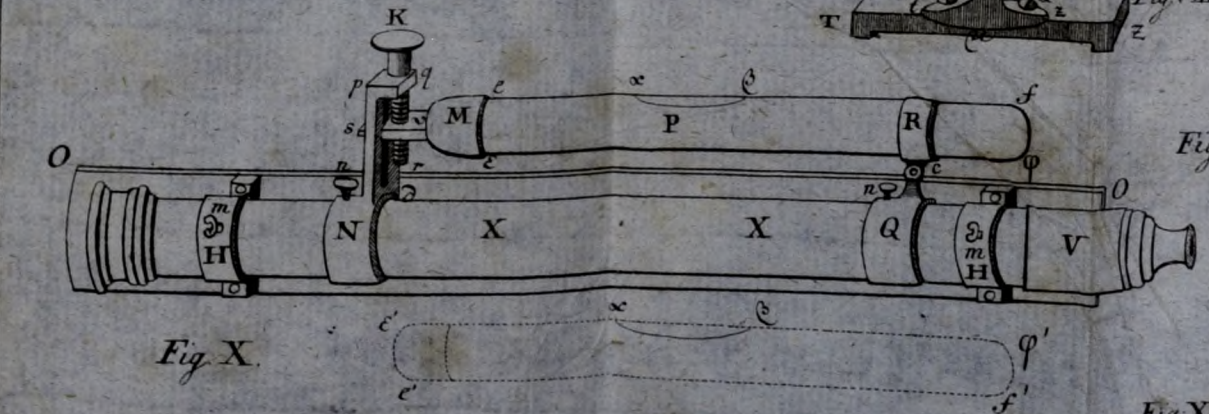


Fig. X.

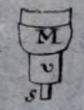


Fig. XI.

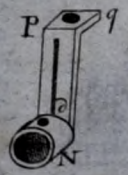


Fig. XII.

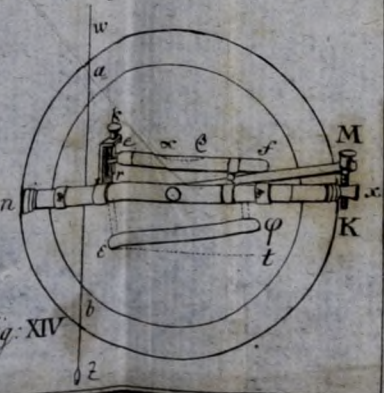
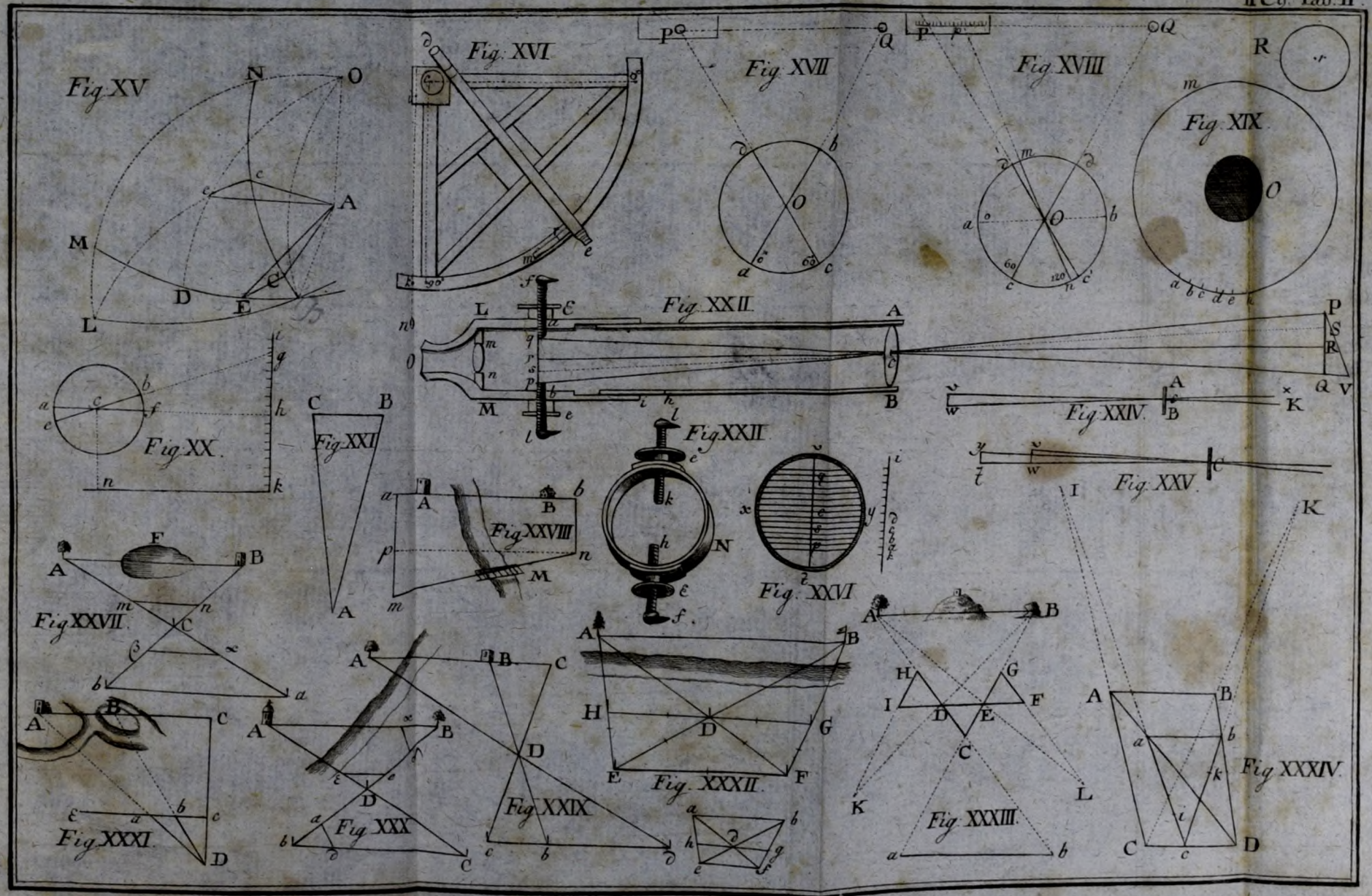
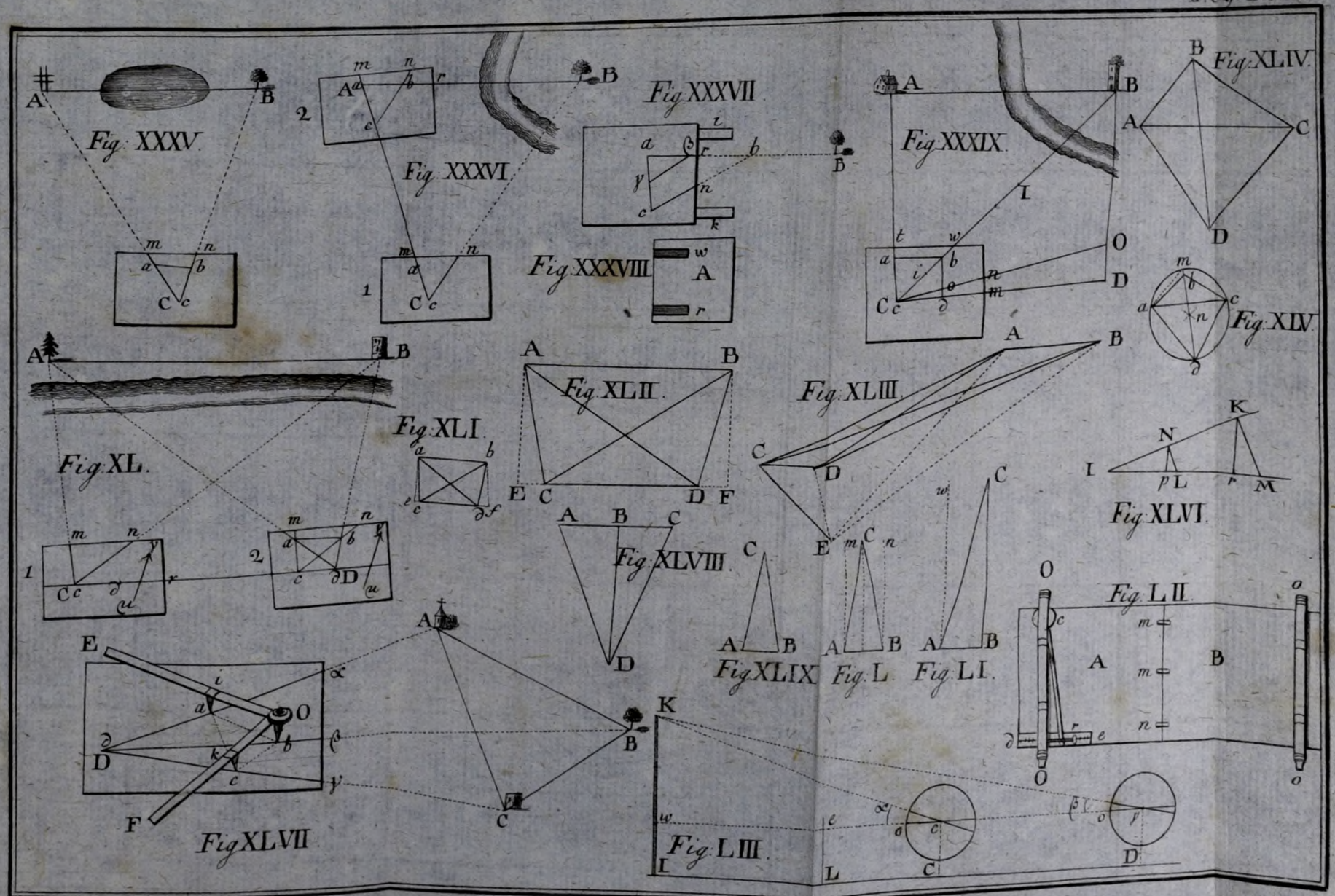


Fig. XIV.


Fig. XV
Fig. XVI
Fig. XVII
Fig. XVIII
Fig. XIX
Fig. XX
Fig. XXI
Fig. XXII
Fig. XXIII
Fig. XXIV
Fig. XXV
Fig. XXVI
Fig. XXVII
Fig. XXVIII
Fig. XXIX
Fig. XXX
Fig. XXXI
Fig. XXXII
Fig. XXXIII
Fig. XXXIV


Fig. XXXV.
Fig. XXXVI.
Fig. XXXVII.
Fig. XXXVIII.
Fig. XXXIX.
Fig. XLIV.
Fig. XLIV.
Fig. XL.
Fig. XLI.
Fig. XLII.
Fig. XLIII.
Fig. XLVI.
Fig. XLVIII.
Fig. XLIX.
Fig. L.
Fig. LI.
Fig. LII.
Fig. LIII.
Fig. XLVII.

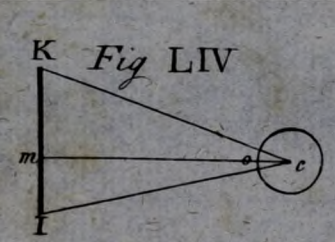


Fig. LIV

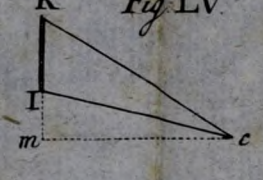


Fig. LV

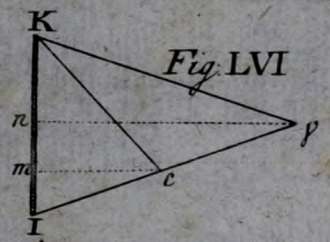


Fig. LVI



Fig. LVII

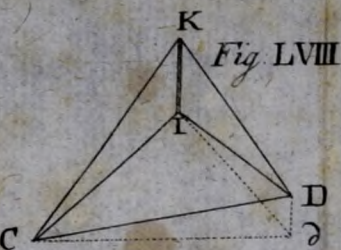


Fig. LVIII

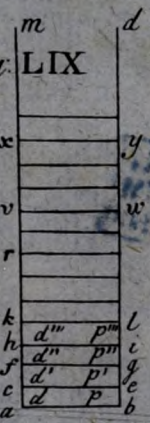


Fig. LIX



Fig. LX

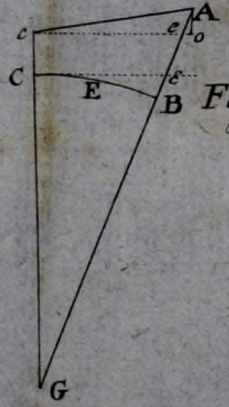


Fig. LXI

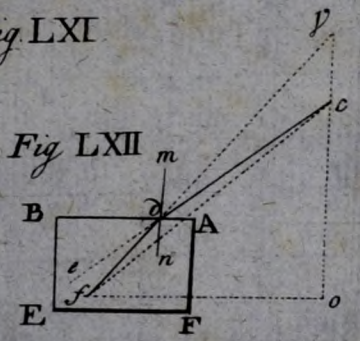


Fig. LXII

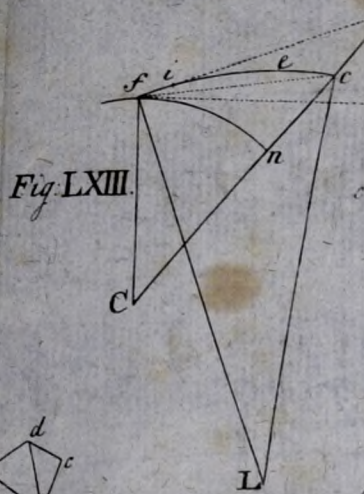


Fig. LXIII

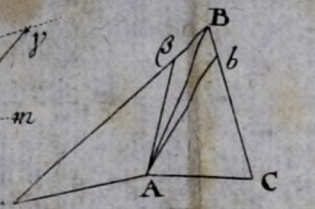


Fig. LXIV

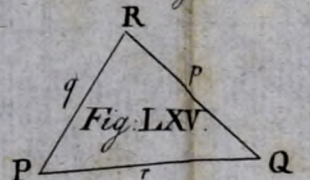


Fig. LXV

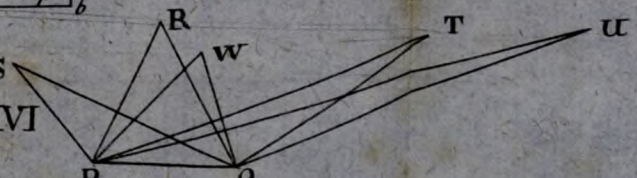


Fig. LXVI

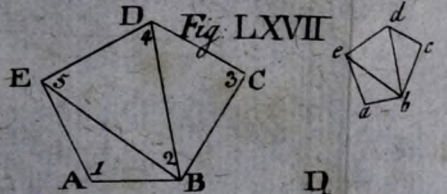


Fig. LXVII

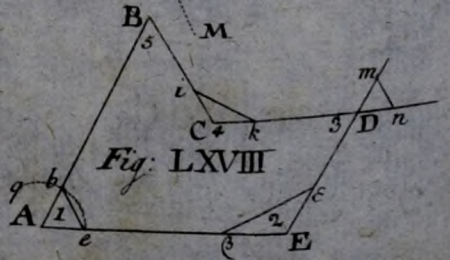


Fig. LXVIII

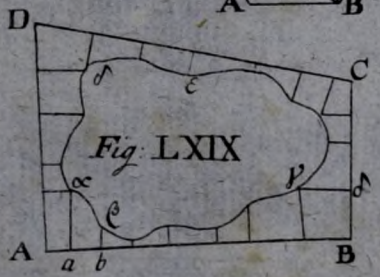


Fig. LXIX

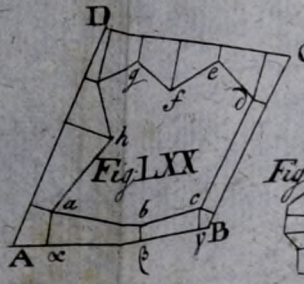
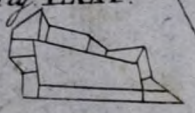


Fig. LXX


Fig. LXXI

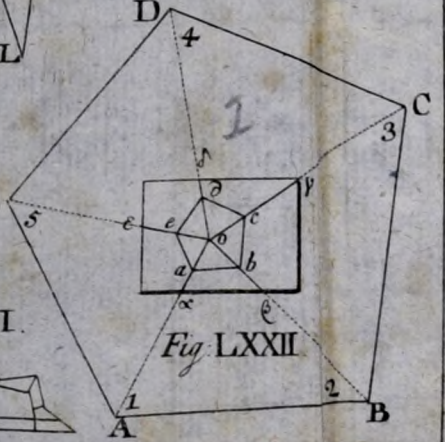
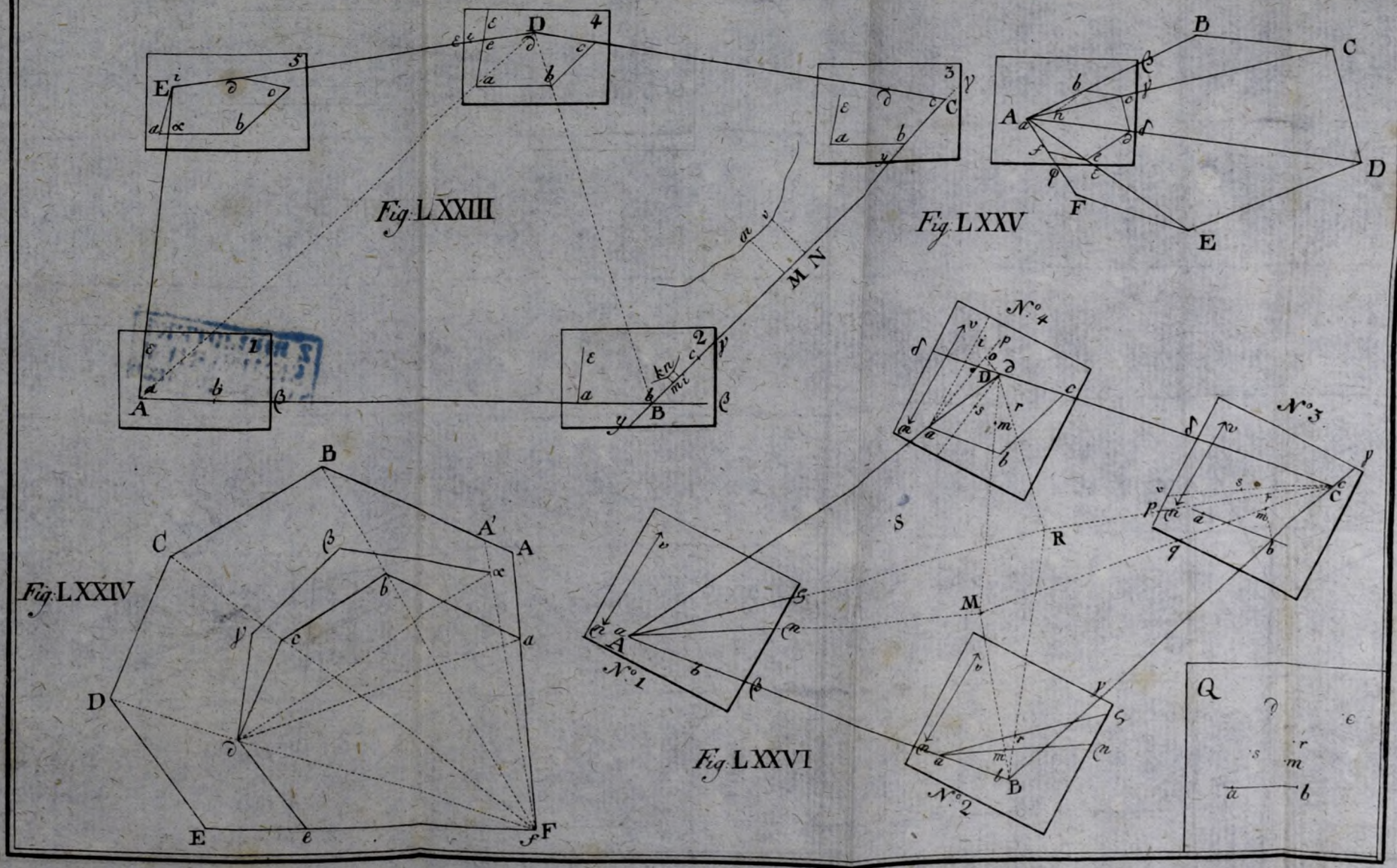


Fig. LXXII


Fig. LXXIII
Fig. LXXV
Fig. LXXIV
Fig. LXXVI
M N
A
B
C
D
E
F
S
R
M
Q
N°1
N°2
N°3
N°4

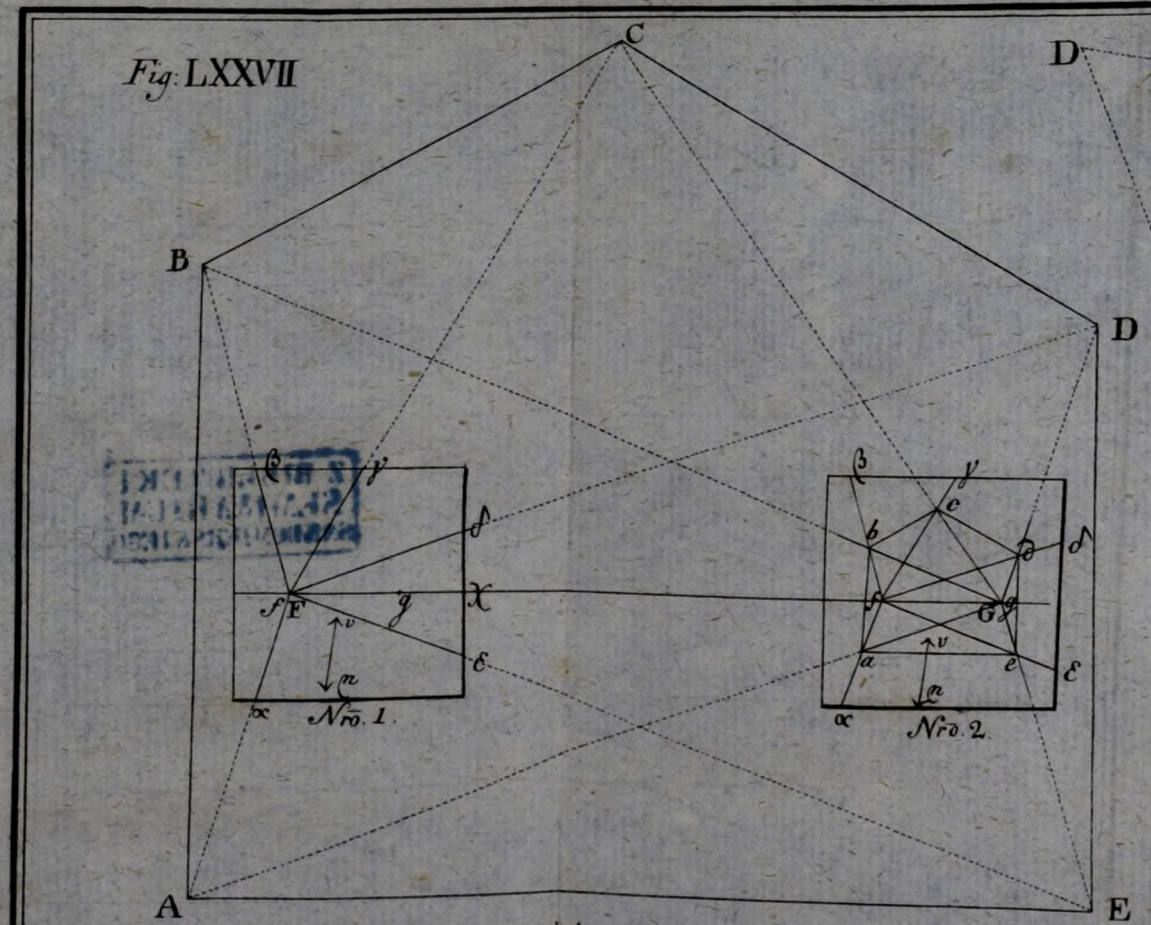


Fig. LXXVII

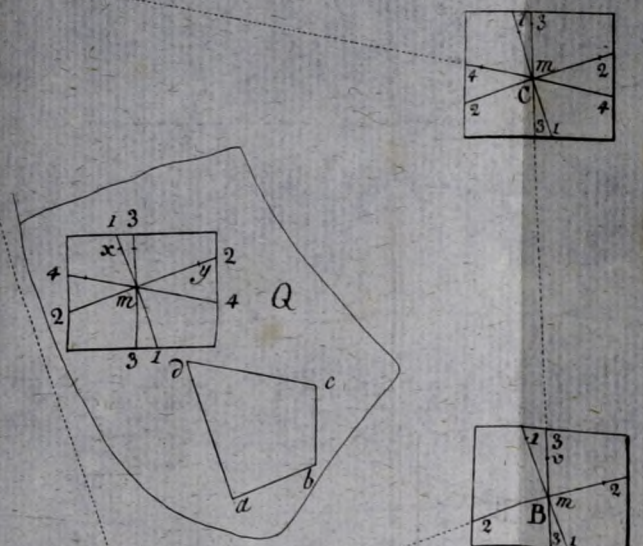


Fig. LXXIX

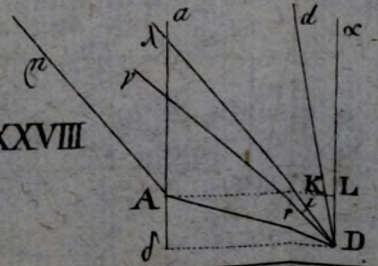


Fig LXXVIII

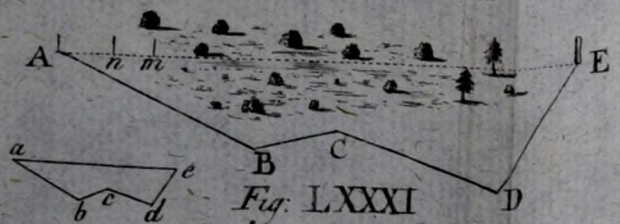


Fig. LXXXI

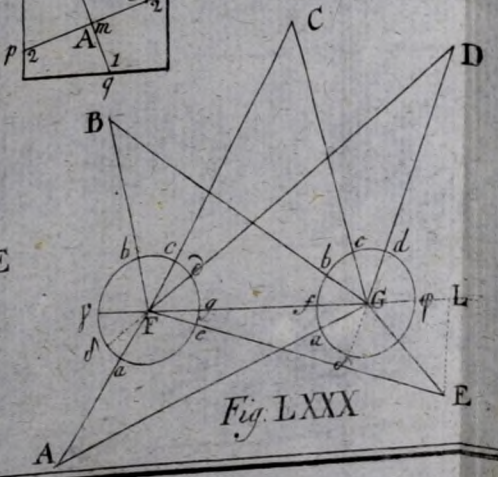


Fig. LXXX


00042599